Riv, Mat. Univ. Parma (2) 8 (1967), 259-289

Lucilla Bassotti (*)

Su un problema di autovalori per l'elasticità piana. (**)

Il presente lavoro è dedicato ai fondamenti teorici per la risoluzione di un problema di calcolo degli autovalori che interessa la teoria matematica della elasticità. Precisamente considererò un sistema elastico piano relativo ad un campo quadrato e per esso studierò il problema di autovalori connesso con il primo problema di valori al contorno (problema di Dirichlet).

Mentre per calcolare i valori per eccesso degli autovalori mi servirò del classico metodo di Rayleigh-Ritz, i valori per difetto saranno ottenuti con il metodo degli invarianti ortogonali. A tal fine mostrerò — attraverso un'analisi piuttosto delicata — come si possa giungere al calcolo dell'invariante ortogonale di ordine uno e grado due, connesso al problema in studio. Ritengo sia anche non priva di interesse l'analisi che si è dovuta compiere per pervenire alla decomposizione dello spazio funzionale, nel quale il problema viene studiato, in sottospazi invarianti.

Una successiva Nota sarà dedicata ai risultati numerici ottenuti applicando i metodi esposti nel presente lavoro.

§ 1.

Sottospazi invarianti per l'operatore dell'elasticità in un campo piano quadrato.

Si consideri il sistema

$$\Delta_2 w_i + \sigma \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right) = f_i(x_1, x_2) \qquad (i = 1, 2), \tag{1.1}$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 21 del Comitato per la Matematica del C.N.R. — Ricevuto il 10-XII-1967.

nelle incognite $w_1(x_1, x_2)$ e $w_2(x_1, x_2)$. Il numero σ è un arbitrario numero reale positivo o nullo.

Introdotti i vettori $w \equiv (w_1, w_2)$ e $f \equiv (f_1, f_2)$ [1], (1.1) può scriversi:

$$(1.1') \qquad Lw \equiv \Delta_2 w + \sigma \operatorname{grad} \operatorname{div} w = f\,.$$

Sia A il campo quadrato definito dalle diseguaglianze $|x_i| < \pi/2$ $(i = 1, 2)$ ed $\overline{A}$ la sua chiusura.

Sia $K(A)$ lo spazio vettoriale delle funzioni reali definite in A. Indicato con $K^{\alpha_1\alpha_2}(A)$ $(\alpha_i = 0, 1;\ i = 1, 2)$ il sottospazio di $K(A)$ costituito dalle funzioni simmetriche rispetto all'asse x_i quando l'i-esimo indice α_i è nullo, antisimmetriche rispetto all'asse x_i quando l'i-esimo indice α_i vale uno, sussiste la seguente decomposizione di $K(A)$ in somma diretta di sottospazi:

$$(1.2) \qquad K(A) = K^{00}(A) \oplus K^{01}(A) \oplus K^{10}(A) \oplus K^{11}(A) \quad [2]\,.$$

Si riconosce facilmente che, assegnata una funzione $h(x_1, x_2) \in K(A)$, la sua componente nel sottospazio $K^{\alpha_1\alpha_2}(A)$ è data da:

$$(1.3) \qquad h^{\alpha_1\alpha_2}(x_1, x_2) = 4^{-1}\,[h(x_1, x_2) + (-1)^{\alpha_1} h(x_1, -x_2) +$$
$$+ (-1)^{\alpha_2} h(-x_1, x_2) + (-1)^{\alpha_1+\alpha_2} h(-x_1, -x_2)] \qquad (\alpha_i = 0, 1;\ i = 1, 2).$$

In particolare, se $h(x_1, x_2)$ è definita in $\overline{A}$, le funzioni $h^{\alpha_1\alpha_2}(x_1, x_2)$ espresse dalla (1.3) sono definite in $\overline{A}$; risulta quindi

$$(1.\overline{2}) \qquad K(\overline{A}) = K^{00}(\overline{A}) \oplus K^{01}(\overline{A}) \oplus K^{10}(\overline{A}) \oplus K^{11}(\overline{A})\,,$$

con ovvio significato dei simboli.

Osservazione. Sia $g(x_1, x_2) = h(x_2, x_1)$. Si ha allora:

$$(1.4) \qquad g^{\alpha_1\alpha_2}(x_1, x_2) = [h^{\alpha_2\alpha_1}(\xi_1, \xi_2)]_{\substack{\xi_1 = x_2\\ \xi_2 = x_1}} \qquad (\alpha_i = 0, 1;\ i = 1, 2).$$

Si considerino lo spazio vettoriale $V(A)$ di tutti i vettori a due componenti reali definite in A e i suoi sottospazi $V^{\alpha\beta}(A)$ $(\alpha, \beta = 0, 1)$ costituiti dai vet-

---

(1) D'ora in avanti con una lettera, ad esempio w, indicherò un vettore; con la stessa lettera munita dell'indice i indicherò la sua componente i-esima, w_i $(i = 1, 2)$.

(2) Si confronti ad esempio [**6**], pag. 175.

tori $v \equiv (v_1, v_2)$ tali che:

$$v_1 \in K^{\alpha+(-1)^\alpha, \beta}(A), \qquad v_2 \in K^{\alpha, \beta+(-1)^\beta}(A).$$

Sia v un arbitrario vettore di $V(A)$. Si considerino, per ogni componente v_i, le quattro funzioni $v_i^{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 0, 1)$ definite dalla (1.3). Il vettore

$$v^{\alpha\beta} \equiv (v_1^{\alpha+(-1)^\alpha, \beta}, \; v_2^{\alpha, \beta+(-1)^\beta}) \tag{1.5}$$

appartiene a $V^{\alpha\beta}(A)$.

Sussiste il seguente teorema:

1.I. *Lo spazio vettoriale $V(A)$ è somma diretta di quattro sottospazi, nel modo seguente:*

$$V(A) = V^{00}(A) \oplus V^{01}(A) \oplus V^{10}(A) \oplus V^{11}(A). \tag{1.6}$$

Dim. Si verifica immediatamente che $v = v^{00} + v^{01} + v^{10} + v^{11}$. L'unicità di tale decomposizione è conseguenza di (1.2).

Si introducano ora le trasformazioni lineari $P^{\alpha\beta}$ dello spazio vettoriale $V(A)$ nel sottospazio $V^{\alpha\beta}(A)$ definite dalle relazioni:

$$P^{\alpha\beta} v = v^{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1) \text{ (3)}. \tag{1.7}$$

È immediato constatare che:

1.II. *Le trasformazioni lineari $P^{\alpha\beta}$ sono idempotenti. Inoltre, se (α, β) e (α', β') sono coppie ordinate distinte, allora $P^{\alpha\beta} \cdot P^{\alpha'\beta'}$ è la trasformazione nulla.*

Sia $V(\overline{A})$ la totalità dei vettori a due componenti reali definite in $\overline{A}$. Se $v \in V(A)$ i vettori $v^{\alpha\beta} = P^{\alpha\beta} v$ possono, tramite le (1.3) e (1.5), pensarsi definiti in $\overline{A}$. Sussiste il seguente risultato, di dimostrazione immediata:

1.III. *Se $v \in V(\overline{A})$ ed è nullo su $\mathscr{F}A$ allora $P^{\alpha\beta}v$ è nullo su $\mathscr{F}A$. Inoltre se $v \in \mathscr{C}^h(\overline{A})$* (4)*, $P^{\alpha\beta}v \in \mathscr{C}^h(\overline{A})$.*

1.IV. *Se $v \in \mathscr{C}^2(A)$, risulta $P^{\alpha\beta}v \in \mathscr{C}^2(A)$ e sussiste la relazione: $LP^{\alpha\beta}v = P^{\alpha\beta}Lv$.*

---

(3) Si osservi che se v è costante e $v \equiv (c_1, c_2)$, allora $P^{10} v \equiv (c_1, 0)$, $P^{01} v \equiv (0, c_2)$, $P^{00} v \equiv P^{11} v \equiv 0$.

(4) Con $\mathscr{C}^h(A)$ e $\mathscr{C}^h(\overline{A})$ si intendono gli spazi dei vettori reali a due componenti di classe h in A e $\overline{A}$ rispettivamente (h intero non negativo oppure ∞).

Dim. Sia $h(x_1, x_2)$ una funzione differenziabile in A appartenente a $K^{\alpha_1\alpha_2}(A)$. Dalla identità: $h(x_1, x_2) = (-1)^{\alpha_1} h(x_1, -x_2) = (-1)^{\alpha_2} h(-x_1, x_2)$, derivando i tre membri rispetto a x_i $(i = 1, 2)$ si trae:

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} \in K^{\alpha_1, \alpha_2 + (-1)^{\alpha_2}}(A), \qquad \frac{\partial h}{\partial x_2} \in K^{\alpha_1 + (-1)^{\alpha_1}, \alpha_2}(A).$$

L'appartenenza del vettore $P^{\alpha\beta}v$ a $\mathscr{C}^2(A)$ è conseguenza di (1.3). Siano $v_i^{\alpha\beta}(x_1, x_2)$ le componenti di $P^{\alpha\beta}v$. Poichè $v_1^{\alpha\beta} \in V^{\alpha+(-1)^\alpha, \beta}(A)$, $v_2^{\alpha\beta} \in V^{\alpha, \beta+(-1)^\beta}(A)$, dalle considerazioni precedenti segue che:

$$\frac{\partial^2 v_1^{\alpha\beta}}{\partial x_i^2}, \frac{\partial^2 v_2^{\alpha\beta}}{\partial x_1 \partial x_2} \in V^{\alpha+(-1)^\alpha, \beta}(A), \qquad \frac{\partial^2 v_2^{\alpha\beta}}{\partial x_i^2}, \frac{\partial^2 v_1^{\alpha\beta}}{\partial x_1 \partial x_2} \in V^{\alpha, \beta+(-1)^\beta}(A), \qquad (i = 1, 2).$$

Ciò prova che $\mathrm{L}v^{\alpha\beta} \in V^{\alpha\beta}(A)$. Dalla linearità di L, in base alla (1.6), discende $P^{\alpha\beta}\,\mathrm{L}v = \mathrm{L}\,v^{\alpha\beta}$, cioè l'asserto.

Si consideri ora la trasformazione lineare S dello spazio vettoriale $V(A)$ in sè, così definita: se $v \equiv \big(v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2)\big)$,

$$Sv \equiv \big(v_2(x_2, x_1), v_1(x_2, x_1)\big). \tag{1.8}$$

1.V. *La trasformazione lineare S gode delle seguenti proprietà:*

1) *S^2 è l'identità,*

2) *se $v \in \mathscr{C}^1(A)$ ed $i \neq j$, si ha* $\dfrac{\partial}{\partial x_i} Sv = S \dfrac{\partial v}{\partial x_j}$ $\quad (i, j = 1, 2)$,

3) *se $v \in \mathscr{C}^2(A)$, S* grad div $v \equiv$ grad div Sv.

Dim. La 1) è ovvia. Per la 2) si osservi che, se $h(x_1, x_2)$ è una funzione differenziabile in A, riesce:

$$\left[\frac{\partial h(\xi_2, \xi_1)}{\partial \xi_i}\right]_{\substack{\xi_1 = x_1 \\ \xi_2 = x_2}} = \left[\frac{\partial h(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_j}\right]_{\substack{\xi_1 = x_2 \\ \xi_2 = x_1}} \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2). \tag{1.9}$$

Per la 3), basta osservare che posto $g(x_1, x_2) = \operatorname{div} v$, da (1.9) segue:

$$\operatorname{div} Sv = g(x_2, x_1), \qquad \operatorname{grad} g(x_2, x_1) = S \operatorname{grad} g(x_1, x_2).$$

Dal teorema 1.V segue facilmente

1.VI. *Per ogni vettore $v \in \mathscr{C}^2(A)$, $S\mathrm{L}v \equiv \mathrm{L}Sv$.*

1.VII. *Le trasformazioni lineari* $P^{\alpha\alpha}$ $(\alpha = 0,\ 1)$ *sono permutabili con* S. *Si ha inoltre* $SP^{01} = P^{10}S$, $SP^{10} = P^{01}S$.

