Riv. Mat. Univ. Parma (2) 8 (1967), 355-366

CORRADO SCARAVELLI (*)

Polinomi di Appell nel senso del Calcolo delle differenze finite. (**)

§ 1. - Introduzione.

1.1. – Nel Calcolo delle differenze finite, com'è noto, i concetti di « costante » e di « potenza » vengono intesi in senso assai più largo di quanto avviene nel Calcolo infinitesimale. Precisamente, nel Calcolo delle differenze finite si ha:

1º) Una funzione della variabile x si dice una *costante per un determinato incremento h dato alla x* (o più brevemente una *costante per l'incremento h*) quando essa è periodica (rispetto ad x) di periodo h, in particolare, quindi, quando essa è un'ordinaria costante. Nel seguito simili costanti *per l'incremento* h si indicheranno con simboli della forma $\tilde{a}(x;\, h)$, $\tilde{b}(x;\, h)$, $\tilde{c}(x;\, h)$, ..., oppure più brevemente $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, ...

È opportuno notare subito che, essendo c un'ordinaria costante, in analogia a (1) $D_x\, c = 0$ abbiamo, essendo $\tilde{c} = \tilde{c}(x;\, h)$ una costante per l'incremento h,

$$D_{x,h}\, \tilde{c} = 0 \,. \tag{1}$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 40 del Comitato per la Matematica del C.N.R., per l'anno 1967-68. — Ricevuto il giorno 1-XII-1967.

(1) Posto $D_x\, f(x) = \mathrm{d}f(x)/\,\mathrm{d}x$, $D_{x,h}\, f(x) = \{f(x+h) - f(x)\}/h$, si dirà che D_x è « il *Derivatore* rispetto ad x » e $D_{x,h}$ è « il *prederivatore* rispetto ad x, col passo h ». Tale $D_{x,h}$ è quindi l'operatore fondamentale del Calcolo delle differenze finite con il passo h.

2°) Una « *potenza, di passo h ed esponente un numero naturale* n, della x » è un'espressione della forma

$$x(x-h)(x-2h)\ldots(x-(n-1)h)\ ,$$

la quale per $h=0$ è esattamente la potenza ordinaria x^n. Nel seguito il prodotto precedente si indicherà con il simbolo $x^{n|h}$, si porrà cioè:

$$x^{n|h}\equiv x(x-h)(x-2h)\ldots(x-(n-1)h)\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

Per $n=0$ (ed $x\neq 0$) si pone poi, per convenzione (²),

$$x^{0|h}=1.$$

È bene notare subito che, in analogia a $D_x\,x^n=n\,x^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$, si ha (come si verifica facilmente)

$$D_{x,h}\,x^{n|h}=n\,x^{(n-1)|h}\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{2}$$

1.2. – Da quanto precede segue che nel Calcolo delle differenze finite, con un determinato passo h, il concetto di polinomio va inteso in un senso assai più largo di quanto avviene nel Calcolo infinitesimale. Precisamente, un'espressione della forma

$$\widetilde{c}_0\,x^{n|h}+\widetilde{c}_1\,x^{(n-1)|h}+\ldots+\widetilde{c}_{n-1}\,x^{1|h}+\widetilde{c}_n\ , \tag{3}$$

con i coefficienti

$$\widetilde{c}_0=\widetilde{c}_0(x;\ h),\qquad \widetilde{c}_1=\widetilde{c}_1(x;\ h),\qquad \ldots,\qquad \widetilde{c}_{n-1}=\widetilde{c}_{n-1}(x;\ h),\qquad \widetilde{c}_n=\widetilde{c}_n(x;\ h)$$

date costanti per l'incremento h considerato, si dirà una *funzione razionale intera di passo h* od anche un *polinomio intero, in x, di passo h*. Nella ipotesi $\widetilde{c}_0\not\equiv 0$ si converrà di dire che n è il *grado* di (3).

