Riv. Mat. Univ. Parma (2) 8 (1967), 297-303

MARIO PRIMICERIO (*)

Aspetti fisico - matematici del raffreddamento di un «laser» a stato solido. (**)

1. - Introduzione.

È ben noto che in un «laser» a stato solido (cristallo di rubino, vetro al neodimio, ecc.) funzionante a regime impulsivo, la potenza della radiazione emessa dipende fortemente — a parità di altre condizioni — dalla temperatura dell'elemento attivo [1].

In molte applicazioni si richiede però una rigorosa costanza della potenza, unita ad una notevole frequenza nella ripetizione degli impulsi (si pensi all'impiego del laser, nel campo oculistico, come fotocoagulatore [2]); si rende perciò necessario un controllo della temperatura del solido che, per effetto delle transizioni elettroniche non radiative che hanno luogo durante il periodo di attivazione del materiale, tende a riscaldarsi (1).

Il sistema di raffreddamento più in uso consiste nella circolazione forzata di un fluido (aria, vapore di azoto, acqua) attorno al materiale attivo: ed è di questo problema di raffreddamento che vogliamo occuparci.

(*) Indirizzo: Istituto Matematico «Ulisse Dini» (viale Morgagni 67/A), Università, 50134 Firenze, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 6 del Comitato per la Matematica del C. N. R. per l'anno 1966-67. — Ricevuto: 18-I-1967.

(1) In effetti andrebbe preso in considerazione il termine di conduzione del calore dal «flash» al solido; la sua influenza è però limitata e diviene addirittura inesistente quando si interponga un mezzo isolante trasparente (vaso di DEWAR a pareti trasparenti, a forma di corteccia cilindrica); il refrigerante scorre, in questo caso, tra il cilindro di materiale attivo e l'isolante.

2. - Posizione del problema e condizione al contorno.

La geometria del problema è molto semplice: poichè in generale il cilindro di materiale attivo ha il raggio R molto minore della lunghezza L, si può schematizzare il problema di conduzione con riferimento ad un cilindro indefinito, ottenendo una approssimazione che è abbastanza buona, almeno per le zone non troppo prossime alle estremità.

Supponiamo che all'istante $t = 0$ il cilindro sia a temperatura $T = 0$ e assimiliamo i fenomeni che dànno luogo a riscaldamento del materiale ad una distribuzione uniforme di sorgenti di portata $A(t)$; per quanto riguarda la condizione per la temperatura alla superficie del cilindro, supponiamo che il moto del refrigerante sia vorticoso ([2]) e stazionario; supponiamo inoltre che vi sia perfetto contatto termico con il cilindro da raffreddare.

Se M è la massa di refrigerante per unità di lunghezza del cilindro (costante nel tempo) e se di essa una frazione m/M viene sostituita, nell'unità di tempo, da altro fluido a temperatura $T = 0$, si potrà scrivere [4]

$$2\pi R K \frac{\partial T}{\partial r} + M c' \frac{\partial T}{\partial t} + m c' T = 0 , \qquad \text{per } r = R ; \tag{1}$$

in cui K è la conduttività del solido (che supporremo costante) e c' il calore specifico del fluido (anch'esso costante).

In tali ipotesi sarà $T = T(r, t)$ e il problema in esame è ricondotto ad uno unidimensionale. Supposta costante la diffusività $\varkappa$ del solido e posto

$$\alpha = \frac{2\pi R K}{M c'} , \tag{2}$$

$$\beta = m/M , \tag{3}$$

il problema della determinazione della $T(r, t)$ nel cilindro risulta tradotto nel sistema (4 a)-(4 b)-(4 c):

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 T(r, t)}{\partial r^2} + \frac{k}{r} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} + A(t), \qquad r \in [0, R), \quad t \in (0, t_0) , \tag{4 a}$$

$$T(r, 0) = 0, \qquad r \in [0, R] , \tag{4 b}$$

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} + \alpha \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} + \beta T(r, t) = 0, \qquad r = R, \quad t \in (0, t_0). \tag{4 c}$$

([2]) E tale da poter considerare uniforme, in ogni istante, la sua temperatura.