Dim. Si ha: $P^{\alpha\beta}v \equiv (v_1^{\alpha+(-1)^\alpha,\beta},\ v_2^{\alpha,\beta+(-1)^\beta})$. Dalla (1.4) segue:

$$SP^{\alpha\beta}v \equiv \left([v_2^{\alpha,\beta+(-1)^\beta}(\xi_1,\ \xi_2)]_{\substack{\xi_1=x_2\\ \xi_2=x_1}},\ [v_1^{\alpha+(-1)^\alpha,\beta}(\xi_1,\ \xi_2)]_{\substack{\xi_1=x_2\\ \xi_2=x_1}}\right) \equiv P^{\beta\alpha}Sv \quad (\alpha,\ \beta = 0,\ 1).$$

Osservazione. Come conseguenza del teorema precedente si ha che, se $v \in V^{\alpha\beta}(A)$, allora $Sv \in V^{\beta\alpha}(A)$, $(\alpha,\ \beta = 0,\ 1)$.

Si considerino ora le seguenti trasformazioni lineari dello spazio $V(A)$ nel sottospazio $V^{\alpha\alpha}(A)$:

$$P^{\alpha\alpha 1} = \tfrac{1}{2}(I + S)P^{\alpha\alpha}, \quad P^{\alpha\alpha 0} = \tfrac{1}{2}(I - S)P^{\alpha\alpha}, \qquad (\alpha = 0,\ 1). \tag{1.10}$$

1.VIII. *La trasformazione lineare* $P^{\alpha\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 0, 1)$ *è idempotente. Il codominio* $V^{\alpha\alpha\beta}(A)$ *di* $P^{\alpha\alpha\beta}$ *è costituito da tutti e soli i vettori di* $V^{\alpha\alpha}(A)$ *per i quali riesce*:

$$v = (-1)^{\beta+1}\, Sv \ \text{[5]}. \tag{1.11}$$

Dim. Da 1.V si deduce che gli operatori $\frac{1}{2}(I \pm S)$ sono idempotenti. La prima parte del teorema segue allora da 1.II e 1.VII. Per la seconda parte, si osservi che, per ogni $w \in V(A)$ riesce:

$$2SP^{\alpha\alpha\beta}\, w = S\,(I + (-1)^{\beta+1}\, S)\, P^{\alpha\alpha}\, w = (S + (-1)^{\beta+1}I)\, P^{\alpha\alpha}\, w = 2(-1)^{\beta+1}\, P^{\alpha\alpha\beta}\, w.$$

Ciò prova che i vettori di $V^{\alpha\alpha\beta}(A)$ verificano la (1.11). Infine, se $v \in V^{\alpha\alpha}(A)$ e verifica la (1.11) con $\beta = 1$ (oppure $\beta = 0$), riesce $P^{\alpha\alpha 1}\, v = v$ (oppure $P^{\alpha\alpha 0}\, v = v$)

1.IX. *Si considerino le sei trasformazioni lineari* P^{10}, P^{01}, P^{111}, P^{110}, P^{001}, P^{000}: *tutti i possibili prodotti di due trasformazioni distinte danno la trasformazione nulla.*

Dim. Si osservi che dal teorema 1.V segue: $(I + S)\,(I - S) = (I - S)\,(I + S) = 0$. Tenendo presente ciò e i risultati di 1.II, la tesi si riduce ad una verifica.

---

(5) I vettori di $V(A)$ che verificano la (1.11) sono tutti e soli i vettori $(v_1,\ v_2)$ tali che $v_2(x_1,\ x_2) = (-1)^{\beta+1}\, v_1(x_2,\ x_1)$.

1.X. *Lo spazio vettoriale $V(A)$ si rappresenta come somma diretta di sei sottospazi, nel modo seguente*:

$$V(A) = V^{10}(A) \oplus V^{01}(A) \oplus V^{001}(A) \oplus V^{000}(A) \oplus V^{111}(A) \oplus V^{110}(A). \tag{1.12}$$

Dim. In base a 1.I, basterà mostrare che $V^{\alpha\alpha}(A) = V^{\alpha\alpha 1}(A) \oplus V^{\alpha\alpha 0}(A)$. Per ogni $v \in V^{\alpha\alpha}(A)$ si ponga $v = \frac{1}{2}(I + S)v + \frac{1}{2}(I - S)v$. Da 1.VIII segue che $\frac{1}{2}(I + S)v \in V^{\alpha\alpha 1}(A)$, $\frac{1}{2}(I - S)v \in V^{\alpha\alpha 0}(A)$. Per mostrare l'unicità della decomposizione, si consideri il vettore nullo e si ponga $0 = n^{(1)} + n^{(0)}$ con $n^{\beta} \in V^{\alpha\alpha\beta}(A)$ $(\beta = 0, 1)$. Riesce allora $0 = S0 = Sn^{(1)} + Sn^{(0)} = n^{(1)} - n^{(0)}$ e quindi $n^{(1)} = n^{(0)} = 0$.

Si consideri il sottospazio $W(A)$ di $V(A)$ dei vettori di quadrato sommabile in A e si introduca in esso una struttura di spazio di HILBERT ponendo

$$(u, v) = \int_A u \times v \, dx = \int_A \left[\sum_{i=1}^{2} u_i(x_1, x_2)\, v_i(x_1, x_2)\right] dx_1\, dx_2 . \tag{1.13}$$

Naturalmente, vettori quasi ovunque uguali in A vengono pensati come un unico elemento dello spazio.

Le trasformazioni lineari S, $P^{\alpha\beta}$, $P^{\alpha\alpha\beta}$, $(\alpha, \beta = 0, 1)$ definite nello spazio vettoriale $V(A)$, possono ora essere pensate come trasformazioni lineari dello spazio di HILBERT $W(A)$ in sè ([6]).

1.XI. *La trasformazione lineare S di $W(A)$ in sè, è una trasformazione hermitiana.*

Dim. Dalla (1.13) discende immediatamente che, per ogni coppia u, v di elementi di $W(A)$, è $(Su, Sv) = (u, v)$. La tesi è conseguenza del fatto che S^2 è l'identità.

1.XII. *Le trasformazioni lineari $P^{\alpha\beta}$, $P^{\alpha\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 0, 1)$ di $W(A)$ in sè, sono proiettori.*

Dim. Basterà provare che sono trasformazioni hermitiane. Siano $u, v \in W(A)$; si verifica facilmente che, se (α, β) e (α', β') sono coppie distinte, riesce $(P^{\alpha\beta} u, P^{\alpha'\beta'} v) = 0$. Ne segue, ricordando la (1.6): $(P^{\alpha\beta} u, v) = (P^{\alpha\beta} u, P^{\alpha\beta} v) = (u, P^{\alpha\beta} v)$ e ciò prova che $P^{\alpha\beta}$ è hermitiana. D'altra parte, in base ai Teoremi 1.VII e 1.XI e a quanto sopra detto, si ha:

$$2(P^{\alpha\alpha\beta} u, v) = (P^{\alpha\alpha} u, v) + (-1)^{\beta+1} (SP^{\alpha\alpha}u, v) = (P^{\alpha\alpha}u, v) + (-1)^{\beta+1} (P^{\alpha\alpha} Su, v) =$$
$$= (u, P^{\alpha\alpha}v) + (-1)^{\beta+1} (Su, P^{\alpha\alpha}v) = (u, P^{\alpha\alpha}v) + (-1)^{\beta+1}(u, SP^{\alpha\alpha}v) = 2(u, P^{\alpha\alpha\beta}v).$$

Ciò prova che $P^{\alpha\alpha\beta}$ è hermitiana.

([6]) Ciò è lecito, in quanto vettori di $V(A)$ quasi ovunque uguali in A vengono trasformati in vettori quasi ovunque uguali.

Detti $W^{\alpha\beta}(A)$ e $W^{\alpha\alpha\beta}(A)$ i codominii delle trasformazioni $P^{\alpha\beta}$ e $P^{\alpha\alpha\beta}$ rispettivamente, pensate come trasformazioni di $W(A)$ in sè, dai teoremi 1.IX, 1.X, 1.XII segue che

1.XIII. *Lo spazio di Hilbert $W(A)$ si rappresenta come somma diretta di sei sottospazi, a due a due mutuamente ortogonali, nel modo seguente:*

$$W(A) = W^{10}(A) \oplus W^{01}(A) \oplus W^{001}(A) \oplus W^{000}(A) \oplus W^{111}(A) \oplus W^{110}(A) . \tag{1.14}$$

Sia E un campo limitato la cui frontiera sia una curva regolare semplice chiusa. Si consideri lo spazio $\mathscr{H}(E)$ dei vettori a due componenti reali, funzioni di quadrato sommabile in E dotate in E di derivate parziali prime forti di quadrato sommabile in E. Si introduca in $\mathscr{H}(E)$ una struttura di spazio di HILBERT, definendo il prodotto scalare di due vettori nel modo seguente:

$$((u,\ v))_E = \sum_{i=1}^{2} \int_E (\operatorname{grad} u_i \times \operatorname{grad} v_i)\, dx + \sigma \int_E \operatorname{div} u \cdot \operatorname{div} v\, dx . \tag{1.15}$$

In tale spazio un elemento è una classe di vettori che differiscono quasi ovunque per una costante.

Le trasformazioni lineari S, $P^{\alpha\beta}$, $P^{\alpha\alpha\beta}$ $(\alpha,\ \beta = 0,\ 1)$ possono essere pensate come trasformazioni di $\mathscr{H}(A)$ in sè [7], come è facile verificare.

1.XIV. *La trasformazione lineare S di $\mathscr{H}(A)$ in sè è hermitiana.*

Dim. Dalla (1.9) si deduce facilmente che $((Su,\ Sv)) = ((u,\ v))$ [8]. Ne segue la tesi, tenendo presente che S^2 è l'identità.

1.XV. *Le trasformazioni lineari $P^{\alpha\beta}$, $P^{\alpha\alpha\beta}$, $(\alpha,\ \beta = 0,\ 1)$ pensate come trasformazioni di $\mathscr{H}(A)$ in sè, sono proiettori.*

Dim. Basterà provare che sono trasformazioni hermitiane. Si verifica facilmente che, se $(\alpha,\ \beta)$ e $(\alpha',\ \beta')$ sono coppie distinte, allora $((P^{\alpha\beta}u,\ P^{\alpha'\beta'}v)) = 0$. Ne segue:

$$((P^{\alpha\beta}\, u,\ v)) = \sum_{\alpha',\beta'}^{0,1} ((P^{\alpha\beta}\, u,\ P^{\alpha'\beta'}\, v)) = \sum_{\alpha',\beta'}^{0,1} ((P^{\alpha'\beta'}\, u,\ P^{\alpha\beta}\, v)) = ((u,\ P^{\alpha\beta}\, v)) .$$

---

(7) Ciò è possibile, in quanto esse mutano vettori costanti in vettori costanti.
(8) D'ora in poi, porrò $((u,\ v)) = ((u,\ v))_A$.

Si ha inoltre:

$$2((P^{\alpha\alpha\beta}u,v))=((P^{\alpha\alpha}u,v))+(-1)^{\beta+1}((P^{\alpha\alpha}Su,v))=((u,P^{\alpha\alpha}v))+(-1)^{\beta+1}((Su,P^{\alpha\alpha}v))=$$
$$=((u,\ P^{\alpha\alpha}v))+(-1)^{\beta+1}((u,\ SP^{\alpha\alpha}v))=2((u,\ P^{\alpha\alpha\beta}v)).$$

Siano $U^{\alpha\beta}(A)$, $U^{\alpha\alpha\beta}(A)$ i codominii rispettivamente delle trasformazioni $P^{\alpha\beta}$ e $P^{\alpha\alpha\beta}$ di $\mathscr{H}(A)$ in sè.

1.XVI. *Lo spazio di Hilbert $\mathscr{H}(A)$ si rappresenta come somma diretta di sei sottospazi, a due a due mutuamenti ortogonali, nel modo seguente:*

$$\mathscr{H}(A)=U^{10}(A)\oplus U^{01}(A)\oplus U^{001}(A)\oplus U^{000}(A)\oplus U^{111}(A)\oplus U^{110}(A). \tag{1.16}$$

Dim. La (1.16) segue da (1.12). L'ortogonalità di due qualsiasi sottospazi è conseguenza dei teoremi 1.IX e 1.XV.

