Riv. Mat. Univ. Parma (2) 8 (1967), 309-316

BIANCA MANFREDI (*)

Esistenza e non esistenza di soluzioni periodiche in un problema di Meccanica non lineare. (**)

§ 1. - Introduzione.

1.1. – Questa Nota continua tre miei precedenti lavori ($[3]_1$, $[3]_2$, $[3]_3$) sullo studio del Problema differenziale di ordine due, di Meccanica non lineare, individuato dal sistema

$$
\text{(D)} \qquad \begin{cases} \ddot{x}(t) + f(x(t),\ \dot{x}(t)) + g(x(t)) = \varphi(t) & (0 \leqslant t < +\infty) \\ x(0) = a\,, \quad \dot{x}(0) = b\,, \end{cases}
$$

dove $x(t)$ è la funzione incognita, $\dot{x}(t)$ e $\ddot{x}(t)$ sono le derivate temporali prima e seconda di $x(t)$, inoltre a e b sono dati numeri reali qualsiasi.

Le ipotesi su le funzioni date figuranti nell'equazione differenziale del sistema (D), nell'ordine in cui sono state poste nei lavori precedenti ($[3]_1$, $[3]_2$, $[3]_3$) [tranne l'ultima (H_3) che viene posta solo in questa Nota], sono le seguenti:

(H_1)

- $f(u,\ v)$ reale e univoca in tutto il piano cartesiano $(u,\ v)$, ivi limitata, continua e lipschitziana;
- $g(u)$ reale e univoca nell'intervallo $(-\infty,\ +\infty)$, ivi continua, lipschitziana e crescente, con
$$g(-\infty) = -\infty, \quad g(0) = 0, \quad g(+\infty) = +\infty;$$
- $\varphi(t)$ reale e univoca nell'intervallo $(0,\ +\infty)$, ivi limitata, continua e lipschitziana.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca n. 40 del Comitato per la Matematica del C.N.R. (anno 1966-67). — Ricevuto il 15-IX-1967.

$$(\mathrm{H}_2) \qquad \begin{cases} f(u,\ v) \text{ tale che esistano due costanti } \delta > 0,\ v^* > 0 \text{ in modo che sia} \\ \sup\limits_{v \le -v^*} f(u,\ v) + \delta \leqslant \inf\limits_{t \ge 0} \varphi(t), \qquad \sup\limits_{t \ge 0} \varphi(t) \leqslant \inf\limits_{v \ge v^*} f(u,\ v) - \delta; \end{cases}$$

(H_3) $\qquad \varphi(t) \qquad$ periodica (di periodo positivo minimo τ_φ).

In $[3]_1$ ho dimostrato, mediante il metodo delle differenze finite, che il sistema differenziale (D) con le ipotesi (H_1) ha una ed una soluzione [1]

$$(1) \qquad x(t), \qquad t \in (0,\ +\infty)\,,$$

ed ho indicato un procedimento di approssimazioni successive verso tale soluzioni.

In $[3]_2$ ho studiato l'andamento dell'unica soluzione (1) del sistema differenziale (D) con l'ipotesi (H_1), ed ho provato che $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ in $(0,\ +\infty)$:

(i) dipendono con continuità dal punto iniziale $(a,\ b)$;

(ii) sono limitate certamente se si lega il termine dissipativo $f(x,\ \dot{x})$ al termine forzante $\varphi(t)$ mediante l'ipotesi (H_2);

(iii) sono oscillanti senza limite per $t \to +\infty$ quando il termine forzante $\varphi(t)$ è pure oscillante senza limite per $t \to +\infty$ (in particolare, è periodico).

In $[3]_3$, spinta dal desiderio di superare la non facile questione della esistenza o non esistenza di soluzioni periodiche per l'equazione differenziale del sistema (D), ho studiato le successioni della forma

$$(\Psi)_\tau: \qquad \psi(t), \quad \psi(t+\tau), \quad \psi(t+2\tau), \quad \ldots, \quad \psi(t+n\tau), \quad \ldots,$$

che chiamo « progressioni di aritmeticità di generatrice $\psi(t)$ e di ragione τ », essendo $\psi(t)$ una prefissata funzione reale, univoca, limitata, uniformemente continua in $(0,\ +\infty)$, ed essendo τ un prefissato numero reale (del resto qualsiasi). In $[3]_3$, dopo aver osservato dapprima che la successione $(\Psi)_\tau$ ha sempre l'accumulazione non vuota in ogni intervallo $(-T,\ T)$ con $0 < T < +\infty$, ho provato che una progressione di aritmeticità $(\Psi)_\tau$ ha un numero complessivo *finito* $m\ (\geqslant 1)$ di accumulazioni distinte se, e solo se, ha un'accumulazione periodica di periodo $m\tau$ e non di periodi τ, 2τ, ..., $(m-1)\tau$. Inoltre, quando vale quest'ultima condizione, anche le altre $m-1$ accumulazioni sono periodiche