1.3. – Il presente lavoro ha per oggetto lo studio di quei particolari poli-

---

(²) Convenzione che si motiva con la conservazione della legge formale $x^{(n+r)|h}=$ $=x^{n|h}(x-nh)^{r|h}$ nel caso $n=0$ (essendo r un intero positivo).

nomi (3) che generalizzano, nel senso detto al n. **1.2**, gli ordinari polinomi di APPELL

$$A_n(x) \equiv \sum_0^n {}_r \binom{n}{r} a_r\, x^{n-r} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{4}$$

dove a_0, a_1, a_2, ... è una data successione di quantità indipendenti da x (³).
Precisamente, sono qui studiati i polinomi

$$A_{n|h}(x) \equiv \sum_0^n {}_r \binom{n}{r} \tilde{a}_r\, x^{(n-r)|h} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{5}$$

dove

$$\tilde{a}_0 = \tilde{a}_0(x;\ h), \quad \tilde{a}_1 = \tilde{a}_1(x;\ h), \quad \tilde{a}_2 = \tilde{a}_2(x;\ h), \quad \ldots$$

è una data successione di costanti per l'incremento h: i polinomi (5) si diranno *polinomi di Appell di passo h.*

Dapprima si estende ai polinomi (5) la terminologia e il simbolismo già usati in [**1**] per i polinomi (4), e si dànno alcune utili esemplificazioni (cfr. § **2**); poi sono considerate le principali proprietà di tali polinomi (5) (cfr. § **3**); infine si determinano le equazioni ricorrenti lineari e le equazioni alle differenze lineari alle quali soddisfano i polinomi (5) appartenenti a certe classi particolari (cfr. § 4).

§ 2. - Simbolismo ed alcuni utili esempi.

2.1. – Come per gli ordinari polinomi (4) di APPELL $A_n(x)$ si è posto (cfr. [**1**], n. 1.3)

$$A_n(x) \equiv a_n \overset{n}{\because} x^n \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

così per i polinomi (5) di APPELL $A_{n|h}(x)$ di passo h porremo

$$A_{n|h}(x) \equiv \tilde{a}_n \overset{n}{\because} x^{n|h} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{5'}$$

In parallelismo alla terminologia usata per i polinomi $A_n(x)$ (cfr. [**1**]), si dirà che $\tilde{a}_n \equiv \tilde{a}_n(x;\ h)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ è la *successione generatrice* (o la *generatrice*) dei polinomi $A_{n|h}(x)$ [od anche del polinomio $A_{n|h}(x)$], inoltre $A_{n|h}(x)$ si chiamerà il polinomio di APPELL di passo h e di indice n.

(³) Su tali polinomi vedasi lo studio fatto in [1] e [2].

È manifesto che per dare una successione di polinomi $A_{n|h}(x)$ è necessario, e basta, fissare h e dare la sua successione generatrice $\{\tilde{a}_n\}$.

2.2. - Esempi. 1°) Un particolare e semplice polinomio $A_{n|h}(x)$ è dato da

$$\tilde{a}^{n|h} \overset{n}{:} x^{n|h} = (\tilde{a} + x)^{n|h} \quad (4),$$

dove $\tilde{a} \equiv \tilde{a}(x;\, h)$ è una data costante per l'incremento h.

2°) Altri polinomi (5) sono i seguenti:

$$\frac{1^{n|h} + (-1)^{n|h}}{2} \overset{n}{:} x^{n|h} = \frac{(x+1)^{n|h} + (x-1)^{n|h}}{2},$$

$$\frac{1^{n|h} - (-1)^{n|h}}{2} \overset{n}{:} x^{n|h} = \frac{(x+1)^{n|h} - (x-1)^{n|h}}{2}.$$

3°) Se consideriamo le cosiddette *successioni unitarie* dell'Algebra delle successioni (cfr. [1], n. 1.4)

$$\varepsilon_n \ (n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots), \qquad \varepsilon_{n-1} \ (n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots), \qquad \varepsilon_{n-2} \ (n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots),\ \ldots,$$

i polinomi $A_{n|h}(x)$ corrispondenti sono:

$$(6) \qquad \varepsilon_n \overset{n}{:} x^{n|h} \equiv x^{n|h}, \qquad \varepsilon_{n-1} \overset{n}{:} x^{n|h} \equiv n\, x^{(n-1)|h}, \qquad \varepsilon_{n-2} \overset{n}{:} x^{n|h} \equiv \binom{n}{2} x^{(n-2)|h}, \ \ldots .$$

4°) Risulta:

$$n \overset{n}{:} x^{n|h} \equiv n(x+1)^{(n-1)|h},$$

$$n^2 \overset{n}{:} x^{n|h} \equiv n(x+1)^{(n-1)|h} + n(n-1)(x+1)^{(n-2)|h}.$$

5°) Abbiamo

$$\frac{\tilde{a}^{(n+1)|h}}{n+1} \overset{n}{:} x^{n|h} = \frac{(x+\tilde{a})^{(n+1)|h} - x^{(n+1)|h}}{n+1}.$$