Sia $H^m(A)$ (m intero positivo) la varietà lineare di $W(A)$ costituita dai vettori dotati di tutte le derivate forti fino all'ordine m, di quadrato sommabile in A. Si consideri nello spazio $\mathscr{C}^\infty(A)\cap H^1(A)$ il seguente problema di autovalori:

$$Lw+\lambda w=0 \text{ in } A,\quad w=0 \text{ su } \mathscr{F}A \text{ (9)}. \tag{1.17}$$

Tale problema ammette una successione di autovalori tutti reali positivi, ciascuno dei quali ha molteplicità finita, ed è priva di punti di accumulazione al finito. Indicherò tale successione nel modo seguente $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_k\leqslant\ldots$. Ogni autovalore compare in detta successione un numero di volte uguale alla rispettiva molteplicità.

Si considerino ora i sei seguenti problemi di autovalori:

$$\begin{aligned}&Lw+\lambda w=0 \text{ in } A,\quad w=0 \text{ su } \mathscr{F}A,\\ &w\in W^{\alpha\beta}(A)\cap\mathscr{C}^\infty(A)\cap H^1(A)\qquad(\alpha,\ \beta=0,\ 1;\ \alpha\neq\beta)\end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned}&Lw+\lambda w=0 \text{ in } A,\quad w=0 \text{ su } \mathscr{F}A,\\ &w\in W^{\alpha\alpha\beta}(A)\cap\mathscr{C}^\infty(A)\cap H^1(A)\qquad(\alpha,\ \beta=0,\ 1).\end{aligned} \tag{1.19}$$

Ciascuno di tali problemi possiede una successione di autovalori reali positivi con molteplicità finita, priva di punti di accumulazione al finito. Indico

---

(9) Le autosoluzioni di (1.17) appartengono a $\mathscr{C}^\infty$ anche nei punti regolari di $\mathscr{F}A$. Ciò è provato in [5], teoremi 9.I e 10.I.

con $\{\lambda_i^{\alpha\beta}\}$ (α, $\beta = 0$, 1; $\alpha \neq \beta$) la successione degli autovalori di (1.18), e con $\{\lambda_i^{\alpha\alpha\beta}\}$ (α, $\beta = 0$, 1) la successione di autovalori di (1.19); in tutte le successioni gli autovalori si suppongono disposti in ordine non decrescente e ciascuno ripetuto un numero di volte uguale alla sua molteplicità. Sussiste il seguente teorema:

1.XVIII. – *La successione $\{\lambda_k\}$ si ottiene ordinando in un'unica successione non decrescente tutti gli elementi delle sei successioni $\{\lambda_i^{10}\}$, $\{\lambda_i^{01}\}$, $\{\lambda_i^{\alpha\alpha\beta}\}$* ($\alpha, \beta = 0, 1$). *Si ha inoltre:*

$$\lambda_i^{10} = \lambda_i^{01} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3, \ldots). \tag{1.20}$$

Dim. La circostanza che $\{\lambda_k\}$ si ottenga riunendo le sei successioni menzionate è conseguenza immediata dei teoremi 1.IV e 1.X. La (1.20) segue dal fatto che, se w^0 è autovettore relativo a λ_0, anche Sw^0 è autovettore relativo a λ_0 (teorema 1.VI).

§ 2.

Costruzioni di particolari sistemi completi di soluzioni di $\mathrm{L}w = 0$.

Si consideri il sistema omogeneo

$$\mathrm{L}w \equiv \Delta_2 w + \sigma \operatorname{grad} \operatorname{div} w = 0\,. \tag{2.1}$$

2.I. *Condizione necessaria e sufficiente perchè il vettore w omogeneo di grado ν sia soluzione di* (2.1) *è che esista un vettore armonico a, pur esso omogeneo di grado ν* (10), *tale che:*

$$\begin{cases} w = a - \dfrac{\sigma\,(x_1^2 + x_2^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} a}{2\,(2+\sigma)(\nu-1)} & \textit{se } \nu \neq 1 \ (^{11}), \\[2ex] w = a & \textit{se } \nu = 1\,. \end{cases} \tag{2.2}$$

Il vettore a è univocamente determinato da w.

---

(10) Dirò che un vettore è omogeneo (armonico) se le sue componenti sono rispettivamente funzioni omogenee (funzioni armoniche).

(11) La analoga della (2.2), per l'equazione dell'elasticità in tre variabili, trovasi in [4], pag. 25.

Dim. La condizione sufficiente si riduce ad una verifica. Si ha infatti:

$$\Delta_2\,[(x_1^2 + x_2^2) \text{ grad div } a] = 4(\nu - 1) \text{ grad div } a,$$

$$\text{div }[x_1^2 + x_2^2) \text{ grad div } a] = 2(\nu - 1) \text{ div } a\,.$$

Per dimostrare la condizione necessaria, si consideri un vettore w omogeneo di grado ν e soluzione di (2.1) e si ponga $a = w + \sigma[4(\nu - 1)]^{-1}(x_1^2 + x_2^2)$ grad div w. Ricordando che $Lw = 0$ implica Δ_2 div $w = 0$, si verifica facilmente che $\Delta_2 a = \Delta_2 w + \sigma$ grad div $w = 0$. Ciò prova che a è armonico. Si ha inoltre: div $a = 2^{-1}(2 + \sigma)$ div w e pertanto w si rappresenta mediante (2.2).

Sia ν un intero positivo. Si ponga:

$$p^\nu(x_1\,,\ x_2) = \text{Re}\,(x_1 + ix_2)^\nu\,, \quad q^\nu(x_1\,,\ x_2) = \text{Im}\,(x_1 + ix_2)^\nu\,.$$

2.II. *Appartengono ad $U^{10}(A)$ i vettori armonici:*

(2.3) $$(p^{2n}(x_1\,,\ x_2),\ 0)\,, \qquad (0,\ q^{2n}(x_1\,,\ x_2))\,, \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$ [12].

Appartengono ad $U^{01}(A)$ i vettori armonici:

(2.4) $$(0,\ p^{2n}(x_1\,,\ x_2))\,, \qquad (q^{2n}(x_1\,,\ x_2),\ 0)\,, \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Appartengono ad $U^{11}(A)$ i vettori armonici:

(2.5) $$(p^{2n-1}(x_1\,,\ x_2),\ 0)\,, \quad (0,\ p^{2n-1}(x_2\,,\ x_1))\,, \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Appartengono ad $U^{00}(A)$ i vettori armonici:

(2.6) $$(p^{2n-1}(x_2\,,\ x_1),\ 0)\,, \quad (0,\ p^{2n-1}(x_1\,,\ x_2))\,, \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Dim. Si ha:

$$\text{Re}\,(x_1 + ix_2)^{2n} = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{2n}{2r}x_1^{2n-2r}x_2^{2r}\,,$$

$$\text{Im}\,(x_1 + ix_2)^{2n} = \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\binom{2n}{2r+1}x_1^{2n-2r-1}\,x_2^{2r+1},$$

$$\text{Re}\,(x_1 + ix_2)^{2n-1} = x_1\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\binom{2n-1}{2r}\,x_1^{2n-2r-2}\,x_2^{2r},$$

$$\text{Im}\,(x_1 + ix_2)^{2n-1} = x_2\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\binom{2n-1}{2r+1}x_1^{2n-2r-2}\,x_2^{2r}.$$

---

[12] D'ora in avanti, per non appesantire la scrittura, adopererò lo stesso simbolo sia per indicare la classe di equivalenza elemento di $\mathscr{H}(A)$, sia per indicare un vettore di tale classe.

Ne segue che, se n è un arbitrario intero positivo,

$$p^{2n}(x_1, x_2) \in K^{00}(A), \qquad q^{2n}(x_1, x_2) \in K^{11}(A),$$

$$p^{2n-1}(x_1, x_2) \in K^{01}(A), \qquad q^{2n-1}(x_1, x_2) \in K^{10}(A),$$

ed inoltre $p^{2n-1}(x_2, x_1) = (-1)^{n-1} q^{2n-1}(x_1, x_2)$. Ciò dimostra l'asserto ([13]).

2.III. *Sia a un vettore armonico omogeneo, di grado ν diverso da uno, e w il suo corrispondente tramite le* (2.2). *Si ha allora*

$$Sw = Sa - \frac{\sigma(x_1^2 + x_2^2)}{2(2+\sigma)(\nu - 1)} \operatorname{grad} \operatorname{div} Sa. \tag{2.7}$$

Dim. È conseguenza di 1.V.

2.IV. *Se a è un vettore a componenti polinomi armonici di grado ν, appartenente a $U^{\alpha\beta}(A)$ (oppure a $U^{\alpha\alpha\beta}(A)$) e w è il suo corrispondente tramite le* (2.2), *allora $w \in U^{\alpha\beta}(A)$ (oppure $w \in U^{\alpha\alpha\beta}(A)$).*

Dim. Dal teorema 1.IV segue che, se $a \in U^{\alpha\beta}(A)$, allora grad div a è in $U^{\alpha\beta}(A)$. Ciò prova che, se $a \in U^{\alpha\beta}(A)$, $w \in U^{\alpha\beta}(A)$. Sia $a \in U^{\alpha\alpha\beta}(A)$. In tal caso, per quanto sopra affermato, $w \in U^{\alpha\alpha}(A)$; inoltre, essendo $a = (-1)^{\beta+1} Sa$, per il teorema 2.III, si ha $w = (-1)^{\beta+1} Sw$. Ciò basta per concludere che $w \in U^{\alpha\alpha\beta}(A)$. Il teorema è così dimostrato.

Sia B un campo limitato e connesso, la cui frontiera sia una curva regolare semplice, chiusa, di classe 2. Si consideri la varietà lineare Ω_B delle soluzioni di (2.1) appartenenti ad $\mathscr{H}(B)$ ([14]). Ω_B è una varietà lineare chiusa di $\mathscr{H}(B)$ ([15]).

2.V. *Sia $\{a^n\}$ il sistema dei vettori armonici*

$$(p^\nu(x_1, x_2), 0); \quad (0, p^\nu(x_1, x_2)); \quad (q^\nu(x_1, x_2), 0); \quad (0, q^\nu(x_1, x_2)); \tag{2.8}$$

con $\nu = 1, 2, \ldots$, ordinati in modo arbitrario in successione e $\{\omega^n\}$ quello dei vettori ad essi corrispondenti tramite le (2.2). *Il sistema $\{\omega^n\}$ è completo nel sottospazio Ω_B di $\mathscr{H}(B)$.*

([13]) Ogni vettore appartenente a $\mathscr{C}^1(\bar{A}) \cap V^{\alpha\beta}(A)$ determina un elemento di $U^{\alpha\beta}(A)$.

([14]) Un vettore $u \in \mathscr{H}(B)$ verifica (2.1) se $((u, v))_B = 0$ per ogni $v \in \mathscr{C}^1(B)$ e a supporto contenuto in B.

([15]) Infatti le componenti di ogni vettore di Ω_B sono soluzioni di $\Delta_2\Delta_2 w = 0$ ed è noto che, per una successione di vettori di Ω_B, la convergenza secondo la metrica di $\mathscr{H}(B)$ implica la convergenza uniforme nell'interno di B di tutte le derivate parziali prime delle componenti.

Dim. Si consideri lo spazio $\tilde{\mathscr{H}}(B)$ dei vettori a due componenti funzioni reali di quadrato sommabile in B, dotate di derivate forti di quadrato sommabile in B; si introduca in esso una struttura di spazio di Hilbert definendo il prodotto scalare nel modo seguente:

$$\langle u, v\rangle = \int_B \left\{ \sum_{i=1}^{2} (\operatorname{grad} u_i \times \operatorname{grad} v_i) + \sigma \operatorname{div} u \cdot \operatorname{div} v + \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma}{2+\sigma}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\right\} dx \quad (16) .$$

Sia $\tilde{\Omega}_B$ la varietà lineare costituita dalle soluzioni di (2.2) appartenenti ad $\tilde{\mathscr{H}}(B)$. $\tilde{\Omega}_B$ è una varietà lineare chiusa di $\tilde{\mathscr{H}}(B)$ (17).