---

(1) Per semplicità tale soluzione è indicata con lo stesso simbolo che nel sistema (D) indica la funzione incognita.

dello stesso periodo $m\tau$ e non di periodi $\tau, 2\tau, \ldots, (m-1)\tau$. Se poi $(\Psi)_\tau$ ha infinite accumulazioni distinte, nessuna di esse può essere periodica di periodo dato da uno dei numeri $\tau, 2\tau, \ldots, n\tau, \ldots$.

1.2. – In questa Nota, sfruttando i richiamati risultati dei lavori [3]$_1$, [3]$_2$, [3]$_3$, dimostro per l'equazione differenziale del sistema (D), precisamente per l'equazione

$$(2) \qquad \begin{cases} \ddot{x}(t) + f(x(t), \dot{x}(t)) + g(x(t)) = \varphi(t) & (0 \leqslant t < +\infty) \\ \text{con le ipotesi } (\mathrm{H}_1), (\mathrm{H}_2), (\mathrm{H}_3)\,, \end{cases}$$

i tre teoremi seguenti:

Teorema I. *Le eventuali soluzioni periodiche dell'equazione* (2) *hanno periodi positivi* (*e quindi anche i periodi positivi minimi*) *da scegliersi tutti fra i numeri*

$$\tau_\varphi\,, \quad 2\tau_\varphi\,, \quad \ldots, \quad n\tau_\varphi\,, \quad \ldots$$

[τ_φ *essendo il periodo positivo minimo di* $\varphi(t)$].

Se la (2) *ha una soluzione periodica* $\bar{x}(t)$, *detto* $m\tau_\varphi$ *il suo periodo positivo minimo* (*sarà quindi* m *intero* $\geqslant 1$), *la* (2) *ha certamente almeno* m *soluzioni periodiche distinte date da*

$$\bar{x}(t), \quad \bar{x}(t+\tau_\varphi), \quad \bar{x}(t+2\tau_\varphi), \quad \ldots, \quad \bar{x}(t+(m-1)\tau_\varphi)\,,$$

di periodi positivi minimi tutti eguali fra loro e dati da $m\tau_\varphi$.

Teorema II. *Si consideri una successione della forma* ([2])

$$(3) \qquad x(t), \quad x(t+\tau_\varphi), \quad x(t+2\tau_\varphi), \quad \ldots, \quad x(t+n\tau_\varphi), \quad \ldots,$$

dove $x(t)$ *è una prefissata* (*del resto qualsiasi*) *soluzione dell'equazione differenziale* (2) *e* τ_φ *è il periodo positivo minimo di* $\varphi(t)$.

Le accumulazioni di (3) *in un qualunque intervallo* $(0, T)$ *con* $0 < T < +\infty$ (ed almeno un'accumulazione esiste sempre per il teorema II di [3]$_3$) *sono tutte soluzioni dell'equazione* (2).

([2]) Questa successione è (cfr. [3]$_3$) « la progressione di aritmeticità di generatrice $x(t)$ e di ragione τ_φ ».

Teorema III. *Affinchè l'equazione differenziale* (2) *abbia soluzioni periodiche è necessario e sufficiente che la* (2) *abbia una soluzione* $x_0(t)$ *tale che la corrispondente successione*

$$(3') \qquad x_0(t), \quad x_0(t+\tau_\varphi), \quad x_0(t+2\tau_\varphi), \quad \ldots, \quad x_0(t+n\tau_\varphi), \quad \ldots$$

in un intervallo $(0, T)$, *con* $0 < T < +\infty$, *possieda un numero complessivo finito* m [3] *di accumulazioni distinte.*

Inoltre, se $\xi(t)$ *è una di queste accumulazioni, le* m *accumulazioni distinte sono*

$$\xi(t), \quad \xi(t+\tau_\varphi), \quad \xi(t+2\tau_\varphi), \quad \ldots, \quad \xi(t+(m-1)\tau_\varphi),$$

ed esse sono tutte soluzioni dell'equazione (2), *tutte periodiche di periodi positivi minimi eguali fra loro e dati da* $m\tau_\varphi$.