---

(4) Si tenga presente la formula di VANDERMONDE per lo sviluppo della potenza, di passo h ed esponente n, di un binomio $a + b$:

$$(a+b)^{n|h} = \sum_0^n {}_r \binom{n}{r} a^{(n-r)|h}\, b^{r|h} = \sum_0^n {}_r \binom{n}{r} a^{r|h}\, b^{(n-r)|h},$$

formalmente del tutto analoga a quella per lo sviluppo della potenza n-esima ordinaria di un binomio $a + b$.

In particolare, se $\widetilde{a} \equiv h$,

$$\frac{h^{(n+1)|h}}{n+1} \overset{n}{:} x^{n|h} = h\, x^{n|h}.$$

6°) Essendo $B_{n;\,\omega,h}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ i numeri di Bernoulli parametrizzati (5), i polinomi

$$B_{n;\,\omega,h} \overset{n}{:} x^{n|h} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

di Appell di passo h e di generatrice $\{B_{n;\,\omega,h}\}$ non sono altro che i « polinomi di Bernoulli parametrizzati » (cfr. [3], (5)).

§ 3. - Principali proprietà.

3.1. - Una prima proprietà.

Essendo dati due polinomi di Appell di passo h:

$$A_{n|h}(x) \equiv \widetilde{a}_n \overset{n}{:} x^{n|h}, \qquad B_{n|h}(x) \equiv \widetilde{b}_n \overset{n}{:} x^{n|h}$$

e dette $\widetilde{c}_1$, $\widetilde{c}_2$ date costanti per l'incremento h (costanti indipendenti da n), abbiamo:

$$\widetilde{c}_1\,(a_n \overset{n}{:} x^{n|h}) + \widetilde{c}_2\,(\widetilde{b}_n \overset{n}{:} x^{n|h}) = (\widetilde{c}_1\,\widetilde{a}_n + \widetilde{c}_2\,\widetilde{b}_n) \overset{n}{:} x^{n|h},$$

ossia

$$\widetilde{c}_1\,A_{n|h}(x) + \widetilde{c}_2\,B_{n|h}(x) = (\widetilde{c}_1\,\widetilde{a}_n + \widetilde{c}_2\,\widetilde{b}_n) \overset{n}{:} x^{n|h}, \tag{7}$$

dove nel secondo membro il polinomio di Appell, di passo h, ha per successione generatrice la combinazione lineare, fatta ordinatamente con le stesse costanti $\widetilde{c}_1$, $\widetilde{c}_2$, delle successioni generatrici di $A_{n|h}(x)$ e $B_{n|h}(x)$.

Analoga affermazione per tre o più polinomi di Appell di passo h (purchè sempre in numero finito).

---

(5) Tali numeri di Bernoulli parametrizzati sono definiti da (cfr. [3], (6))

$$B_{n;\,\omega,h} \overset{n}{:} (\omega^{n|h} - \varepsilon_n) = \omega\, \varepsilon_{n-1}.$$

3.2. - Prederivazione dei polinomi di Appell di passo h.

1°) *Prederivando, rispetto ad x e col passo h, i polinomi di Appell di passo h*

$$A_{n|h}(x) \equiv \tilde{a}_n \overset{n}{:} x^{n|h} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

si ottengono ancora dei polinomi di Appell di passo h, e precisamente i polinomi

$$\mathrm{D}_{x,h}\, A_{n|h}(x) = n\, \tilde{a}_{n-1} \overset{n}{:} x^{n|h} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{8}$$

intendendo che sia $n\, \tilde{a}_{n-1} = 0$ per $n = 0$. Inoltre è

$$\mathrm{D}_{x,h}\, A_{n|h}(x) = n\, A_{(n-1)|h}(x) \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{9}$$

intendendo che sia $n\, A_{(n-1)|h}(x) = 0$ per $n = 0$.

Ciò si dimostra in modo completamente analogo a quanto si è fatto in [1] [cfr. n. 2.2, 1°)].