Per ogni $u \in \tilde{\Omega}_B$ e ogni ω^n si ha:

$$\langle u, \omega^n\rangle + \int_{\mathscr{F}B} [u \times E(\omega^n)]\, ds = 0 ,$$

ove $E(\omega^n)$ è il vettore di componenti

$$E_1(\omega^n) = \frac{d\omega_1^n}{d\nu} + \sigma(\operatorname{div}\omega^n)\nu_1 + \frac{\sigma}{\sigma+2}\frac{d\omega_2^n}{ds} ; \; E_2(\omega^n) = \frac{d\omega_2^n}{d\nu} + \sigma(\operatorname{div}\omega^n)\nu_2 - \frac{\sigma}{2+\sigma}\frac{d\omega_1^n}{ds}$$

(ν denota la normale interna). Ne segue, per la completezza del sistema di vettori $\{E(\omega^n)\}$ nello spazio dei vettori appartenenti a $\mathscr{L}^2(\mathscr{F}B)$ e ortogonali a (1,0) e (0,1) (18) e per l'unicità della soluzione del problema di Dirichlet per l'operatore L in $\mathscr{C}^{1,2}(B)$ (19), che se $\langle u, \omega^n\rangle = 0$ per ogni n, allora $u = 0$. Ciò prova la completezza di $\{\omega^n\}$ nella varietà lineare $\tilde{\Omega}_B$.

D'altra parte gli spazi $\mathscr{H}(B)$ e $\tilde{\mathscr{H}}(B)$ sono spazi di Hilbert isomorfi, dato che contengono gli stessi elementi ed esistono, come subito si constata, due costanti m e M $(0 < m < M)$ tali che, per ogni vettore u aventi derivate prime forti di quadrato sommabile, si ha: $m < u, u > \leqslant ((u, u))_B \leqslant M < u, u >$. Ne segue che, essendo $\{\omega^n\}$ completo in $\tilde{\Omega}_B$, esso è anche completo in Ω_B. Il teorema è così dimostrato.

---

(16) Due vettori che differiscono quasi ovunque per un vettore costante costituiscono uno stesso elemento di $\tilde{\mathscr{H}}(B)$. La forma quadratica $\langle u, u\rangle$ è definita positiva, come facilmente si verifica.

(17) Si confronti nota (15).

(18) Si confronti [3], pag. 13, Teorema XVII.

(19) Si confronti [9], pag. 217, Teorema V. Con $\mathscr{C}^{1,2}(B)$ intendiamo la classe dei vettori reali a due componenti appartenenti a $\mathscr{C}^1(B)$ e tali che le derivate parziali prime siano di quadrato sommabile in B.

Sia Ω la chiusura, nella norma di $\mathscr{H}(A)$, della varietà lineare determinata dagli elementi di tutte le varietà lineari Ω_B, relative a campi limitati B, contenenti $\overline{A}$ e tali che $\mathscr{F}B$ sia una curva regolare semplice chiusa di classe 2.

2.VI. *Il sistema $\{\omega^n\}$ è completo nel sottospazio Ω di $\mathscr{H}(A)$.*

Dim. Sia u un elemento di Ω. Per definizione di Ω, fissato arbitrariamente $\varepsilon > 0$, esiste un campo $B \supset \overline{A}$ e un elemento $\omega_\varepsilon \in \Omega_B$ tale che $||| u - \omega_\varepsilon |||_A < \varepsilon$ [20].

D'altra parte, in base al teorema 2.V, esistono n_ε costanti $c_1, \dots, c_{n_\varepsilon}$ tali che $||| \omega_\varepsilon - \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} c_k \omega^k |||_B < \varepsilon$. Ne segue che:

$$||| u - \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} c_k \omega^k |||_A \leqslant ||| u - \omega_\varepsilon |||_A + ||| \omega_\varepsilon - \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} c_k \omega^k |||_B < 2\varepsilon .$$

Ciò prova l'asserto.

Si ponga, per ogni intero positivo ν,

$$\lambda_{\nu,\sigma} = \begin{cases} 0 & \text{se } \nu = 1 \\ \dfrac{-\sigma}{2(2+\sigma)(\nu-1)} & \text{se } \nu > 1 . \end{cases} \tag{2.9}$$

2.VII. *I seguenti vettori*

$$\left(p^{2n}(x_1, x_2) + \lambda_{2n,\sigma}(x_1^2 + x_2^2) \frac{\partial^2 p^{2n}}{\partial x_1^2} ; \lambda_{2n,\sigma}(x_1^2 + x_2^2) \frac{\partial^2 p^{2n}}{\partial x_1 \partial x_2} \right), \tag{2.10}$$

$$\left(\lambda_{2n,\sigma}(x_1^2 + x_2^2) \frac{\partial^2 p^{2n}}{\partial x_1^2} ; q^{2n}(x_1, x_2) + \lambda_{2n,\sigma}(x_1^2 + x_2^2) \frac{\partial^2 p^{2n}}{\partial x_1 \partial x_2} \right), \tag{2.11}$$

con $n = 1, 2, \dots$ costituiscono un sistema completo in $U^{10} \cap \Omega$.

Dim. I vettori (2.10) e (2.11) sono corrispondenti, tramite (2.2), dei vettori armonici (2.3) [21] e quindi, in base ai teoremi 2.II e 2.IV appartengono a $U^{10}(A) \cap \Omega$. La tesi discende allora dai teoremi 1.XVI, 2.VI.

---

[20] Con $||| u |||_E$ si indica $((u, u))_E^{1/2}$.

[21] Per la verifica, si tenga presente che $\dfrac{\partial p^\nu}{\partial x_1} = \dfrac{\partial q^\nu}{\partial x_2}$.

2.VIII. *Si considerino i vettori armonici* (2.5) *e i loro corrispondenti tramite* (2.2), *cioè i vettori*

$$\mathring{u}^n \equiv \left(p^{2n-1}(x_1, x_2) + \lambda_{2n-1,\sigma}(x_1^2+x_2^2) \frac{\partial^2 p^{2n-1}(x_1, x_2)}{\partial x_1^2};\ \lambda_{2n-1,\sigma}(x_1^2+x_2^2) \frac{\partial^2 p^{2n-1}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \right),$$

$$S\mathring{u}^n \equiv \left(\lambda_{2n-1,\sigma}(x_1^2+x_2^2) \frac{\partial^2 p^{2n-1}(x_2, x_1)}{\partial x_1 \partial x_2};\ p^{2n-1}(x_2, x_1) + \lambda_{2n-1,\sigma}(x_1^2+x_2^2) \frac{\partial^2 p^{2n-1}(x_2, x_1)}{\partial x_2^2} \right),$$

I vettori $\{\mathring{u}^n + (-1)^{\beta+1} S\mathring{u}^n\}$ *per* $n = 1, 2, \dots$ *costituiscono un sistema completo in* $U^{11\beta}(A) \cap \Omega$.

Dim. Dai teoremi 1.XVI, 2.IV e 2.VI discende che i vettori $\{\mathring{u}^n\}$ e $\{S\mathring{u}^n\}$ costituiscono un sistema completo in $U^{11}(A) \cap \Omega$, qualora si tenga presente che $p^{2n-1}(x_2, x_1) = (-1)^{n-1} q^{2n-1}(x_1, x_2)$. Ne segue facilmente che $\{\mathring{u}^n + S\mathring{u}^n\}$ e $\{\mathring{u}^n - S\mathring{u}^n\}$ costituiscono ancora un sistema completo in $U^{11}(A) \cap \Omega$. La tesi è allora conseguenza del fatto che

$$\mathring{u}^n + S\mathring{u}^n \in U^{111}(A),\quad \mathring{u}^n - S\mathring{u}^n \in U^{110}(A),\ \text{e che}\ U^{11}(A) = U^{111}(A) \oplus U^{110}(A),$$

2.IX. *Si considerino i vettori* (2.6) *e i loro corrispondenti, tramite* (2.2), *cioè i vettori*:

$$\mathring{v}^n = \left(p^{2n-1}(x_2, x_1) + \lambda_{2n-1,\sigma}(x_1^2+x_2^2) \frac{\partial^2 p^{2n-1}(x_2, x_1)}{\partial x_1^2};\ \lambda_{2n-1,\sigma}(x_1^2+x_2^2) \frac{\partial^2 p^{2n-1}(x_2, x_1)}{\partial x_1 \partial x_2} \right),$$

$$S\mathring{v}^n = \left(\lambda_{2n-1,\sigma}(x_1^2+x_2^2) \frac{\partial^2 p^{2n-1}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2};\ p^{2n-1}(x_1, x_2) + \lambda_{2n-1,\sigma}(x_1^2+x_2^2) \frac{\partial^2 p^{2n-1}(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \right).$$

I vettori $\{\mathring{v}^n + (-1)^{\beta+1} S\mathring{v}^n\}$ *per* $n = 1, 2, \dots$ *costituiscono un sistema completo in* $U^{00\beta}(A) \cap \Omega$.

Dim. È analoga a quella precedente.

Osservazione. È opportuno notare che il vettore $\mathring{u}^n + (-1)^{\beta+1} S\mathring{u}^n$ è il trasformato, mediante la (2.2), del vettore $B^n \equiv (p^{2n-1}(x_1, x_2); (-1)^{\beta+1} p^{2n-1}(x_2, x_1))$ e che $\operatorname{div} B^n = [1+(-1)^{n+\beta}] \dfrac{\partial p^{2n-1}}{\partial x_1}$.
Ne segue che:

$$\mathring{u}^n + (-1)^{\beta+1} S\mathring{u}^n = \begin{cases} B^n & \text{se } n = 1 \text{ oppure } n > 1 \text{ e } n+\beta \text{ dispari}, \\[2ex] B^n + 2\lambda_{2n-1,\sigma}(x_1^2+x_2^2) \operatorname{grad} \dfrac{\partial p^{2n-1}}{\partial x_1} & \text{se } n > 1 \text{ e } n+\beta \text{ pari}. \end{cases}$$

Analogamente, il vettore $\mathring{v}^n + (-1)^{\beta+1} S\mathring{v}^n$ è il trasformato, mediante (2.2), del vettore $C^n = (p^{2n-1}(x_2, x_1); (-1)^{\beta+1} p^{2n-1}(x_1, x_2))$ e si ha: $\operatorname{div} C^n = [1-(-1)^{n+\beta}] \dfrac{\partial p^{2n-1}(x_2, x_1)}{\partial x_1}$. Ne segue che:

$$\mathring{v}^n + (-1)^{\beta+1} S\mathring{v}^n \equiv \begin{cases} C^n & \text{se } n=1 \text{ oppure } n>1 \text{ e } n+\beta \text{ pari} \\ C^n + 2\lambda_{2n-1,\sigma}(x_1^2+x_2^2)\operatorname{grad} \dfrac{\partial p^{2n-1}(x_2, x_1)}{\partial x_1} & \text{se } n>1 \text{ e } n+\beta \text{ dispari.} \end{cases}$$

§ 3.

Limitazioni per gli autovalori in base al principio di minimo-massimo.

Sia Z uno qualsiasi dei sottospazi $W^{10}(A)$, $W^{01}(A)$, $W^{\alpha\alpha\beta}(A)$ $(\alpha, \beta = 0, 1)$. Fissato σ non negativo, si ponga $\mathrm{L}_\sigma w = \Delta_2 w + \sigma \operatorname{grad} \operatorname{div} w$ e si consideri il problema di autovalori

$$\mathrm{L}_\sigma w + \lambda w = 0 \text{ in } A, \qquad w = 0 \text{ su } \mathscr{F}A, \tag{3.1}$$

in $Z \cap H^1(A)$ (22). Siano $\{\lambda_i^\sigma\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ gli autovalori di (3.1) in $Z \cap H^1(A)$, disposti in ordine crescente e ciascuno ripetuto un numero di volte uguale alla sua molteplicità (in Z). Per ogni vettore $w \in Z \cap H^1(A)$, si consideri la forma quadratica:

$$B_\sigma(w, w) = \sum_{i=1}^{2} \int_A |\operatorname{grad} w_i|^2 \, dx + \sigma \int_A (\operatorname{div} w)^2 \, dx .$$

Dal principio di minimo-massimo per gli autovalori (23), essendo $B_\sigma(w, w) \geqslant B_0(w, w)$, segue $\lambda_i^\sigma \geqslant \lambda_i^0$, per ogni i. Si consideri inoltre, in

(22) Si dirà che $w_0 \in H^1(A)$ è soluzione di $\mathrm{L}_\sigma w + \lambda_0 w = 0$ in A, se $((w_0, v)) = \lambda_0(w_0, v)$ per ogni $v \in \mathscr{C}^1(A)$ e a supporto contenuto in A. Si dimostra che $w_0 \in \mathscr{C}^2(A)$ e verifica l'equazione $\mathrm{L}_\sigma w + \lambda_0 w = 0$ in A.

