Riv. Mat. Univ. Parma (2) 9 (1968), 67-73

GHEORGHE MURĂRESCU (*)

La Théorie des Variétés d'un Espace à Connexion Projective à Torsion. (**)

1. – La théorie des variétés d'un espace à connexion affine a été étudiée par R. MIRON et D. I. PAPUC [1], en utilisant les procédés de [3]. L'étude des variétés d'un espace à connexion projective sans torsion a été faite par GH. MURĂRESCU dans [2], en utilisant la même méthode. Dans cette Note nous considérons le cas des variétés d'un espace à connexion projective à torsion. Nous utiliserons les mêmes notations comme dans [2].

On sait [4] que une connexion projective sur une variété V_n peut être identifiée à une certaine connexion affine sur une variété différentiable $V_{n+1} = V_n \times R$ sur laquelle une carte locale sera de la forme $\{x^i\} = \{x^a, x^{n+1}\}$ $(i = 1, \ldots, n+1;\ a = 1, \ldots, n)$. Sur la variété V_{n+1} a été défini un champ de vecteurs ξ, qui dans la carte locale donnée ont les composantes $\xi^i = \delta^i_{n+1}$. Nous utiliserons l'atlas préférentiel, c'est-à-dire l'ensemble des cartes locales liées entre elles par les relations:

$$x'^a = x'^a(x^1, \ldots, x^n), \qquad x'^{n+1} = x^{n+1} + \varphi(x^1, \ldots, x^n). \tag{1}$$

La connexion affine sur V_{n+1} satisfait aux relations:

$$\Gamma^i_{ja} = P^i_{ja}, \qquad \Gamma^i_{jn+1} = 0, \qquad \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^{n+1}} = 0, \tag{2}$$

où P^i_{ja} sont les coefficients de la connexion projective sur V_n.

(*) Indirizzo: Seminarul Matematic « Al. Myller », Universitatea « Al. J. Cuza », Jași, România.

(**) Ricevuto: 8-I-1968.

2. – L'étude d'une variété $V_m \subset V_n$ sera réduite à l'etude d'une variété $V_{m+1} = V_m \times R \subset V_{n+1}$ qui localement peut être donnée par les équations:

$$x^a = x^a(u^1, \ldots, u^m), \qquad x^{n+1} = u^{m+1} + \psi(u^1, \ldots, u^m). \tag{3}$$

Sur V_{m+1} nous fixons une carte locale χ_0, dont le domaine géométrique D_0 est contenu dans le domaine de la carte $\{u^\alpha\} = \{u^\lambda, u^{m+1}\}$ ($\alpha = 1, \ldots, m+1$; $\lambda = 1, \ldots, m$), donnée par les systèmes de fonctions:

$$u'^\lambda = u'^\lambda(u^1, \ldots, u^m), \qquad u'^{m+1} = u^{m+1} + f(u^1, \ldots, u^m). \tag{4}$$

Sur D_0 nous considérons les champs de covecteurs $e^A = \delta^A_\alpha \, du'^\alpha$ ($A = 1, \ldots, m+1$) avec les composantes $e^A_\alpha = \partial_\alpha u'^A$ (la dérivée partielle par rapport à u^α) et à l'aide de ces champs nous définirons les champs de vecteurs contravariants $e_A(e^\alpha_A)$ par les relations

$$e^A_\alpha \cdot e^\alpha_B = \delta^A_B \qquad (A,\ B = 1, \ldots, m+1). \tag{5}$$

Dans la carte χ_0 nous avons:

$$e^A_\alpha = \delta^A_\alpha, \qquad e^\alpha_A = \delta^\alpha_A.$$

On constate que pour n'importe quelle autre carte sur V_{m+1}, donnée par les relations de la forme (4), nous avons ([2]):

$$\partial_{m+1} e^A_\alpha = 0, \qquad \partial_{m+1} e^\alpha_A = 0, \qquad e^\alpha_{m+1} = \delta^\alpha_{m+1}. \tag{6}$$

À l'aide des champs e_A et e^A nous pouvons définir sur D_0 la connexion euclidienne:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = e^\alpha_A \cdot \partial_\gamma e^A_\beta, \tag{7}$$

qui, dans la carte χ_0, devient

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0. \tag{7'}$$

Après les relations (2), (3), (6) et (7) on constate que, pour n'importe quelle carte sur V_{m+1} donnée par les relations de la forme (4), nous avons:

$$\partial_{m+1} \Gamma^i_{jk} = 0, \qquad \partial_{m+1} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0, \qquad \Gamma^\alpha_{\beta\, m+1} = \Gamma^x_{m+1\, \beta} = 0. \tag{8}$$