Da (9) segue poi

$$\mathrm{D}^{\mu}_{x,h}\, A_{n|h}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-\mu+1)\, A_{(n-\mu)|h}(x) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots), \tag{9'}$$

onde

$$A_{(n-\mu)|h}(x) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\mu+1)}\, \mathrm{D}^{\mu}_{x,h}\, A_{n|h}(x) \qquad (\mu = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{10}$$

2°) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una successione di polinomi $P_{n|h}(x)$ $(n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$* [cfr. n. **1.2**, (3)] *sia una successione di polinomi di Appell di passo h, è che si abbia:*

$$\left\{\begin{array}{l} P_{n|h}(x) \ \text{di grado} \leqslant n \ ^{(6)} \\ \mathrm{D}_{x,h}\, P_{n|h}(x) = n\, P_{(n-1)|h}(x) \end{array}\right. \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{11}$$

Ciò si dimostra in modo completamente analogo a quanto si è fatto in [1] [cfr. n. 2.2, 2°)].

---

(6) La definizione di « grado » essendo quella data al n. **1.2**.

3.3. - Polinomi di Appell di passo h e di generatrici le successioni-resto della generatrice di un dato polinomio di Appell di passo h.

I polinomi di APPELL di passo h [tutti di grado $\leqslant n$ (7)] così definiti:

$$ {}_rA_{n|h}(x) = \widetilde{a}_{r+n} \overset{n}{\cdot} x^{n|h} \qquad (r = 1, 2, \dots), \tag{12}$$

aventi per generatrici le varie successioni-resto (8) della generatrice di $A_{n|h}(x)$, si diranno « i polinomi-resto di APPELL di passo h del polinomio $A_{n|h}(x)$ ». Si dirà, poi, che il polinomio-resto ${}_rA_{n|h}(x)$ *ha l'indice r a sinistra.*

1°) Non è difficile verificare che si ha:

$$ {}_1A_{n|h}(x) = A_{(n+1)|h}(x) - (x - n\,h)\,A_{n|h}(x) - h\,(n\,\widetilde{a}_n \overset{n}{\cdot} x^{n|h}),$$

od anche (9)

$$ {}_1A_{n|h}(x) + n\,h\,{}_1A_{(n-1)|h}(x) = A_{(n+1)|h}(x) - (x - n\,h)\,A_{n|h}(x)\,, \tag{13}$$

dove a primo membro compaiono i due polinomi-resto ${}_1A_{n|h}(x)$, ${}_1A_{(n-1)|h}(x)$ con l'indice 1 a sinistra.

Dalla (13) *segue infine*

$$ {}_1A_{n|h}(x) = A_{(n+1)|h}(x) - x \sum_0^n{}_s\, s\,!\binom{n}{s}(-h)^s A_{(n-s)|h}(x)\,, \tag{14}$$

oppure

$$ {}_1A_{n|h}(x) = A_{(n+1)|h}(x) - x\,[n\,!\,(-h)^n] \overset{n}{\cdot} A_{n|h}(x)\,, \tag{14'}$$

esprimente linearmente il polinomio-resto ${}_1A_{n|h}(x)$, con l'indice 1 *a sinistra, mediante i polinomi (senza indice a sinistra)*

$$ A_{\nu|h}(x) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots, n+1).$$

---

(7) La definizione di « grado » essendo sempre quella data al n. **1.2.**

(8) Sulla definizione di « successione-resto di una data successione » cfr. [1], n. 2.3.

(9) Essendo:

$$ n\,\widetilde{a}_n \overset{n}{\cdot} x^{n|h} = (\varepsilon_{n-1} \overset{n}{\cdot} \widetilde{a}_{n+1}) \overset{n}{\cdot} x^{n|h} = \varepsilon_{n-1} \overset{n}{\cdot} (\widetilde{a}_{n+1} \overset{n}{\cdot} x^{n|h}) = \varepsilon_{n-1} \overset{n}{\cdot} {}_1A_{n|h}(x) = n\,{}_1A_{(n-1)|h}(x)\,.$$