(23) Si confronti ad esempio [7], pag. 270.

$Z \cap H^1(A)$, il problema di autovalori

$$(3.2) \qquad \Delta_2 w_i + 2\sigma \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} + \lambda w_i = 0 \text{ in } A, \qquad w_i = 0 \text{ su } \mathscr{F}A, \qquad (i = 1, 2),$$

al quale corrisponde la seguente forma quadratica:

$$Q_\sigma(w, w) = (1 + 2\sigma) \int_A \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_i}\right)^2 dx + \int_A \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_1}\right)^2\right] dx .$$

Poichè si constata facilmente che $B_\sigma(w, w) \leqslant Q_\sigma(w, w)$, per il principio di minimo-massimo, detti $\{\mu_i^\sigma\}$ gli autovalori di (3.2) disposti in ordine crescente e ciascuno ripetuto un numero di volte pari alla sua molteplicità in Z, riesce, per ogni i, $\lambda_i^\sigma \leqslant \mu_i^\sigma$. I problemi (3.1) e (3.2), per $\sigma = 0$, si riducono al seguente:

$$(3.3) \qquad \Delta_2 w + \lambda w = 0 \text{ in } A , \qquad w = 0 \text{ su } \mathscr{F}A ,$$

i cui autovalori e i cui autovettori, in $Z \cap H^1(A)$, sono noti. Si ha precisamente che gli autovalori di (3.3) in $H^1(A)$ sono tutti i numeri $\{h^2 + k^2\}$ $(h, k = 1, 2, \dots)$ e gli autovettori relativi a $h^2 + k^2$ si ottengono tutti come combinazione lineare dei seguenti vettori

$$(3.4) \qquad \Phi^{rs} \equiv 2/\pi\,(\varphi_{rs}, 0), \qquad \Psi^{rs} = 2/\pi\,(0, \varphi_{rs}) ,$$

ove

$$\varphi_{rs} = \operatorname{sen} r(x_1 + \pi/2) \cdot \operatorname{sen} s(x_2 + \pi/2) ,$$

considerati per ogni coppia ordinata di interi positivi r, s tali che $r^2 + s^2 = h^2 + k^2$.

È noto che il sistema formato dai vettori (3.4) per $r, s = 1, 2, \dots$ è un sistema ortonormale e completo in $W(A)$.

Si consideri ora il problema (3.2) relativo ad un arbitrario σ positivo. Si verifica facilmente che ogni vettore Φ^{rs} (o Ψ^{rs}) è autovettore per il problema (3.2) relativo all'autovalore $r^2 + s^2 + 2\sigma r^2$ (ovvero $r^2 + s^2 + 2\sigma s^2$).

3.I. *I seguenti vettori:*

$$\Phi^{2h-1,2k-1} \qquad e \quad \Psi^{2h,2k} \qquad per\ h,\ k=1,\ 2,\ldots, \tag{3.5}$$

costituiscono un sistema completo in W^{10} (24). *I vettori*

$$\Phi^{2h,2k} \qquad e \quad \Psi^{2h-1,2k-1} \qquad per\ h,\ k=1,\ 2,\ldots, \tag{3.6}$$

costituiscono un sistema completo in W^{01}. *I vettori*

$$\Phi^{2h,2k-1} \qquad e \quad \Psi^{2k-1,2h} \qquad per\ h,\ k=1,\ 2,\ldots, \tag{3.7}$$

costituiscono un sistema completo in W^{11}. *Infine i vettori*

$$\Phi^{2k-1,2h} \qquad e \quad \Psi^{2h,2k-1} \qquad per\ h,\ k=1,\ 2,\ldots, \tag{3.8}$$

costituiscono un sistema completo in W^{00}.

Dim. È conseguenza delle identità

$$\varphi_{hk}(x_1\,,\,x_2)=(-1)^{h+1}\varphi_{hk}(-x_1\,,\,x_2)=(-1)^{k+1}\varphi_{hk}(x_1\,,\,-x_2)=(-1)^{h+k}\,\varphi_{hk}(-x_1\,,\,-x_2),$$

e della definizione degli spazi $W^{\alpha\beta}$ $(\alpha,\ \beta=0,\ 1)$.

3.II. *Riesce* $S\Phi^{rs}=\Psi^{sr}$, $S\Psi^{rs}=\Phi^{sr}$.

Dim. È conseguenza della identità $\varphi_{rs}(x_1\,,\ x_2)=\varphi_{sr}(x_2\,,\ x_1)$.

3.III. *I vettori:*

$$(\sqrt{2})^{-1}[\Phi^{2h,2k-1}+(-1)^{\beta+1}\,\Psi^{2k-1,2h}] \qquad (h,\ k=1,\ 2,\ \ldots) \tag{3.9}$$

costituiscono un sistema completo e ortonormale in $W^{11\beta}$ $(\beta=0,\ 1)$. *I vettori*

$$(\sqrt{2})^{-1}[\Phi^{2k-1,2h}+(-1)^{\beta+1}\,\Psi^{2h,2k-1}] \qquad (h,\ k=1,\ 2,\ \ldots) \tag{3.10}$$

costituiscono un sistema completo e ortonormale in $W^{00\beta}$ $(\beta=0,\ 1)$.

---

(24) D'ora in poi porrò $W^{\alpha\beta}=W^{\alpha\beta}(A)$, $W^{\alpha\alpha\beta}=W^{\alpha\alpha\beta}(A)$.

Dim. In base a 3.II, i vettori (3.9) appartengono a $W^{11\beta}$ e quelli (3.10) appartengono a $W^{00\beta}$. La tesi discende allora da 3.I. e 1.XIII.

Dal teorema 3.I discende il seguente:

3.IV. *Fissati arbitrariamente due interi positivi r, s della stessa parità, r^2+s^2 e $r^2+s^2+2\sigma r^2$ sono autovalori, dei problemi* (3.3) *e* (3.2) *rispettivamente, in $W^{10}\cap H^1(A)$ (e anche in $W^{01}\cap H^1(A)$).*

Dal teorema 3.III discendono:

3.V. *Fissati arbitrariamente due interi positivi h, k, i numeri $4h^2+(2k-1)^2$ e $4h^2(1+2\sigma)+(2k-1)^2$ sono autovalori, dei problemi* (3.3) *e* (3.2) *rispettivamente, in $W^{11\beta}\cap H^1(A)$ $(\beta=0,1)$.*

3.VI. *Fissati arbitrariamente due interi positivi h, k, i numeri $(2h-1)^2+4k^2$ e $4k^2+(1+2\sigma)(2h-1)^2$ sono autovalori, dei problemi* (3.3) *e* (3.2) *rispettivamente, in $W^{00\beta}\cap H^1(A)$ $(\beta=0,\ 1)$.*

I risultati ora ottenuti sono riassunti nella seguente Tabella:

Sottospazio invariante	Sistema di autovettori	Autovalori di (3.3)	Autovalori di (3.2)
W^{10}	$\begin{cases}(\varphi_{2m-1,\,2n-1},\ 0)\\(0,\ \varphi_{2n,\,2m})\end{cases}$	$\begin{cases}(2m-1)^2+(2n-1)^2\\4m^2+4n^2\end{cases}$	$\begin{cases}(1+2\sigma)(2m-1)^2+(2n-1)^2\\4m^2(1+2\sigma)+4n^2\end{cases}$
W^{01}	$\begin{cases}(0,\ \varphi_{2n-1,\,2m-1})\\(\varphi_{2m,\,2n},\ 0)\end{cases}$	$\begin{cases}(2m-1)^2+(2n-1)^2\\4m^2+4n^2\end{cases}$	$\begin{cases}(1+2\sigma)(2m-1)^2+(2n-1)^2\\4m^2(1+2\sigma)+4n^2\end{cases}$
W^{111}	$(\varphi_{2m,\,2n-1},\ \varphi_{2n-1,\,2m})$	$4m^2+(2n-1)^2$	$4m^2(1+2\sigma)+(2n-1)^2$
W^{110}	$(\varphi_{2m,\,2n-1},\ -\varphi_{2n-1,\,2m})$	$4m^2+(2n-1)^2$	$4m^2(1+2\sigma)+(2n-1)^2$
W^{001}	$(\varphi_{2n-1,\,2m},\ \varphi_{2m,\,2n-1})$	$4m^2+(2n-1)^2$	$4m^2+(1+2\sigma)(2n-1)^2$
W^{000}	$(\varphi_{2n-1,\,2m},\ -\varphi_{2m,\,2n-1})$	$4m^2+(2n-1)^2$	$4m^2+(1+2\sigma)(2n-1)^2$

§ 4.

Approssimazioni per eccesso degli autovalori.

Sia Z uno qualsiasi dei sottospazi $W^{10}(A)$, $W^{01}(A)$, $W^{\alpha\alpha\beta}(A)$ $(\alpha,\ \beta=0,\ 1)$ e $\{v^l\}$ un sistema di vettori reali, linearmente indipendenti, appartenenti a $H^2(A)$ e nulli su $\mathscr{F}A$, completo in Z.

È noto che, per ogni fissato intero positivo n, le radici dell'equazione algebrica in λ:

$$\det\big((Lv^j,\, v^l) + \lambda(v^j,\, v^l)\big) = 0\,, \qquad (j,\ l = 1,\ 2, \ldots,\ n) \tag{4.1}$$

disposte in ordine crescente e ciascuna ripetuta un numero di volte pari alla sua molteplicità, sono approssimazioni per eccesso dei primi n autovalori del problema (3.1), nello spazio $Z \cap H^1(A)$.

Si supponga dapprima che Z sia uno degli spazi $W^{11\beta}$ ($\beta = 0, 1$) e come sistema $\{v^l\}$ si scelga quello dato da (3.9).

Siano h, r, k, s interi positivi arbitrari. Si ponga:

$$q_{hk,rs} = \begin{cases} \dfrac{16hkrs}{\pi^2\,(r^2 - k^2)(s^2 - h^2)} & \text{se} \quad r \neq k,\ s \neq h \\[2ex] 0 & \text{se} \quad r = k \ \text{ oppure } s = h, \end{cases} \tag{4.2}$$

$$X^{hk} = (\sqrt{2})^{-1}[\Phi^{hk} + (-1)^{\beta+1}\,\Psi^{kh}]\ (^{25})\,.$$

Siano h, r arbitrari interi positivi pari; k, s arbitrari interi positivi dispari. Si ha:

$$(\mathrm{L}X^{hk},\ X^{rs}) = -\,(h^2 + k^2 + \sigma h^2)\delta^h_r\,\delta^k_s + (-1)^{\beta+1}\,\sigma\, q_{hk,rs}\,,$$

$$(X^{hk},\quad X^{rs}) = \delta^h_r\,\delta^k_s\,,$$

ove $\delta^h_r = 0$ se $h \neq r$, $\delta^h_r = 1$ se $h = r$.

Fissati arbitrariamente n interi positivi pari $h_1, \ldots, h_n$ e n interi positivi dispari $k_1, \ldots, k_n$ restano determinati n vettori $X^{h_ik_i}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) del sistema $\{v^l\}$. In corrispondenza ad essi si consideri l'equazione (4.1), cioè:

$$\det\big(\lambda - (h_i^2 + k_i^2 + \sigma h_i^2)\,\delta^i_j + (-1)^{\beta+1}\,\sigma\, q_{h_ik_i,h_jk_j}\big) = 0 \quad (i,\ j = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.3}$$

Le n radici di (4.3), disposte in ordine crescente, dànno le approssimazioni per eccesso dei primi n autovalori di (3.1) in $W^{11\beta}$.

Sia Z uno dei due spazi $W^{00\beta}$ e si fissi come sistema $\{v^l\}$ quello dato da (3.10).

---

(25) Se h è pari e k è dispari $X^{hk} \in W^{11\beta}$ ed inoltre $X^{kh} \in W^{00\beta}$.