Corollario. *Affinchè l'equazione* (2) *non abbia soluzioni periodiche è necessario e sufficiente che tutte le successioni*

$$x(t), \quad x(t+\tau_\varphi), \quad x(t+2\tau_\varphi), \quad \ldots, \quad x(t+n\tau_\varphi), \quad \ldots$$

relative alle varie soluzioni $x(t)$ *della* (2) *abbiano infinite accumulazioni distinte. Queste accumulazioni sono tutte soluzioni dell'equazione* (2), *ma nessuna di esse è periodica.*

Osservazione (relativa al Teorema III). *Se l'equazione* (2) *ha più soluzioni del tipo della* $x_0(t)$ *considerata nel Teorema* III, *gli interi positivi* m *corrispondenti possono essere fra loro diversi. Allora, l'equazione* (2) *viene ad avere soluzioni periodiche di periodi positivi minimi fra loro diversi.*

§ 2. - Dimostrazioni dei Teoremi.

2.1. - Dimostrazione del Teorema I.

1°) Se nella (2) il secondo membro $\varphi(t)$, come suppongo, è periodico di periodo positivo minimo τ_φ, il primo membro della (2) calcolato per una qualunque soluzione di (2), in quanto identico a $\varphi(t)$, è esso pure una funzione perio-

---

[3] Ricordare che (3′) ha sempre almeno un'accumulazione (cfr. teorema II di $[3]_3$).

dica di periodo (positivo) minimo τ_φ. D'altra parte, se $\bar{x}(t)$ è, di (2), una soluzione periodica di periodo (positivo) minimo $\bar{\tau}$, il primo membro di (2) calcolato per $\bar{x}(t)$ è periodico di periodo $\bar{\tau}$. Pertanto $\bar{\tau}$ è necessariamente un numero della successione $\tau_\varphi,\ 2\tau_\varphi,\ \ldots,\ n\tau_\varphi,\ \ldots$.

2°) Posto $\bar{\tau} = m\tau_\varphi$ (con m intero $\geqslant 1$), le m funzioni

$$\bar{x}(t),\quad \bar{x}(t+\tau_\varphi),\quad \bar{x}(t+2\tau_\varphi),\quad \ldots,\quad \bar{x}(t+(m-1)\tau_\varphi)$$

risultano tutte distinte, tutte periodiche di periodi positivi minimi eguali fra loro, dati da $m\tau_\varphi$, e, manifestamente, tutte soluzioni di (2).

2.2. - Dimostrazione del Teorema II.

Detta $\xi(t)$ una qualsiasi delle accumulazioni della successione (3) nell'intervallo $(0,\ T)$, il Teorema II sarà provato se concluderemo che $\xi(t)$ è soluzione di (2).

1°) Sia $x(t+n_r\,\tau_\varphi)$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ una sottosuccessione di (3) tale che

$$\lim_{r\to\infty} x(t+n_r\,\tau_\varphi)=\xi(t)\,. \tag{4}$$

Considero ora la successione delle derivate prime temporali

$$\dot{x}(t+n_r\,\tau_\varphi) \qquad (r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots); \tag{5}$$

essa ha (cfr. $[3]_3$, teor. II) almeno un'accumulazione $\xi^*(t)$. Sia ora $\dot{x}(t+n'_r\,\tau_\varphi)$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ una sottosuccessione di (5) tale che

$$\lim_{r\to\infty} \dot{x}(t+n'_r\,\tau_\varphi)=\xi^*(t)\,, \tag{6}$$

ed allora si avrà anche, per (4),

$$\lim_{r\to\infty} x(t+n'_r\,\tau_\varphi)=\xi(t)\,. \tag{4'}$$

Per il teorema del valor medio risulta poi

$$\{\, x(t+n'_r\,\tau_\varphi+h)-x(t+n'_r\,\tau_\varphi)\}:h=\dot{x}(t+n'_r\,\tau_\varphi+\theta_r\,h) \tag{7}$$

con $h\neq 0$ e θ_r conveniente numero interno all'intervallo $(0,1)$. Inoltre, poichè