Dimostrazione della (14) o (14′). Mutando nella (13) n in $n-s$, e moltiplicandone poi ambo i membri per $s!\binom{n}{s}(-h)^s$, si ha materialmente:

$$s!\binom{n}{s}(-h)^s\,{}_1A_{(n-s)|h}(x)-s!\,(n-s)\binom{n}{s}(-h)^{s+1}\,{}_1A_{(n-s-1)|h}(x)=$$

$$=s!\binom{n}{s}(-h)^s A_{(n-s+1)|h}(x)-s!\,(n-s)\binom{n}{s}(-h)^{s+1}A_{(n-s)|h}(x)-$$

$$-x\cdot s!\binom{n}{s}(-h)^s A_{(n-s)|h}(x)\,.$$

Facendo qui successivamente $s=0,1,2,\dots,n$ e sommando membro a membro le $n+1$ uguaglianze così ottenute, risulta

$$\sum_0^n{}_s\, s!\binom{n}{s}(-h)^s\,{}_1A_{(n-s)|h}(x)-\sum_0^n{}_s\,(s+1)!\binom{n}{s+1}(-h)^{s+1}\,{}_1A_{(n-s-1)|h}(x)=$$

$$=\sum_0^n{}_s\, s!\binom{n}{s}(-h)^s A_{(n-s+1)|h}(x)-\sum_0^n{}_s\,(s+1)!\binom{n}{s+1}(-h)^{s+1}A_{(n-s)|h}(x)-$$

$$-x\sum_0^n{}_s\, s!\binom{n}{s}(-h)^s A_{(n-s)|h}(x)\,,$$

od anche:

$${}_1A_{n|h}(x)+\sum_1^n{}_s\, s!\binom{n}{s}(-h)^s\,{}_1A_{(n-s)|h}(x)-\sum_1^{n+1}{}_s\, s!\binom{n}{s}(-h)^s\,{}_1A_{(n-s)|h}(x)=$$

$$=A_{(n+1)|h}(x)+\sum_1^n{}_s\, s!\binom{n}{s}(-h)^s A_{(n-s+1)|h}(x)-\sum_1^{n+1}{}_s\, s!\binom{n}{s}(-h)^s A_{(n-s+1)|h}(x)-$$

$$-x\sum_0^n{}_s\, s!\binom{n}{s}(-h)^s A_{(n-s)|h}(x),$$

da cui, semplificando, proprio la (14) da dimostrare.

2°) Osservo ora che ${}_2A_{n|h}(x)$ si ottiene da ${}_1A_{n|h}(x)$ nello stesso modo in cui ${}_1A_{n|h}(x)$ si ottiene da $A_{n|h}(x)$. Da ciò segue, applicando la (14′),

$${}_2A_{n|h}(x)={}_1A_{(n+1)|h}(x)-x\,[n!\,(-h)^n]\overset{n}{\cdot}\,{}_1A_{n|h}(x)\,,$$

da cui, ancora per la (14′),

$$ {}_2A_{n|h}(x) = A_{(n+2)|h}(x) - x\,[(n+1)\,!\,(-h)^{n+1}] \overset{n+1}{\cdot} A_{(n+1)|h}(x) - $$
$$ - x\,[n\,!\,(-h)^n] \overset{n}{\cdot} \{A_{(n+1)|h}(x) - x\,[n\,!\,(-h)^n] \overset{n}{\cdot} A_{n|h}(x)\}\,, $$

ossia, spezzando l'ultimo termine del secondo membro,

$$ (15) \quad {}_2A_{n|h}(x) = A_{(n+2)|h}(x) - x\,[(n+1)\,!\,(-h)^{n+1}] \overset{n+1}{\cdot} A_{(n+1)|h}(x) - $$
$$ - x\,[n\,!\,(-h)^n] \overset{n}{\cdot} A_{(n+1)|h}(x) + x^2\,[n\,!\,(-h)^n]^{2)^n} \overset{n}{\cdot} A_{n|h}(x) $$ [10],

esprimente linearmente il polinomio-resto ${}_2A_{n|h}(x)$, *con l'indice* 2 *a sinistra, mediante i polinomi* (*senza indice a sinistra*)

$$ A_{\nu|h}(x) \qquad (\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n+1,\ n+2)\,. $$

Affermazioni analoghe valgono per i successivi polinomi-resto ${}_3A_{n|h}(x)$, ${}_4A_{n|h}(x)$, ... In generale si avrà quindi che *tutti i polinomi-resto* ${}_rA_{n|h}(x)$ *di* A p p e l l *di passo* h *si esprimono linearmente coi polinomi* $A_{\nu|h}(x)$ ($\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n+r$).

§ 4. - Equazioni ricorrenti lineari ed equazioni alle differenze lineari per i polinomi di A p p e l l di passo h.