Riesce, mantenendo le notazioni precedenti:

$$(\mathrm{L}X^{kh},\ X^{sr}) = -(h^2 + k^2 + \sigma k^2)\delta^h_r\,\delta^k_s + (-1)^{\beta+1}\,\sigma\, q_{hk,rs}\,,$$

$$(X^{kh},\quad X^{sr}) = \delta^h_r\,\delta^k_s\,.$$

Pertanto, si considera l'equazione (4.1) corrispondente alla scelta degli n vettori $X^{k_ih_i}$ $(i = 1,\ 2, \dots,\ n)$, cioè

$$\text{(4.4)}\quad \det\big(\lambda - (h_i^2 + k_i^2 + \sigma\, k_i^2)\delta^i_j + (-1)^{\beta+1}\,\sigma\, q_{h_ik_i,h_jk_j}\big) = 0 \quad (i,\ j = 1,\ 2, \dots,\ n).$$

Le n radici di (4.4), disposte in ordine crescente, dànno le approssimazioni per eccesso dei primi n autovalori di (3.1) in $W^{00\beta}$.

Si consideri ora lo spazio W^{10} (26). Si consideri il sistema completo (3.5) e si fissino arbitrariamente in esso p vettori $\Phi^{h_1k_1}$, $\Phi^{h_2k_2}, \dots,$ $\Phi^{h_pk_p}$ e q vettori $\Psi^{r_1s_1}$, $\Psi^{r_2s_2}, \dots,$ $\Psi^{r_qs_q}$ (27).

Si ha:

$$(\Phi^{h_ik_i},\ \Phi^{h_lk_l}) = \delta^l_i\,, \qquad (\Phi^{h_ik_i},\ \Psi^{r_js_j}) = 0\,, \qquad (\Psi^{r_js_j},\ \Psi^{r_ms_m}) = \delta^j_m\,,$$

$$(\mathrm{L}\Phi^{h_ik_i},\ \Phi^{h_lk_l}) = -[(1+\sigma)h_i^2 + k_i^2]\delta^l_i\,,$$

$$(\mathrm{L}\Psi^{r_js_j},\ \Psi^{r_ms_m}) = -[r_j^2 + (1+\sigma)\, s_j^2]\delta^m_j\,,$$

$$(\mathrm{L}\Phi^{h_ik_i},\ \Psi^{r_js_j}) = (L\Psi^{r_js_j},\ \Phi^{h_ik_i}) = \sigma\, q_{k_ih_i,r_js_j}\,.$$

Indico con D' e D'' le seguenti matrici diagonali quadrate, di ordini rispettivamente p e q:

$$D' \equiv \big(\delta^l_i(\lambda - h_i - k_i - \sigma h_i)\big) \qquad (i,\ l = 1,\ 2, \dots\ p)\,,$$

$$D'' \equiv \big(\delta^m_j(\lambda - r_j - s_j - \sigma s_j)\big) \qquad (j,\ m = 1,\ 2, \dots,\ q)\,,$$

indico inoltre con B la matrice a p righe e q colonne così definita:

$$B \equiv \big(\sigma\, q_{k_ih_i,r_js_j}\big) \qquad (i = 1,\ 2, \dots,\ p;\ j = 1,\ 2, \dots,\ q),$$

e con B^* la matrice trasposta di B.

---

(26) Il problema (3.1) ammette gli stessi autovalori in W^{10} e in W^{01} (cfr. 1.XVIII).

(27) Gli indici h_i, k_i, $(i = 1, 2, \dots, p)$ sono interi positivi dispari, r_j, s_j, $(j = 1, 2, \dots, q)$ sono interi positivi pari.

Nello spazio W^{10} le radici dell'equazione

$$\det \begin{pmatrix} D_1 & B \\ B^* & D_2 \end{pmatrix} = 0 , \tag{4.5}$$

disposte in ordine crescente, sono approssimazioni per eccesso dei primi $p+q$ autovalori di (3.1).

§ 5.

Approssimazione per difetto degli autovalori.

Siano A e Q i quadrati definiti rispettivamente dalle limitazioni $|x_i| < \pi/2$, $|x_i| < \pi$, $(i = 1, 2)$; siano inoltre $W(A)$ e $W(Q)$ gli spazi di HILBERT dei vettori a due componenti reali di quadrato sommabile in A e Q rispettivamente. Per ogni $u \in W(Q)$ si consideri lo sviluppo in serie trigonometrica:

$$u(x_1, x_2) = \lambda_{00}\, a^{00} + \sum_{m,n}^{0,\infty}{}^{(0)} \lambda_{mn} [a^{mn} \cos mx_1 \cdot \cos nx_2 + \tag{5.1}$$

$$+ b^{mn} \operatorname{sen} mx_1 \cdot \operatorname{sen} nx_2 + c^{mn} \cos mx_1 \cdot \operatorname{sen} nx_2 + d^{mn} \operatorname{sen} mx_1 \cdot \cos nx_2] \text{ [28]} ,$$

ove $\lambda_{00} = (2\pi)^{-1}$; $\lambda_{m0} = \lambda_{0n} = (\sqrt{2}\pi)^{-1}$ e $\lambda_{mn} = (\pi)^{-1}$ se $m, n \geqslant 1$; inoltre i vettori $a^{mn} \equiv (a_1^{mn}, a_2^{mn})$ sono definiti da:

$$a^{mn} = \lambda_{mn} \int_Q u(x_1, x_2) \cos mx_1 \cdot \cos nx_2 \, dx_1 \, dx_2 \qquad (m, n \geqslant 0) ,$$

e i vettori b^{mn}, c^{mn}, d^{mn} sono definiti in modo analogo.

Sia R la trasformazione lineare, così definita per ogni $u \in W(Q)$:

$$\begin{aligned} Ru = \frac{1}{2\pi} w^0 + \sum_{m,n}^{0,\infty}{}^{(0)} \lambda_{mn} [A^{mn} \cos mx_1 \cdot \cos nx_2 + \\ + B^{mn} \operatorname{sen} mx_1 \cdot \operatorname{sen} nx_2 + C^{mn} \cos mx_1 \cdot \operatorname{sen} nx_2 + D^{mn} \operatorname{sen} mx_1 \cdot \cos nx_2] , \end{aligned} \tag{5.2}$$

---

[28] Con $\sum\limits_{m,n}^{0,\infty}{}^{(0)}$ si intende la somma estesa a tutte le coppie di interi non negativi, esclusa la coppia (0, 0).

ove $w^0 = \frac{1}{2}\,(x_2^2\, a_1^{00}\,,\; x_1^2\, a_2^{00})$ e i vettori A^{mn}, B^{mn}, C^{mn}, D^{mn}, $(m, n \geqslant 0;\; m^2 + n^2 > 0)$ sono espressi dalle relazioni seguenti

$$
\begin{aligned}
A_1^{mn} &= -\,\Delta_{mn}[a_1^{mn}(m^2 + n^2 + \sigma n^2) + b_2^{mn}\,\sigma\, mn],\\
A_2^{mn} &= -\,\Delta_{mn}[a_2^{mn}(m^2 + n^2 + \sigma m^2) + b_1^{mn}\,\sigma\, mn],\\
B_1^{mn} &= -\,\Delta_{mn}[b_1^{mn}(m^2 + n^2 + \sigma n^2) + a_2^{mn}\,\sigma\, mn],\\
B_2^{mn} &= -\,\Delta_{mn}[b_2^{mn}(m^2 + n^2 + \sigma m^2) + a_1^{mn}\,\sigma\, mn],\\
C_1^{mn} &= -\,\Delta_{mn}[c_1^{mn}(m^2 + n^2 + \sigma n^2) - d_2^{mn}\,\sigma\, mn],\\
C_2^{mn} &= -\,\Delta_{mn}[c_2^{mn}(m^2 + n^2 + \sigma m^2) - d_1^{mn}\,\sigma\, mn],\\
D_1^{mn} &= -\,\Delta_{mn}[d_1^{mn}(m^2 + n^2 + \sigma n^2) - c_2^{mn}\,\sigma\, mn],\\
D_2^{mn} &= -\,\Delta_{mn}[d_2^{mn}(m^2 + n^2 + \sigma m^2) - c_1^{mn}\,\sigma\, mn],
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

dove $\chi\Delta_{mn} = (1 + \sigma)^{-1}\,(m^2 + n^2)^{-2}$.

Sussiste il seguente teorema:

5.I. *La* (5.2) *definisce una trasformazione lineare* R *di* $W(Q)$ *in* $H^2(Q)$. *Per ogni* $u \in W(Q)$ *riesce* $\mathrm{L}Ru = u$.

Dim. Si ha, per ogni coppia di interi non negativi m, n tali che $m^2 + n^2 > 0$,

$$
|A^{mn}|^2 \leqslant \frac{|a^{mn}|^2 + |b^{mn}|^2}{(m^2 + n^2)^2}\,, \qquad |B^{mn}|^2 \leqslant \frac{|a^{mn}|^2 + |b^{mn}|^2}{(m^2 + n^2)^2}\,,
\tag{5.4}
$$

$$
|C^{mn}|^2 \leqslant \frac{|c^{mn}|^2 + |d^{mn}|^2}{(m^2 + n^2)^2}\,, \qquad |D^{mn}|^2 \leqslant \frac{|c^{mn}|^2 + |d^{mn}|^2}{(m^2 + n^2)^2}\,.
\tag{5.5}
$$

In base alle (5.4), (5.5), la serie a secondo membro di (5.2) e tutte le serie derivate fino all'ordine due, convergono in $W(Q)$. Si ha inoltre $\mathrm{L}w^0 = a^{00}$,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{L}[A^{mn}\cos mx_1\cdot\cos nx_2 + B^{mn}\,\mathrm{sen}\, mx_1\cdot\mathrm{sen}\, nx_2 + C^{mn}\cos mx_1\cdot\mathrm{sen}\, nx_2 +\\
&+ D^{mn}\,\mathrm{sen}\, mx_1\cdot\cos nx_2] = a^{mn}\cos mx_1\cdot\cos nx_2 + b^{mn}\,\mathrm{sen}\, mx_1\cdot\mathrm{sen}\, nx_2 +\\
&\qquad + c^{mn}\cos mx_1\cdot\mathrm{sen}\, nx_2 + d^{mn}\,\mathrm{sen}\, mx_1\cdot\cos nx_2\,.
\end{aligned}
$$

Ciò prova l'asserto.

Sia w un arbitrario vettore di $W(A)$; w può svilupparsi in serie di FOURIER rispetto al sistema, completo e ortonormale in $W(A)$, $\{\Phi^{rs}\}$ e $\{\Psi^{rs}\}$, introdotto al § 3. Si ha allora:

$$
w = \sum_{r,s}^{1,\infty}(\alpha_1^{rs}\,\Phi^{rs} + \alpha_2^{rs}\,\Psi^{rs}) = \frac{2}{\pi}\sum_{r,s}^{1,\infty}\alpha^{rs}\,\varphi_{rs}(x_1\,,\, x_2)\,,
\tag{5.6}
$$

ove il vettore $\alpha^{rs} \equiv (\alpha_1^{rs}, \alpha_2^{rs})$ è definito da

$$(5.7) \qquad \alpha^{rs} = \frac{2}{\pi} \int_A w(x_1, x_2)\, \varphi_{rs}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 .$$

Si verifica facilmente che la serie che figura nel terzo membro di (5.6) è una particolare serie trigonometrica e pertanto essa converge in $W(Q)$ e definisce in Q un vettore $\tilde{w}$ coincidente con w in A.