$\dot{x}(t)$ nell'intervallo $(0, +\infty)$ è uniformemente continua [4], si ha che, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, esiste un δ_ε (>0 e indipendente da n'_r) tale che, per $|h| < \delta_\varepsilon$, sia

$$\dot{x}(t + n'_r \tau_\varphi) - \varepsilon < \dot{x}(t + n'_r \tau_\varphi + \theta_r h) < \dot{x}(t + n'_r \tau_\varphi) + \varepsilon ,$$

cioè, in virtù di (7),

$$\dot{x}(t + n'_r \tau_\varphi) - \varepsilon < \{x(t + n'_r \tau_\varphi + h) - x(t + n'_r \tau_\varphi)\} : h < \dot{x}(t + n'_r \tau_\varphi) + \varepsilon .$$

Di qui, per $r \to +\infty$ e tenendo presente (4′) e (6), segue (per $|h| < \delta_\varepsilon$)

$$\xi^*(t) - \varepsilon < \{\xi(t + h) - \xi(t)\} : h < \xi^*(t) + \varepsilon .$$

Esiste dunque la derivata temporale $\dot{\xi}(t)$ ed è

$$\xi^*(t) \equiv \dot{\xi}(t);$$

nello stesso tempo, poichè $\xi^*(t)$ è una q u a l u n q u e accumulazione di (5), si conclude che (5) ha la sola accumulazione $\dot{\xi}(t)$ e che è quindi

$$\lim_{r \to \infty} \dot{x}(t + n_r \tau_\varphi) = \dot{\xi}(t) . \tag{8}$$

Cosí pure si ha

$$\lim_{r \to \infty} \ddot{x}(t + n_r \tau_\varphi) = \ddot{\xi}(t) , \tag{9}$$

come segue partendo da (8) e ragionando come si è fatto a partire da (4), ad eccezione del ragionamento per concludere l'uniforme continuità di $\ddot{x}(t)$ in $(0, +\infty)$ [5].

2°) Dopo ciò, esprimendo che $x(t + n_r \tau_\varphi)$ è soluzione dell'equazione (2), otteniamo l'identità

$$\ddot{x}(t + n_r \tau_\varphi) + f\big(x(t + n_r \tau_\varphi),\ \dot{x}(t + n_r \tau_\varphi)\big) + g\big(x(t + n_r \tau_\varphi)\big) = \varphi(t + n_r \tau_\varphi) .$$

---

[4] Ciò discende dal fatto, provato in $[3]_2$, che la $\ddot{x}(t)$ è limitata in $(0, +\infty)$.

[5] L'uniforme continuità di $\ddot{x}(t)$ in $(0, +\infty)$ consegue, precisamente, dal legame ottenuto esprimendo che $x(t)$ soddisfa l'equazione (2), quando si tengano presenti la uniforme continuità di $x(t)$, $\dot{x}(t)$ in $(0, +\infty)$, e la lipschitzianità delle funzioni $f(u, v)$, $g(u)$ nei loro campi rispettivi.

Questa eguaglianza identica ci dà subito per $r \to \infty$ [tenendo presenti le eguaglianze (4), (8), (9), la continuità delle funzioni $f(u, v)$, $g(u)$, e infine la periodicità di periodo τ_φ della funzione $\varphi(t)$]:

$$\ddot{\xi}(t) + f(\xi(t), \dot{\xi}(t)) + g(\xi(t)) = \varphi(t),$$

identità esprimente quanto basta dimostrare.

2.3. - Dimostrazione del Teorema III.

1°) La condizione enunciata è *necessaria*. Infatti, se l'equazione (2) ha una soluzione periodica $\bar{x}(t)$ di periodo positivo minimo $\bar{\tau}$, in virtú del Teorema I esiste un intero $m \geqslant 1$ tale che sia $\bar{\tau} = m\tau_\varphi$. Allora, la successione

$$\bar{x}(t), \quad \bar{x}(t + \tau_\varphi), \quad \bar{x}(t + 2\tau_\varphi), \quad \ldots, \quad \bar{x}(t + n\tau_\varphi), \quad \ldots$$

in un intervallo $(0, T)$, con $0 < T < +\infty$, possiede (cfr. $[\mathbf{3}]_3$, teorema V) un numero complessivo finito m di accumulazioni distinte, date da

$$\bar{x}(t), \quad \bar{x}(t + \tau_\varphi), \quad \bar{x}(t + 2\tau_\varphi), \quad \ldots, \quad \bar{x}(t + (m-1)\tau_\varphi);$$

esse sono tutte accumulazioni per iterazione, sono periodiche di periodi positivi minimi eguali e dati da $m\tau_\varphi$.