Mi propongo di risolvere il seguente

P r o b l e m a. *Sia data l'equazione ricorrente lineare, d'ordine finito* s, *nella successione incognita* $\{u_n\}$,

$$ (16) \qquad p_0(n)\,u_{n+s} + p_1(n)\,u_{n+s-1} + \ldots + p_{s-1}(n)\,u_{n+1} + p_s(n)\,u_n = 0, $$

dove è

$$ p_j(n) = \sum_{0}^{m_j}{}_i\ \widetilde{c}_{i,j}\,n^{m_j-i} \qquad (j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s), $$

con $\widetilde{c}_{i,j} = \widetilde{c}_{i,j}(x;\ h)$ *date costanti per l'incremento* h *e indipendenti da* n.

---

[10] Si tenga presente che con un simbolo della forma $c_n^{2)^n}$ si indica brevemente il prodotto binomiale $c_n \overset{n}{\cdot} c_n$.

Detta poi $\{\widetilde{a}_n\}$ *una particolare soluzione di* (16), *determinare la corrispondente equazione ricorrente lineare e la corrispondente equazione alle differenze lineare soddisfatte dai polinomi* $A_{n|h}(x) = \widetilde{a}_n \overset{n}{:} x^{n|h}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Risoluzione.

1°) Esprimendo che $\{\widetilde{a}_n\}$ è una soluzione di (16), abbiamo:

$$\sum_{0}^{s}{}_j \left(\sum_{0}^{m_j}{}_i \widetilde{c}_{i,j}\, n^{m_j - i} \right) \widetilde{a}_{n+s-j} = 0 \,, \tag{17}$$

ossia

$$\sum_{0}^{s}{}_j \sum_{0}^{m_j}{}_i \widetilde{c}_{i,j}\, (n^{m_j - i}\, \widetilde{a}_{n+s-j}) = 0 \,. \tag{17'}$$

Se la (17′) si moltiplica, binomialmente n, per $x^{n|h}$ (11), si ottiene:

$$\sum_{0}^{s}{}_j \sum_{0}^{m_j}{}_i \widetilde{c}_{i,j}\, (n^{m_j - i}\, \widetilde{a}_{n+s-j} \overset{n}{:} x^{n|h}) = 0 \,, \tag{18}$$

dove la quantità in parentesi è manifestamente un polinomio di Appell di passo h della forma (indicando con ν ed r degli interi non negativi)

$$n^{\nu}\, \widetilde{a}_{n+r} \overset{n}{:} x^{n|h} \,. \tag{19}$$

Ragionando in modo completamente analogo a quanto è stato fatto in [2], § 2, si trova che ogni polinomio di Appell di passo h della forma (19) si può esprimere linearmente con i polinomi (5′) di Appell di passo h. Tenendo conto di ciò, la (18) diventa una relazione ricorrente lineare fra i polinomi $A_{n|h}(x)$. Ne discende subito la corrispondente equazione ricorrente lineare alla quale soddisfano i polinomi di Appell $A_{n|h}(x) \equiv \widetilde{a}_n \overset{n}{:} x^{n|h}$.

2°) Dalla precedente relazione ricorrente lineare fra i polinomi $A_{n|h}(x)$, segue immediatamente, ricordando (10), una relazione alle differenze lineare fra tali polinomi. Ne discende subito la corrispondente equazione alle differenze lineare alla quale soddisfano i polinomi di Appell $A_{n|h}(x) \equiv \widetilde{a}_n \overset{n}{:} x^{n|h}$.

Esempi. 1°) Si abbia l'equazione ricorrente lineare, d'ordine 1,

$$u_{n+1} - \widetilde{c}\,(n+1)\, u_n = 0 \,,$$

(11) Cfr. [1], n. 1.3.

dove $\tilde{c} = \tilde{c}(x;\, h)$ è un'assegnata costante per l'incremento h. Una soluzione è manifestamente data da $\{n!\ \tilde{c}^n\}$; quindi la (18) è ora

$$[(n+1)!\ \tilde{c}^{n+1}] \overset{n}{\cdot} x^{n|h} - \tilde{c}\,(n+1)(n!\ \tilde{c}^n) \overset{n}{\cdot} x^{n|h} = 0\,,$$

cioè, posto $A_{n|h}(x) = (n!\ \tilde{c}^n) \overset{n}{\cdot} x^{n|h}$ e facendo un passaggio in tutto analogo a quello seguito nella annotazione (9),

$$_1A_{n|h}(x) - \tilde{c}\, n\ {}_1A_{(n-1)|h}(x) - \tilde{c}\, A_{n|h}(x) = 0\,,$$