Si pensi allora la trasformazione R definita dalla (5.2), come una trasformazione lineare di $W(A)$ in $\mathscr{H}(A)$ nel modo seguente. Per ogni vettore $w \in W(A)$, si consideri lo sviluppo (5.6) e il vettore $\tilde{w}$ definito in Q dalla serie a terzo membro di (5.6). Si ponga:

$$(5.8) \qquad Rw = R\tilde{w} .$$

Il vettore Rw appartiene a $H^2(Q)$ e quindi determina un elemento di $\mathscr{H}(A)$. In particolare si ottiene, posto $\psi_{rs}(x_1, x_2) = \cos r(x_1 + \pi/2)\cdot\cos s(x_2 + \pi/2)$:

$$(5.9) \qquad R\Phi^{rs} = -\frac{2}{\pi} \Delta_{rs}\big((r^2 + s^2 + \sigma s^2)\, \varphi_{rs}(x_1, x_2);\ \sigma rs\ \psi_{rs}(x_1, x_2)\big),$$

$$(5.10) \qquad R\Psi^{rs} = SR\Phi^{sr} = -\frac{2}{\pi} \Delta_{rs}\big(\sigma rs\ \psi_{rs}(x_1, x_2);\ (r^2 + s^2 + \sigma r^2)\, \varphi_{rs}(x_1, x_2)\big) .$$

5.II. *La trasformazione lineare R è una trasformazione compatta di $W(A)$ in $\mathscr{H}(A)$.*

Dim. Considero lo spazio di Hilbert $\tilde{H}^m(A)$ dei vettori a due componenti funzioni di quadrato sommabile in A, dotate di tutte le derivate forti fino all'ordine m di quadrato sommabile in A, con prodotto scalare così definito:

$$(u, v)_m = \sum_{l_1 + l_2 \leq m}^{l_j = 0,\dots, m} \int_A \frac{\partial^{l_1 + l_2} u}{\partial x_1^{l_1}\, \partial x_2^{l_2}} \frac{\partial^{l_1 + l_2} v}{\partial x_1^{l_1}\, \partial x_2^{l_2}}\, dx \ (^{29}).$$

Dalle (5.4) e (5.5) discende facilmente che R è una trasformazione continua di $W(A)$ in $\tilde{H}^2(A)$ (30). Per il teorema di immersione di Rellich (31), R è una trasformazione compatta di $W(A)$ in $\tilde{H}^1(A)$. D'altra parte, per ogni elemento u di $\mathscr{H}(A)$ riesce $((u, u)) \leq (1 + 2\sigma)(u, u)_1$. Ne segue allora che R è una trasformazione compatta di $W(A)$ in $\mathscr{H}(A)$.

5.III. *Se $w \in W^{\alpha\beta}(A)$ allora $Rw \in U^{\alpha\beta}(A)$.*

Dim. Sia $w \in W^{10}(A)$. Si consideri lo sviluppo in serie (5.6); si ottiene così una particolare serie trigonometrica del tipo (5.1), convergente in $W(Q)$,

(29) Per $m = 0$ si ha $\tilde{H}^0(A) = W(A)$ (§ 1).

(30) Risulta infatti:

$$(Ru, Ru)_2 = (Ru, Ru)_0 + \sum_i^{1,2} \left(\frac{\partial Ru}{\partial x_i}, \frac{\partial Ru}{\partial x_i}\right)_0 + \sum_{i,j}^{1,2} \left(\frac{\partial^2 Ru}{\partial x_i\, \partial x_j}, \frac{\partial^2 Ru}{\partial x_i\, \partial x_j}\right)_0 ,$$

onde esiste una costante positiva M tale che $(Ru, Ru)_2 \leq M(u, u)_0$.

(31) Si confronti ad es. [5], teorema 3.IV, p. 21.

nella quale i vettori c^{mn} e d^{mn} sono nulli per ogni scelta di m, n ed inoltre $a_2^{mn} = b_1^{mn} = 0$ per ogni m, n. Dalle (5.3) segue allora che il vettore Rw ha le componenti:

$$R_1\, w = \frac{1}{4\pi}\, x_2^2\, a_1^{00} + \sum_{m,n}^{0,\infty}{}^{(0)} \lambda_{mn}\, A_1^{mn} \cos mx_1 \cdot \cos nx_2\,,$$

$$R_2\, w = \sum_{m,n}^{1,\infty} \lambda_{mn} B_2^{mn} \operatorname{sen} mx_1 \cdot \operatorname{sen} nx_2\,.$$

Ciò prova che $Rw \in U^{10}(A)$. Analogamente negli altri casi.

5.IV. *Per ogni* $u \in W(Q)$, *riesce* $RSu = SRu$.

Dim. Sia $u \in W(Q)$. È facile verificare che, dette a^{mn}, b^{mn}, c^{mn}, d^{mn} le coordinate di FOURIER di u nello sviluppo (5.1), Sa^{nm}, Sb^{nm}, Sd^{nm}, Sc^{nm} sono le coordinate di FOURIER di Su nello sviluppo (5.1). Ne segue

$$\begin{aligned} RSu = \frac{1}{2\pi}\, S\, w^0 + \sum_{m,n}^{0,\infty}{}^{(0)} \lambda_{mn} [SA^{nm} \cos mx_1 \cdot \cos nx_2 + SB^{nm} \operatorname{sen} mx_1 \cdot \operatorname{sen} nx_2 + \\ + SD^{nm} \cos m\, x_1 \cdot \operatorname{sen} nx_2 + SC^{nm} \operatorname{sen} mx_1 \cdot \cos nx_2] = SRu\,. \end{aligned}$$

Sia R^* la trasformazione aggiunta di R definita da:

$$((Ru,\ v))_A = (u,\ R^*\, v)_A\,, \tag{5.11}$$

per ogni $u \in W(A)$, $v \in \mathscr{H}(A)$.

Si ottiene allora immediatamente una rappresentazione di $R^*\, v$ in serie di FOURIER rispetto al sistema Φ^{rs}, Ψ^{rs}. Dalla (5.11) segue infatti ([32]):

$$(R^*v,\ \Phi^{rs}) = ((v,\ R\Phi^{rs}))\,, \qquad (R^*v,\ \Psi^{rs}) = ((v,\ R\Psi^{rs}))\,,$$

e quindi R^*v, in $W(A)$, ammette la seguente rappresentazione:

$$R^*v = \sum_{r,s}^{1,\infty} ((v,\ R\Phi^{rs}))\Phi^{rs} + ((v,\ R\Psi^{rs}))\Psi^{rs}\,. \tag{5.12}$$

([32]) Indicherò d'ora in poi brevemente con $(u,\ v)$ il prodotto scalare in $W(A)$ e con $((u,\ v))$ il prodotto scalare in $\mathscr{H}(A)$.

5.V. *Se* $v \in U^{\alpha\beta}(A)$, *allora* $R^* v \in W^{\alpha\beta}(A)$ $(\alpha, \beta = 0, 1)$.

Dim. Sia α', β' una coppia ordinata di indici 0, 1, distinta da α, β. Riesce, per ogni $u \in W(A)$, tenendo presente i teoremi 5.III, 1.XVI,

$$(R^* v, P^{\alpha'\beta'} u) = ((v, RP^{\alpha'\beta'} u)) = 0 .$$

5.VI. *Per ogni* $v \in \mathscr{H}(A)$, $R^* S v = S R^* v$.

Dim. Dai teoremi 5.IV, 1.XI e 1.XIV seguono facilmente le seguenti relazioni, per ogni $v \in \mathscr{H}(A)$ e $u \in W(A)$:

$$(R^* S v, u) = ((Sv, Ru)) = ((v, SRu)) = ((v, RSu)) = (R^* v, Su) = (SR^* v, u) .$$

Ciò prova l'asserto.

Si consideri la matrice fondamentale di SOMIGLIANA $F(x, y)$ i cui elementi $F_{ij}(x, y)$ sono così definiti:

$$F_{ij}(x, y) = \frac{-\sigma}{8\pi(1+\sigma)} \frac{\partial^2 (|x-y|^2 \log |x-y|)}{\partial x_i \, \partial x_j} + \frac{\delta_j^i}{2\pi} \log |x-y| \quad (i, j = 1, 2) \tag{5.13}$$

e si ponga, per ogni $u \in W(Q)$:

$$\tilde{R} u = \int_A F(x, y) \, u(y) \, dy . \tag{5.14}$$

Il vettore $\tilde{R}u$ appartiene a $H^2(Q)$ e verifica l'equazione $L\tilde{R}u = u$, in A. Sia $\{B_n\}$ una successione di campi limitati e connessi, aventi ciascuno per frontiera una curva regolare semplice chiusa di classe 2, verificanti le seguenti condizioni

$$\overline{A} \subset B_n \subset B_{n+1} \subset Q , \qquad \lim_{n \to \infty} \operatorname{mis}(B_n - A) = 0 .$$

Si ponga, per ogni $u \in W(Q)$,

$$\tilde{R}^{(n)} u = \int_{B_n} F(x, y) \, u(y) \, dy . \tag{5.15}$$

Il vettore $\tilde{R}^{(n)} u$ appartiene ad $H^2(Q)$ e verifica l'equazione $L \tilde{R}^{(n)} u = u$, in B_n.

Le trasformazioni $\tilde{R}$ e $\tilde{R}^{(n)}$ possano essere riguardate come trasformazioni lineari e continue di $W(Q)$ in $\mathscr{H}(A)$. Sussiste il seguente teorema:

5.VII. *Per ogni* $u \in W(Q)$ *riesce*:

(5.16)
$$\lim_{n\to\infty} ||| \tilde{R}^{(n)}u - \tilde{R}u |||_A = 0 .$$

Dim. Sarà sufficiente mostrare che:

(5.17)
$$\lim_{n\to\infty} \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{R}_i^{(n)}u - \tilde{R}_i u)\right]^2 \mathrm{d}x = 0 \qquad (i,\ j = 1,\ 2).$$

Si ha infatti, per ogni n:

$$\int_A \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{R}_i^{(n)}u - \tilde{R}_i u)\right]^2 \mathrm{d}x = \int_A \mathrm{d}x \left\{\int_{B_n - A} \sum_{l=1}^{2} \frac{\partial F_{il}(x,\ y)}{\partial x_j} u_l(y)\ \mathrm{d}y\right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_A \mathrm{d}x \left\{\int_{B_n - A} \sum_{l=1}^{2} |u_l(y)| \left|\frac{\partial F_{il}(x,\ y)}{\partial x_j}\right| \mathrm{d}y\right\}^2 \leqslant 2 \sum_{l=1}^{2} \int_A \mathrm{d}x \left\{\int_{B_n - A} |u_l(y)| \left|\frac{\partial F_{il}(x,\ y)}{\partial x_j}\right| \mathrm{d}y\right\}^2.$$

È noto che esiste una costante positiva k tale che $\left|\frac{\partial F_{il}(x,\ y)}{\partial x_j}\right| < \frac{k}{|x - y|}$; pertanto:

$$\int_A \mathrm{d}x \left\{\int_{B_n - A} |u_l(y)| \left|\frac{\partial F_{il}(x,\ y)}{\partial x_j}\right| \mathrm{d}y\right\}^2 \leqslant k^2 \int_A \mathrm{d}x \int_{B_n - A} \frac{|u_l(y)|}{|x - y|} \mathrm{d}y \int_{B_n - A} \frac{|u_l(z)|}{|x - z|} \mathrm{d}z =$$

$$= k^2 \int_{B_n - A} |u_l(y)|\ \mathrm{d}y \int_{B_n - A} |u_l(z)|\ \mathrm{d}z \int_A \frac{1}{|x - y|} \frac{1}{|x - z|} \mathrm{d}x .$$

D'altra parte esiste una costante positiva M tale che

$$\int_A \frac{1}{|x - y|} \frac{1}{|x - z|} \mathrm{d}x \leqslant M \log \frac{M}{|y - z|}\ \text{(33)},$$

e quindi la funzione di y e z:

$$|u_l(y)|\, |u_l(z)| \int_A \frac{1}{|x - y|} \frac{1}{|x - z|} \mathrm{d}x ,$$

è sommabile in $(B_n - A) \times (B_n - A)$. Seguono le (5.17) e quindi la tesi.

(33) Si confronti [8], pag. 807.

Sia B un arbitrario campo limitato e semplicemente connesso contenente $\overline{A}$ e tale che $\mathscr{F}B$ sia una curva regolare di classe 2. Si consideri la varietà lineare Ω chiusura in $\mathscr{H}(A)$ della varietà lineare di tutti i vettori appartenenti a qualche Ω_B [34].

5.VIII. *Se* $v \in H^1(A) \cap H^2(A')$ *per ogni* A' *tale che* $\overline{A}' \subset A$ *e se riesce:*

$$((v, \omega)) = 0 \ \textit{per ogni} \ \omega \in \Omega \, , \tag{5.18}$$

allora $R^*v \in H^1(A) \cap H^2(A')$ *e*

$$\mathrm{L}R^*v = -\mathrm{L}v \, , \qquad \textit{in } A \, . \tag{5.19}$$

5.IX. *Se* $v \in H^1(A)$ *e verifica le* (5.18), *allora* $R^*v \in H^1(A)$ *e riesce*

$$R^* v = 0 \quad \textit{su } \mathscr{F}A, \textit{ nel senso delle funzioni di } H^1(A). \tag{5.20}$$

Dim. di 5.VIII e 5.IX.