Per il sistema (4 a)-(4 b)-(4 c) può dimostrarsi un teorema di unicità [sotto potesi di regolarità per $A(t)$] con un procedimento, ad esempio, del tipo di quello usato in [5]; ma la sua soluzione non è ottenibile con i metodi consueti, data la presenza della derivata della temperatura rispetto al tempo nella condizione al contorno.

Problemi di questo tipo sono stati affrontati e risolti in diversi casi, generalizzando i procedimenti di sviluppo in serie di FOURIER ([5], [6], [7]: quest'ultimo mette bene in luce le difficoltà inerenti alla non ortogonalità delle funzioni dello sviluppo) o di trasformata di LAPLACE ([8], [9], [10]). Nella letteratura da noi consultata, peraltro, il problema (4) non è trattato, nè ci sembra che i metodi usati nei lavori citati siano direttamente applicabili al nostro caso e perciò ne abbiamo fatto oggetto di questa Nota.

3. - Soluzione del problema.

Il procedimento che intendiamo seguire è il seguente: risolveremo il problema di conduzione nel cilindro indefinito, per assegnata temperatura al contorno: $T(R,\ t) = \varphi(t)$, con $\varphi(t)$ funzione del tempo due volte derivabile, e $\varphi(0) = 0$. Trovata questa soluzione, in funzione di $\varphi(t)$, imporremo la condizione al contorno (1). Si otterrà una equazione integro-differenziale per $\varphi(t)$ che, mediante trasformazioni, si può ricondurre ad una equazione integrale nella $\dot{\varphi}(t)$ del tipo di VOLTERRA.

Poichè è dimostrabile l'esistenza e l'unicità della soluzione di tale equazione, la $\dot{\varphi}(t)$ — e quindi la $\varphi(t)$ — può essere calcolata, e con essa la soluzione del problema (4 a)-(4 b)-(4 c).

Vogliamo dunque risolvere il problema costituito da (4 a)-(4 b) e da

$$T(R,\ t) = \varphi(t)\,, \qquad \varphi(0) = 0. \tag{5}$$

Si ponga

$$T(r,\ t) = u(r,\ t) + v(r,\ t),$$

in cui $u(r,\ t)$ è la soluzione del problema di conduzione con temperatura nulla inizialmente e sul contorno, in presenza di sorgenti di portata $A(t)$; $v(r,\ t)$ è soluzione di un problema senza sorgenti, con temperatura iniziale nulla, ed uguale a $\varphi(t)$ sul contorno.

È facile in tal modo trovare per $T(r,\ t)$ l'espressione:

$$T(r,\ t) = \frac{2\varkappa}{R}\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n\, J_0(r\,\alpha_n)}{J_1(R\,\alpha_n)}\, e^{-\varkappa\,\alpha_n^2\,(t-\tau)} \left(\varphi(\tau) + \frac{A(\tau)}{\varkappa\,\alpha_n^2}\right) d\tau. \tag{6}$$

Si può dimostrare ([3]) che la serie presente in (6) può essere integrata termine a termine; effettuando allora una integrazione per parti e ricordando che è $\varphi(0) = 0$, la soluzione può in definitiva essere scritta :

$$T(r,\ t) = \varphi(t) + \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(r\,\alpha_n)}{\alpha_n\, J_1(R\,\alpha_n)}\, e^{-\varkappa\, \alpha_n^2\, t} \int_0^t [A(\tau) - \dot{\varphi}(\tau)]\, e^{\varkappa\, \alpha_n^2\, \tau}\, \mathrm{d}\tau\,. \tag{7}$$

Si può anche mostrare la derivabilità termine a termine (due volte rispetto ad r, una volta rispetto a t) della (7) all'interno dell'intervallo in cui si studia il problema [sotto ipotesi non troppo onerose per $A(t)$] e verificare che essa è la soluzione del problema proposto.