od anche, mutando qui n in $n-1$ e applicando (14′),

$$A_{n|h}(x) - \tilde{c}\, n\, A_{(n-1)|h}(x) - x[(n-1)!\ (-h)^{n-1}] \overset{n-1}{\cdot} A_{(n-1)|h}(x) +$$
$$+ \tilde{c}\, x\,(n-1)\,\{[n-2)!\ (-h)^{n-2}] \overset{n-2}{\cdot} A_{(n-2)|h}(x)\} = 0\,, \tag{20}$$

che è la relazione ricorrente desiderata per $A_{n|h}(x)$.

Dalla (20) discende poi, per la (10), la relazione alle differenze lineare:

$$A_{n|h}(x) - \tilde{c}\, D_{x,h}\, A_{n|h}(x) - x[(n-1)!\,(-h)^{n-1}] \overset{n-1}{\cdot} \left[\frac{1}{n}\, \mathrm{D}_{x,h}\, A_{n|h}(x)\right] +$$
$$+ \tilde{c}\, x\,(n-1)\left\{[(n-2)!\ (-h)^{n-2}] \overset{n-2}{\cdot} \left[\frac{1}{n(n-1)}\, \mathrm{D}^2_{x,h}\, A_{n|h}\,(x)\right]\right\} = 0\,.$$

2°) Si abbia l'equazione ricorrente lineare, d'ordine 2,

$$u_{n+1} + 2\, n\, u_{n-1} = 0\,.$$

Una soluzione è data dalla successione $\{a_n\}$ tale che sia $a_n = \left[\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\, e^{-x^2}\right]_{x=0}$ (12). La (18) è ora

$$a_{n+1} \overset{n}{\cdot} x^{n|h} + 2\, n\, a_{n-1} \overset{n}{\cdot} x^{n|h} = 0\,,$$

cioè, posto $A_{n|h}(x) = a_n \overset{n}{\cdot} x^{n|h}$ (13) e facendo un passaggio analogo a quello se-

(12) Risulta quindi $a_n = (-1)^{[n/2]}\, \dfrac{1^n + (-1)^n}{2}\, \dfrac{n!}{[n/2]!}$, dove $[n/2]$ indica la « parte intera di $n/2$ ».

(13) Questi polinomi, quando sia cambiato x in $-2x$, generalizzano, nel senso precisato in **1.2** e **1.3**, i cosiddetti « polinomi di Hermite » [cfr. [2], annotazione (16)]: si chiameranno perciò « polinomi di Hermite di passo h ».

guito nella annotazione (9),

$$ {}_1A_{n|h}(x) + 2n\, A_{(n-1)|h}(x) = 0 \,, $$

od anche, mutando qui n in $n-1$ e applicando (14'),

$$ (21) \qquad A_{n|h}(x) + 2(n-1)\, A_{(n-2)|h}(x) - x[(n-1)!\, (-h)^{n-1}]^{\,n-1} A_{(n-1)|h}(x) = 0 \,, $$

che è la relazione ricorrente desiderata per $A_{n|h}(x)$.

Dalla (21) discende poi, per la (10), la relazione alle differenze lineare:

$$ A_{n|h}(x) + \frac{2}{n} \mathrm{D}^2_{x,h}\, A_{n|h}(x) - x[(n-1)!\,(-h)^{n-1}]^{\,n-1} \left[\frac{1}{n} \mathrm{D}_{x,h}\, A_{n|h}(x)\right] = 0 \,. $$

Bibliografia.

[1] C. SCARAVELLI, *Su i polinomi di Appell*. Riv. Mat. Univ. Parma (2) **6** (1965), 95-108.

[2] C. SCARAVELLI, *Equazioni ricorrenti lineari ed equazioni differenziali lineari, per i polinomi di Appell*. Riv. Mat. Univ. Parma (2) **7** (1966), 295-304.

[3] L. TANZI CATTABIANCHI, *Numeri e polinomi di Bernoulli parametrizzati*. Riv. Mat. Univ. Parma (2) **4** (1963), 281-291.

Sommario.

In questo lavoro si studiano i polinomi che generalizzano, secondo il Calcolo delle differenze finite, gli ordinari polinomi di Appell.

Summary.

In this paper we study the polynomials generalizing, in the Calculus of finite differences, the classical Appell polynomials.

* * *