Si consideri la trasformazione lineare $\tilde{R}$ definita da (5.14) come una trasformazione lineare e continua di $W(A)$ in $\mathscr{H}(A)$ e sia $\tilde{R}^*$ la sua aggiunta, definita da

$$((\tilde{R}u, v)) = (u, \tilde{R}^* v) \, , \tag{5.21}$$

per ogni $u \in W(A)$ e $v \in \mathscr{H}(A)$.

È noto che l'operatore $\tilde{R}^*$ gode delle seguenti proprietà:

1) Se B è un qualsiasi insieme aperto e limitato del piano, $\tilde{R}^*v \in H^1(B)$,

2) se $v \in H^1(A) \cap H^2(A')$ per ogni A' tale che $\overline{A}' \subset A$, $\mathrm{L}\tilde{R}^* v = -\mathrm{L}v$ in A,

3) se $((v, \omega)) = 0$ per ogni $\omega \in \Omega$, allora $\tilde{R}^* v$ è nullo sulla frontiera di A nel senso dei vettori di $H^1(A)$ [35].

---

[34] Con Ω_B si indica la varietà lineare delle soluzioni di $\mathrm{L}\omega = 0$ appartenenti a $H^1(B)$; si confronti il § 2.

[35] Infatti $\tilde{R}^* v$ è una funzione analitica in $Q - \overline{A}$ e, nelle ipotesi ammesse, è identicamente nulla in $Q - \overline{A}$, come si prova facilmente considerando vettori di Ω della forma $\int_{Q-\overline{A}} F(x, y)\, \varphi(y)\, dy$, con $\varphi(y)$ funzione di $\mathscr{L}^2(Q - \overline{A})$, a supporto contenuto in $Q - \overline{A}$.

Sia ora R la trasformazione lineare e continua definita in $W(A)$ dalla (5.8) e R^* la sua aggiunta definita dalle (5.11). Dalle (5.11) e (5.21) seguono, per ogni $u \in W(A)$ e $v \in \mathscr{H}(A)$:

$$((Ru - \tilde{R}u,\ v)) = (u,\ R^* v - \tilde{R}^* v)\,. \tag{5.22}$$

Si ponga $\omega_u = Ru - \tilde{R}u$. Riesce $\mathrm{L}\omega_u = 0$ in A. Inoltre, detto $\tilde{u}$ il prolungamento di u a Q tramite le (5.6), in base al teorema 5.VII, si ha, nella metrica di $\mathscr{H}(A)$, $\omega_u = \lim\limits_{n\to\infty} (R\tilde{u} - \tilde{R}^{(n)}\tilde{u})$.

Essendo $\mathrm{L}R\tilde{u} = \mathrm{L}\tilde{R}^{(n)}\tilde{u} = \tilde{u}$ in B_n, ne segue che $\omega_u \in \Omega$.

Sia v un vettore verificante le (5.18); dalle (5.22) segue $(u,\ R^* v - \tilde{R}^* v) = 0$, per ogni $u \in W(A)$ e quindi $\tilde{R}^* v = R^* v$. Ciò prova l'asserto.

Dai teoremi **5**.VIII e **5**.IX segue immediatamente il seguente:

5.X. *Per ogni* $f \in W(A)$, *il vettore*

$$Gf = R^*Rf - R^*PRf\,, \tag{5.23}$$

ove P indica il proiettore di $\mathscr{H}(A)$ su Ω, è soluzione del problema di D i r i c h l e t

$$\mathrm{L}u = -f \quad \text{in } A, \qquad u = 0 \text{ su } \mathscr{F}A\,, \tag{5.24}$$

la condizione sulla frontiera essendo verificata nel senso delle funzioni di $H^1(A)$.

Sia Z uno qualsiasi dei sottospazi invarianti per l'operatore L: W^{10}, W^{01}, $W^{\alpha\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 0, 1)$ e $\{v^{hk}\}$ $(h, k = 1, 2, \ldots)$ un sistema ortonormale e completo in esso [nella norma di $W(A)$].

Sia inoltre $\{\omega^p\}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ un sistema completo, nella norma di $\mathscr{H}(A)$, in $Z \cap \Omega$ (36). Introdotti il proiettore $P^{(Z)}$ di $\mathscr{H}(A)$ su $Z \cap \Omega$ e quello $P^{(Z)}_\varrho$ di $\mathscr{H}(A)$ sulla varietà lineare determinata da $\omega^1, \ldots, \omega^\varrho$, si considerino gli operatori $G^{(Z)}$ e $G^{(Z)}_\varrho$ così definiti in Z:

$$G^{(Z)} u = R^* Ru - R^* P^{(Z)} Ru\,, \tag{5.25}$$

$$G^{(Z)}_\varrho u = R^* Ru - R^* P^{(Z)}_\varrho Ru\,. \tag{5.26}$$

Dai teoremi 5.III, 5.IV, 5.V, 5.VI, discende subito che $G^{(Z)}$ e $G^{(Z)}_\varrho$ sono trasformazioni lineari e continue di Z in Z. Inoltre $G^{(Z)}u$ è la restrizione a Z

(36) Uso qui la stessa lettera Z per indicare un sottospazio di $W(A)$ e il sottospazio analogo in $\mathscr{H}(A)$, ad esempio W^{10} e U^{10}.

dell'operatore definito dalla (5.23) e $G_\varrho^{(Z)}$ è un operatore tale che $G_\varrho^{(Z)} \geqslant G^{(Z)}$ per ogni ϱ. Si ha infatti per ogni $u \in Z$:

$$\big((G_\varrho^{(Z)} - G^{(Z)})\, u,\; u\big) = \big(R^*\,(P^{(Z)} - P_\varrho^{(Z)})\, Ru,\; u\big) =$$
$$= \big(((P^{(Z)} - P_\varrho^{(Z)})\, Ru,\; Ru)\big) = |||\,(P^{(Z)} - P_\varrho^{(Z)})\, Ru\,|||^2 \geqslant 0\,.$$

Gli operatori $G^{(Z)}$ e $G_\varrho^{(Z)}$ sono operatori compatti positivi di Z in Z ad essi può applicarsi la teoria degli invarianti ortogonali di G. FICHERA [37]. Si ha in particolare per gli invarianti di ordine uno e grado due: $\mathscr{I}_1^2\,(G^{(Z)}) \leqslant \mathscr{I}_1^2\,(G_\varrho^{(Z)}) < +\infty$.

Per calcolare $\mathscr{I}_1^2\,(G_\varrho^{(Z)})$, conviene rappresentare $G_\varrho^{(Z)}$ per mezzo di una serie. Fissato l'intero positivo ϱ, si consideri la matrice simmetrica di ordine ϱ:

$$\big(((\omega^p,\; \omega^q))\big) \qquad\qquad (p,\; q = 1,\; 2, \ldots,\; \varrho)$$

e la sua matrice inversa $(\Omega_{pq}^{(\varrho)})$. Posto

$$R^*\,\omega^q = \sum_{h,k}^{1,\infty} (R^*\,\omega^q,\; v^{hk})\; v^{hk} = \sum_{h,k}^{1,\infty} ((\omega^q,\; Rv^{hk}))\; v^{hk}, \tag{5.27}$$

si ha:

$$R^*\,P_\varrho^{(Z)}\,Ru = \sum_{p,q}^{1,\varrho} \Omega_{pq}^{(\varrho)}\,((Ru,\; \omega^p))\; R^*\,\omega^q = \sum_{h,k}^{1,\infty}\; \sum_{p,q}^{1,\varrho} \Omega_{pq}^{(\varrho)}((Ru,\; \omega^p))((\omega^q,\; Rv^{hk}))v^{hk}. \tag{5.28}$$

Ne deriva la seguente rappresentazione di $G_\varrho^{(Z)}\,u$ in serie di FOURIER, rispetto la sistema ortonormale $\{v^{hk}\}$:

$$G_\varrho^{(Z)}u = \sum_{h,k}^{1,\infty} \Big[((Ru,\; Rv^{hk})) - \sum_{p,q}^{1,\varrho} \Omega_{pq}^{(\varrho)}((Ru,\; \omega^p))((\omega^q,\; Rv^{hk}))\Big]v^{hk}\,, \tag{5.29}$$

dalla quale segue subito l'espressione dell'invariante $\mathscr{I}_1^2(G_\varrho^{(Z)})$:

$$\mathscr{I}_1^2(G_\varrho^{(Z)}) = \sum_{r,s}^{1,\infty} \|\; G_\varrho^{(Z)}\, v^{rs}\; \|^2 = \tag{5.30}$$
$$= \sum_{h,k,r,s}^{1,\infty} \Big[((Rv^{rs},\; Rv^{hk})) - \sum_{p,q}^{1,\varrho} \Omega_{pq}^{(\varrho)}((Rv^{rs},\; \omega^p))((Rv^{hk},\; \omega^q))\Big]^2.$$

---

[37] Si confronti [5], Lectures 18-19.

Per il calcolo dell'invariante, è stato scelto come sistema $\{v^{hk}\}$ il sistema (ortonormale) degli autovettori del problema di DIRICHLET del Δ_2 (si confronti § 3); come sistema $\{\omega^p\}$ è stato scelto quello delle soluzioni polinomiali (si confronti § 2, teoremi 2.VII, 2.VIII, 2.IX) di $L\omega = 0$.

Osservazione. Per $\sigma = 0$, scegliendo i sistemi $\{v^{hk}\}$ e $\{\omega^p\}$ nel modo anzidetto, si ha, detto λ^0_{hk} l'autovalore del Δ_2 in Z corrispondente a v^{hk}:

$$R\, v^{hk} = -\frac{v^{hk}}{\lambda^0_{hk}}, \qquad ((R\, v^{hk}, \omega^p)) = 0, \qquad (p = 1, 2, \ldots, \varrho;\ h, k = 1, 2, \ldots)$$

e quindi:

$$\mathscr{F}^2_1(G^{(Z)}_\varrho) = \mathscr{F}^2_1(G^{(Z)}) = \sum_{h,k}^{1,\infty} \frac{1}{(\lambda^0_{hk})^2}.$$

Per ottenere infine delle valutazioni per difetto dei primi n autovalori del problema di DIRICHLET per l'operatore L, in Z si considerino le corrispondenti approssimazioni per eccesso, fornite dal metodo di RITZ o dal principio di minimo-massimo, $\mu^{(Z)}_1, \mu^{(Z)}_2, \ldots, \mu^{(Z)}_n$; il numero $\sigma^{(Z)}_i$ definito da:

$$\sigma^{(Z)}_i = \{\mathscr{F}^2_1(G^{(Z)}_\varrho) - \sum_{h=1}^{n}{}^{(i)} [\mu^{(Z)}_h]^{-2}\}^{-1/2} \text{ (38)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5.31}$$

rappresenta un'approssimazione per difetto dell'i-esimo autovalore.

---

(38) Nella somma l'indice h percorre gli interi 1, 2, ..., n con esclusione di i.

Bibliografia.

[1] E. CESÀRO, *Introduzione alla teoria matematica della elasticità*, Bocca, Torino 1894.

[2] L. DE VITO, G. FICHERA, A. FUSCIARDI, M. SCHAERF, *Sul calcolo degli autovalori della piastra quadrata incastrata lungo il bordo*, Rend. Accad. Naz. Lincei (8) **40** (1966), 725-733.

[3] G. FICHERA, *Sui problemi analitici dell'elasticità piana*, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari **18** (1948), 1-22.

[4] G. FICHERA, *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni di problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **4** (1950), 35-99.

[5] G. FICHERA, *Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems*, Lecture Notes in Math. 8, Springer, Berlin 1965.

[6] S. H. GOULD, *Variational Methods for Eigenvalue Problems*, Univ. of Toronto, Toronto 1966.

[7] S. G. MIKHLIN, *Variational Methods in Mathematical Physics*, Pergamon, New York 1964.

[8] M. PICONE, *Appunti di Analisi superiore*, Rondinella, Napoli 1940.

[9] M. PRINCIVALLI, *Sul sistema di equazioni lineari alle derivate parziali, relativo all'equilibrio delle volte cilindriche*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 8 (1954), 157-289.

Summary.

The eigenvalue problem for the linear elasticity operator is considered of a square bidimensional domain and under the Dirichlet boundary condition. By using the Rayleigh-Ritz method and the method of orthogonal invariants, it is shown how upper and lower bounds, arbitrarily close, can be obtained for the eigenvalues.

A preliminary analysis proves that the function space under consideration is direct sum of six invariant subspaces with respect to the operator of the problem.

* * *