2°) La condizione enunciata è *sufficiente*. Infatti, se l'equazione (2) ha una soluzione $x_0(t)$ tale che la corrispondente successione (3') in un intervallo $(0, T)$, con $0 < T < +\infty$, possieda un numero complessivo finito $m \geqslant 1$ di accumulazioni distinte, per il corollario I di $[\mathbf{3}]_3$, queste accumulazioni sono tutte periodiche.

3°) Inoltre, sempre per il corollario I di $[\mathbf{3}]_3$, detta $\xi(t)$ una di queste accumulazioni, tali m accumulazioni sono

$$\xi(t), \quad \xi(t + \tau_\varphi), \quad \xi(t + 2\tau_\varphi), \quad \ldots, \quad \xi(t + (m-1)\tau_\varphi).$$

Queste accumulazioni, tenendo presente il Teorema I, hanno periodi positivi minimi eguali fra loro e dati da $m\tau_\varphi$. Infine, per il Teorema II, queste accumulazioni sono tutte soluzioni dell'equazione (2).

Bibliografia.

[1] L. CESARI: *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*, Springer, Berlin 1963.

[2] P. HARTMAN: *Ordinary Differential Equations*, Wiley-Sons, New York 1964.

[3] B. MANFREDI: 1) *Esistenza e unicità della soluzione di un problema di Meccanica non lineare*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) 5 (1964), 13-40; 2) *Studio dell'andamento della soluzione di un problema di Meccanica non lineare*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) 6 (1965), 41-50; *Su le progressioni di aritmeticità aventi funzioni di accumulazione tutte periodiche*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) 8 (1967), 149-159.

[4] Z. OPIAL: 1) *Sur les solutions périodiques et presque-périodiques de l'équation differentielle* $\ddot{x} + k\,f(x)\,\dot{x} + g(x) = k\,p(t)$, Ann. Polon. Math. 7 (1960), 309-319; 2) *Démonstration d'un théorème de N. Levinson et C. Langenhop*, Ann. Polon. Math. 7 (1960), 241-246.

[5] G. SANSONE: *Differential Equations and their Applications*, Proc. Conf. Prague (1962), 143-165.

[6] R. REISSIG, G. SANSONE and R. CONTI: *Qualitative Theorie nichtlinear Differentialgleichungen*, Cremonese, Roma 1963.

[7] J. J. STOKER: *Non Linear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems*, Interscience, New York 1950.

Summary.

On the base of obtained results [3], *let* $\varphi(t)$ *be periodic of a minimum positive* τ_φ *period and* $x(t)$ *every solution of the* (2) *equation (solution limited and uniformly continue in* $(0, +\infty)$, cf. $[3]_2$), *then*: (i) *if* $\bar{x}(t)$ *is a periodic solution of a minimum positive* $\bar{\tau}$ *period, it is* $\bar{\tau} = m\tau_\varphi$ *(m whole number* $\geqslant 1$), *and the* (2) *equation has m periodic solutions which are given by* $\bar{x}(t + r\,\tau_\varphi)$ $(r = 0, 1, \ldots, m-1)$; (ii) *every accumulation function (there exists, at least, one of them*, cf. $[3]_3$) *of the succession* $x(t + n\tau_\varphi)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *is a solution of the* (2) *equation*; (iii) *the* (2) *equation has periodic solutions if and only if there exists a* $x_0(t)$ *solution of* (2) *such that the succession* $x_0(t + n\tau_\varphi)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *has in* $(0, T)$, $0 < T < +\infty$, *a finite m* $(\geqslant 1)$ *number of distinct accumulation functions. Besides, if* $\xi(t)$ *is an accumulation function, the m accumulation functions are* $\xi(t + r\,\tau_\varphi)$ $(r = 0, 1, \ldots, m-1)$ *and are periodic solutions of* (2) *with the minimum positive* $m\tau_\varphi$ *period*; (iv) *the* (2) *equation has no periodic solutions if and only if all the successions* $x(t + n\tau_\varphi)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, *correspondent to all* $x(t)$ *solutions of the* (2) *equation, have infinite distinct accumulation functions.*

* * *