Vogliamo ora imporre alla (7) di soddisfare ad (1):

$$\dot{\varphi}(t) + \beta\, \varphi(t) + \frac{2\alpha}{R} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\, \alpha_n^2\, t} \int_0^t [\dot{\varphi}(\tau) - A(\tau)]\, e^{\varkappa\, \alpha_n^2\, \tau}\mathrm{d}\tau = 0. \tag{8}$$

Ma ricordando che è

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[e^{\beta t}\, \varphi(t)] = e^{\beta t}[\dot{\varphi}(t) + \beta\, \varphi(t)]\,,$$

si avrà :

$$\varphi(t) = -\frac{2\alpha}{R}\, e^{-\beta t} \int_0^t \mathrm{d}s\ \Big\{e^{\beta s} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\, \alpha_n^2\, s} \int_0^s [\varphi(\tau) - A(\tau)]\ e^{\varkappa\, \alpha_n^2\, \tau}\, \mathrm{d}\tau\Big\}.$$

E quindi :

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{2\alpha}{R} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\, \alpha_n^2\, t} \int_0^t [\dot{\varphi}(\tau) - A(\tau)]\ e^{\varkappa\, \alpha_n^2\, \tau}\, \mathrm{d}\tau\ +$$

$$+\ \frac{2\,\alpha\,\beta}{R}\, e^{-\beta t} \int_0^t \mathrm{d}s \Big\{ e^{\beta s} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\, \alpha_n^2\, s} \int_0^s [\dot{\varphi}(\tau) - A(\tau)]\ e^{\varkappa\, \alpha_n^2\, \tau}\, \mathrm{d}\tau \Big\}.$$

([3]) Basta ricordare il teorema di ABEL-CARSLAW [11] applicato alla serie di ABEL $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(r\,\alpha_n)}{\alpha_n J_1(R\alpha_n)}$ ed effettuare l'integrale tra 0 e $t - \varepsilon$. Una successiva applicazione del teorema del limite porta al risultato.

Scambiando le integrazioni nel secondo integrale e ponendo $z = s - \tau$, si ha infine:

$$\varphi(t) = \int_0^t \dot{\varphi}(\tau)\, K(t-\tau)\, d\tau + f(t)\,, \tag{9}$$

in cui si è posto

$$K(t) = -\frac{2\alpha}{R} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa \alpha_n^2 t} + \frac{2\alpha\beta}{R}\, e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta z} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa \alpha_n^2 z}\, dz\,,$$

$$f(t) = \int_0^t A(\tau)\, K(t-\tau)\, d\tau\,.$$

La (9) è una equazione integrale nella $\dot{\varphi}(t)$ del tipo di VOLTERRA; appartiene anzi ad una classe particolare: la classe delle equazioni « a nucleo ritardato ». Per tali equazioni si dimostra [12] l'esistenza e l'unicità della soluzione per $t \in [0, t_0]$ nella ipotesi che sia

$$\int_0^{t_0} |K(\tau)|\, d\tau < \infty\,, \qquad |f(t)| < c^2 \quad \text{per} \quad t \in [0, t_0]\,.$$

Tali condizioni sono evidentemente soddisfatte per la forma di $K(t)$ e di $f(t)$, sotto la sola ipotesi di integrabilità per $A(t)$.

4. - Calcolo numerico.

Per calcolare la soluzione di (9) si può usare il classico metodo delle approssimazioni successive, ponendo

$$\dot{\varphi}_1(t) = \int_0^t f(\tau)\, K(t-\tau)\, d\tau + f(t)\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot{\varphi}_{n+1}(t) = \int_0^t \dot{\varphi}_n(\tau)\, K(t-\tau)\, d\tau + f(t)\,.$$

Abbiamo effettuato il calcolo numerico della soluzione della (9) in alcuni casi particolari, servendoci dell'elaboratore elettronico IBM 1620 del Centro di Calcolo dell'Istituto Matematico U. DINI.

Abbiamo in particolare preso per $A(t)$ una funzione uguale a W per $t \in [t_1, t_1 + \delta]$ e nulla al di fuori di tale intervallo (4).