Nous associerons à la variété V_{m+1} les quantités ([1]):

$$y_{\alpha_1}(y^i_{\alpha_1}), \ \ldots, \quad y_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(y^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}), \ \ldots \qquad (\alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_p = 1, \ \ldots, \ m+1), \tag{9}$$

où

$$y^i_{\alpha_1} = x^i_{\alpha_1} = \partial_{\alpha_1} x^i, \quad y^i_{\alpha_1\alpha_2} = y^i_{\alpha_1/\alpha_2} = \partial_{\alpha_2} y^i_{\alpha_1} + P^i_{ja} y^j_{\alpha_1} \cdot y^a_{\alpha_2} - \Gamma^{\alpha}_{\alpha_1\alpha_2} \cdot y^i_{\alpha}, \ldots, y^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} =$$

$$= y^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}/\alpha_p},$$

$y^i_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_p}$ étant un vecteur contravariant par rapport à l'indice supérieur et un tenseur covariant par rapport aux indices inférieurs. On constate que:

$$y_{m+1} = \xi, \qquad \partial_{m+1} y^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} = 0, \qquad y^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_s \ldots \alpha_q} = 0 \tag{10}$$

pour $q = 1, \ldots, p$; $\alpha_s = m+1$ et $s = 2, 3, \ldots, q$.

Nous supposerons que pour V_{m+1} les vecteurs:

$$y^i_{\alpha}, \quad y^i_{\alpha\lambda_1}, \ \ldots, \quad y^i_{\alpha\lambda_1 \ldots \lambda_{p-1}} \qquad (\alpha = 1, \ \ldots, \ m+1; \quad \lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_p = 1, \ \ldots, \ m)$$

sont linéairement indépendants dans l'espace tangent à V_{n+1} et que parmi les vecteurs:

$$y^i_{\alpha}, \qquad y^i_{\alpha\lambda_1}, \qquad \ldots, \qquad y^i_{\alpha\lambda_1 \ldots \lambda_{p-1}}, \qquad y^i_{\alpha\lambda_1 \ldots \lambda_p}$$

il existe $n+1$ vecteurs linéairement indépendants.

Comme d'après les relations (10) les vecteurs $y_{\alpha\lambda_1 \ldots \lambda_q}$ $(q = 1, \ldots, p)$ sont indépendants en nombre de $(m+1) \cdot m^q$, il en résulte qu'il faut avoir la relation:

$$(m+1)\frac{m^p - 1}{m-1} \leqslant n + 1 < (m+1)\frac{m^{p+1} - 1}{m-1}.$$

Une variété pour laquelle est satisfaite cette relation est dite *générique* ([1]).

Nous introduisons les vecteurs:

$$z^i_{A_1 \ldots A_q} = y^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} \cdot e^{\alpha_1}_{A_1} \ldots e^{\alpha_q}_{A_q} \quad (q = 1, \ \ldots, p+1; \ A_1, \ldots, \ A_q = 1, \ \ldots, \ m+1) \tag{11}$$

qui à un changement de la carte locale sur V_{m+1} sont évidemment invariants.

Dans la carte locale χ_0 nous avons:

$$z^i_{A_1 \dots A_q} = y^i_{A_1 \dots A_q} .$$

D'après les relations (6), (10), (11), on constate que:

$$z_{m+1} = y_{m+1} = \xi, \qquad \partial_{m+1} z^i_{A_1 \dots A_q} = 0, \qquad z^i_{A_1 \dots A_s \dots A_q} = 0 , \tag{12}$$

pour $q = 1, \dots, p+1$; $A_s = m+1$ et $s = 2, 3, \dots, q$.

La variété V_{m+1} étant générique, les vecteurs:

$$z_A , \quad z_{AA_1}, \quad \dots, \quad z_{AA_1 \dots A_{p-1}} \quad (A = 1, \dots, m+1;\ A_1 , \dots, A_p = 1, \dots, m) ,$$

sont linéairement indépendants et parmi les vecteurs:

$$z_A , \quad z_{AA_1} , \quad \dots, \quad z_{AA_1 \dots A_{p-1}} , \quad z_{AA_1 \dots A_p}$$

il existe $n+1$ vecteurs linéairements indépendants.

Les vecteurs $z_{AA_1 \dots A_p}$ qui complètent le système de vecteurs

$$z_A , \quad z_{AA_1} , \quad \dots, \quad z_{AA_1 \dots A_{p-1}} ,$$

pour former une base dans l'espace tangent à V_{n+1} seront notés par $z_{(AA_1 \dots A_p)^*}$, les indices $(A\, A_1 \dots A_p)^*$ prennent des valeurs après un certain ordre donné.