La (9) è stata messa in forma adimensionale in questo modo:

$$\psi(t) = N \int_0^{\bar{t}} \psi(\tau)\, H(\bar{t} - \tau)\, d\tau + g(\bar{t}) ,$$

in cui è

$$\bar{t} = \beta t , \qquad \psi(\bar{t}) = \frac{\dot{\varphi}(\bar{t})}{W} , \qquad N = \frac{2\,\alpha}{R\,\beta} ,$$

$$g(\bar{t}) = -\frac{N}{W} \int_0^{\bar{t}} A(\tau)\, H(\bar{t} - \tau)\, d\tau ,$$

e infine:

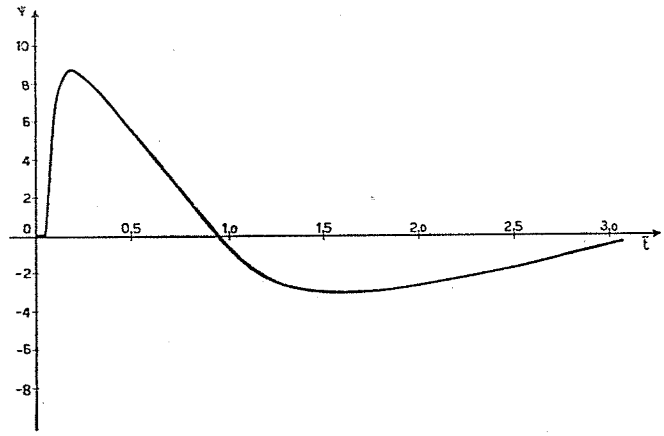
$$H(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} e^{\gamma\, a_n^2 x} + e^{-x} \int_0^x e^z \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma\, a_n^2 z}\, dz ,$$

con

$$\gamma\, a_n^2 = \varkappa\, \alpha_n^2 / \beta ,$$

in cui $\gamma = \varkappa/(\beta R^2)$ ed a_n indica l'ennesima radice positiva dell'equazione $J_0(z) = 0$.

L'andamento della derivata della temperatura alla superficie del cilindro è mostrato dal grafico seguente (che si riferisce ad uno dei casi particolari in cui si è effettuato il calcolo: $\gamma = 0{,}5$; $N = 0{,}7$; $\bar{t}_1 = 0{,}03$; $t_1 + \delta = 0{,}05$).



(4) Questa non è una ipotesi molto restrittiva, data la linearità del problema: una generica funzione $A(t)$ potrà sempre essere considerata come integrale di funzioni del tipo da noi considerato.

Bibliografia.

[1] B. LENGYEL, *Lasers*, Wiley, New York 1962.

[2] H. TOWNES, *Optical masers and their applications to biology*, Biophys. Journ. **2** (1964), 325-337.

[3] A. E. BLUME, *Thermal effects in laser amplifiers and oscillators*, Appl. Opt. **3** (1964), 527-530.

[4] H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, Clarendon Press, Oxford 1959.

[5] T. E. W. SCHUMANN, *The diffusion problem for a solid in contact with a stirred liquid*, Phys. Rev. **37** (1931), 1508-1515.

[6] W. PEDDIE, *Note on the cooling of a sphere in a mass of well-stirred liquid*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **19** (1901), 34-35.

[7] R. L. PEEK jr., *Solution to a problem in diffusion employing a non-orthogonal sine series*, Ann. of Math. (2) **30** (1929), 265-269.

[8] A. N. LOWAN, *Heat conduction in a solid in contact with a well stirred liquid*, Philos. Mag. (7) **17** (1934), 849-854.

[9] D. BLACKWELL, *A transient-flow method*, J. Appl. Phys. **25** (1954), 137-141.

[10] R. E. GASKELL, *A problem in heat conduction and an expansion theorem*, Amer. J. Math. **64** (1942), 447-455.

[11] H. S. CARSLAW, *Theorem of Fourier Series and Integrals*, Macmillan, London 1921.

[12] R. BELLMANN and K. L. COOKE, *Differential-difference Equations*, Academic Press, New York 1963.

Summary.

We studied the problem of heat diffusion in a cylinder–surrounded by a well stirred fluid – where an uniform distribution of sources is given as a function of time.

A solution is obtained depending on a function $\varphi(t)$ which can be evaluated by reducing the problem to the numerical solution of a Volterra-type integral equation.

* * *