Le point $x \in V_{n+1}$ et les vecteurs:

$$z_A , \quad z_{AA_1} , \quad \dots, \quad z_{AA_1 \dots A_{p-1}} , \quad z_{(AA_1 \dots A_p)^*} ,$$

déterminent un repère affine $R_{\chi_0}(x)$ géométriquement associé à la variété V_{m+1}. Ce repère s'appelle *normalisateur*.

Pour exprimer la dérivée covariante des vecteurs $z^i_{AA_1 \dots A_q}$, nous considérons les formes de PFAFF:

$$\omega^A = e^A_\alpha \; du^\alpha , \tag{13}$$

qui, d'après la définition des covecteurs e^A, sont des différentielles totales linéairement indépendantes. Plus précisément, nous avons:

$$(13') \qquad \omega^A = \partial_\lambda u'^A \cdot du^\lambda, \qquad \omega^{m+1} = \partial_\lambda f \cdot du^\lambda + du^{m+1}, \qquad (\lambda, A = 1, \ldots, m).$$

On voit que ω^A ne dépendent pas de u^{m+1} et du^{m+1}.

En notant avec D le symbole de différentiation absolue, nous avons:

$$(14) \qquad \mathrm{D}\, z^i_{AA_1 \ldots A_q} = \mathrm{d}\, z^i_{AA_1 \ldots A_q} + \Gamma^i_{jk}\, z^j_{AA_1 \ldots A_q} \cdot z^k_B \cdot \omega^B$$

et d'après les relations (2) et (12) nous avons:

$$(14') \qquad \mathrm{D}\, z^i_{AA_1 \ldots A_q} = \mathrm{d}\, z^i_{AA_1 \ldots A_q} + P^i_{ja}\, z^j_{AA_1 \ldots A_q} \cdot z^a_A \cdot \omega^A \qquad (a = 1, \ldots, n).$$

D'après les relations (11) et (12) on déduit la formule:

$$(14'') \qquad \mathrm{D}\, z^i_{AA_1 \ldots A_q} = z^i_{AA_1 \ldots A_q A} \cdot \omega^A .$$

3. – Les équations qui expriment la variation du repère $R_{\chi_0}(x)$ sur D_0, appelées les *équations fondamentales* de la variété V_{m+1} (donc de la variété $V_m \subset V_n$), seront:

$$(15) \qquad \begin{cases} \mathrm{D}\, x^a = z^a_A \cdot \omega^A, \qquad \mathrm{D}\, x^{n+1} = z^{n+1}_A \cdot \omega^A + \omega^{m+1} \\ \mathrm{D}\, z^i_{A_1} = z^i_{A_1 A} \cdot \omega^A, \qquad \mathrm{D}\, z^i_{m+1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{D}\, z^i_{AA_1 \ldots A_{p-2}} = z^i_{AA_1 \ldots A_{p-2} A} \cdot \omega^A \\ \mathrm{D}\, z^i_{AA_1 \ldots A_{p-1}} = z^i_{(M_1 \ldots M_q)} \cdot K^{(M_1 \ldots M_q)}_{AA_1 \ldots A_{p-1} A} \cdot \omega^A \\ \mathrm{D}\, z^i_{(AA_1 \ldots A_p)^*} = z^i_{(M_1 \ldots M_q)} \cdot K^{(M_1 \ldots M_q)}_{(AA_1 \ldots A_p)^* A} \cdot \omega^A , \end{cases}$$

où les indices $(M_1 \ldots M_q)$ prennent les valeurs des indices A, AA_1, ..., $AA_1 \ldots A_{p-1}$, $(AA_1 \ldots A_p)^*$.

Les quantités $K^{(M_1 \ldots M_q)}_{AA_1 \ldots A_{p-1} A}$ et $K^{(M_1 \ldots M_q)}_{(AA_1 \ldots A_p)^* A}$ sont invariantes sur V_{m+1} et sont appelées les *invariants de la normalisation* de la variété V_{m+1} (donc de la variété V_m) par rapport à la carte χ_0.

Nous remarquons que les différentielles absolues des vecteurs $z^i_{AA_1 \ldots A_q}$ $(q = 1, \ldots, p)$ ne dépendent pas de ω^{m+1}, donc de du^{m+1}.

Les conditions d'intégrabilité du système (15) seront les suivantes:

$$(\mathrm{C})\quad \begin{cases} P^i_{n+1\,a}\, z^a_A = 0 \qquad (A, A_1, \ldots, M = 1, \ldots, m) \\ R^i_{jab}\, z^j_{A_1} z^a_A z^b_M = z^i_{A_1AM} - z^i_{A_1MA}, \qquad R^i_{n+1\,ab}\, z^a_A z^b_M = z^i_{m+1\,AM} - z^i_{m+1\,MA} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R^i_{jab}\, z^j_{AA_1\ldots A_{p-3}} z^a_A z^b_M = z^i_{AA_1\ldots A_{p-3}AM} - z^i_{AA_1\ldots A_{p-3}MA} \\ R^i_{jab}\, z^j_{AA_1\ldots A_{p-2}} z^a_A z^b_M = z^i_{(M_1\ldots M_q)}\cdot\left(K^{(M_1\ldots M_q)}_{AA_1\ldots A_{p-2}AM} - K^{(M_1\ldots M_q)}_{AA_1\ldots A_{p-2}MA}\right) \\ R^i_{jab}\, z^i_{AA_1\ldots A_{p-1}} z^a_A z^b_M = z^i_{(M_1\ldots M_q)A}\cdot K^{(M_1\ldots M_q)}_{AA_1\ldots A_{p-1}M} - z^i_{(M_1\ldots M_q)M}\cdot \\ \qquad \cdot K^{(M_1\ldots M_q)}_{AA_1\ldots A_{p-1}A} + z^i_{(M_1\ldots M_q)}\cdot\left(K^{(M_1\ldots M_q)}_{AA_1\ldots A_{p-1}M/K}\cdot z^K_A - K^{(M_1\ldots M_q)}_{AA_1\ldots A_{p-1}A/K}\cdot z^K_M\right) \\ R^i_{jab}\, z^j_{(AA_1\ldots A_p)*}\cdot z^a_A z^b_M = z^i_{(M_1\ldots M_q)A}\cdot K^{(M_1\ldots M_q)}_{(AA_1\ldots A_p)*M} - z^i_{(M_1\ldots M_q)M}\cdot \\ \qquad \cdot K^{(M_1\ldots M_q)}_{(AA_1\ldots A_p)*A} + z^i_{(M_1\ldots M_q)}\cdot\left(K^{(M_1\ldots M_q)}_{(AA_1\ldots A_p)*M/K}\cdot z^K_A - K^{(M_1\ldots M_q)}_{(AA_1\ldots A_p)*A/K}\cdot z^K_M\right). \end{cases}$$

Des relations (2) et (12), on constate que les invariants de normalisation ne dépendent pas de u^{m+1}.

Par la différentiation covariante des conditions (C) (mod (15)) on obtient les conditions (C_1), puis, des conditions (C_1) les conditions (C_2), etc. .

D'après ces considérations, il résulte:

Théorème d'existence. *La condition nécessaire et suffisante d'existence d'une variété générique $V_{m+1} \subset V_{n+1}$, donc d'une variété $V_m \subset V_n$, est que, étant données les différentielles exactes ω^A ($A = 1, \ldots, m$) linéairement indépendantes en* $\mathrm{d}u^\lambda$ ($\lambda = 1, \ldots, m$), *la différentielle exacte ω^{m+1} avec le propriété: $\omega^{m+1} = \mathrm{d}u^{m+1}$ (mod $\mathrm{d}u^\lambda$) et les fonctions $K^{(M_1\ldots M_q)}_{AA_1\ldots A_{p-1}}$, $K^{(M_1\ldots M_q)}_{(AA_1\ldots A_p)*}$, analytiques en u^λ, il existe un nombre naturel N, tel que le système des relations* (C_1), ..., (C_N) *soit compatible en x^i, z^i_A, $z^i_{AA_1\ldots A_{p-1}}$, $z^i_{(AA_1\ldots A_p)*}$ et que la solution vérifie identiquement les conditions* (C_{N+1}). *Une solution du problème est une variété normalisée à l'aide de la carte locale des équations $\omega^\alpha = \mathrm{d}u'^\alpha$ ($\alpha = 1, \ldots, m+1$) et elle a pour invariants de la normalisation les fonctions K.*

Bibliographie.

[1] R. Miron et D. I. Papuc, *Un théorème locale d'existence pour les variétés plongées dans un espace à connexion affine*, C. R. Acad. Sci. Paris **260** (1965), 2695-2697.

[2] GH. MURĂRESCU, *La théorie des variétés d'un espace à connexion projective sans torsion* (I), An. Sti. Univ. « Al. I. Cuza » Iași Sect. I a Mat. (N. S.) **12** (1966), 333-339.

[3] D. I. PAPUC, *Une nouvelle méthode dans la théorie des variétés d'un expace homogène à groupe linéaire*, An. Sti. Univ. « Al. I. Cuza » Iași Sect. I a Mat. (N. S.) **10** (1964), 159-182.

[4] I. VAISMAN, *Studiul spațiilor cu conexiune simplectică*, Teză, Iași 1964.

[5] K. YANO, *Les espaces à connexion projective et la géométrie projective des « paths »*, An. Sci. Univ. Jassy **24** (1938), 395-464.

Sommario.

Si stabilisce una normalizzazione locale di una varietà di uno spazio con connessione proiettiva, le equazioni fondamentali ed un teorema di esistenza.

* * *