Riv. Mat. Univ. Parma (2) 9 (1968), 181-194

LUIGIA MARTINELLI PANELLA (*)

Sulle calotte d'area minima. (**)

1. – Sia σ^r una *calotta d'area minima* (cioè appartenente ad una superficie d'area minima dello spazio euclideo ordinario), di ordine $r \geqslant 2$. Supporremo sempre che il riferimento cartesiano ortogonale monometrico $Oxyz$ abbia origine O nel centro di σ^r e piano xy tangente in O a σ^r.

In un lavoro recente (1) G. VACCARO, studiando tali calotte, ha fra l'altro osservato che esse hanno rapporto con la configurazione costituita dalle r rette del piano xy passanti per l'origine e diagonali di un $2r$-gono regolare di centro O. Per brevità chiameremo questa una *configurazione* $2r$*-gonale*. In particolare, le σ^r contenenti una σ^{r-1} piana risultano caratterizzate per il fatto che le loro tangenti asintotiche costituiscono una configurazione $2r$-gonale.

Più in generale, G. VACCARO ha enunciato (e provato per $r \leqslant 5$) la congettura che la costruzione di ogni σ^r d'area minima possa ottenersi a partire essenzialmente da una configurazione $2r$-gonale.

Stabilirò qui che la predetta congettura è in effetti vera in generale, e mostrerò altresì come ne risulti una costruzione induttiva per ogni σ^r d'area minima. Ritroverò anche, in modo più rapido, il predetto risultato sulle σ^r con σ^{r-1} piana.

Il procedimento che adoprerò a tale scopo si basa sull'uso di coordinate isotrope nel piano xy e sull'osservazione che una configurazione $2r$-gonale è legata alle radici $2r$-esime del numero complesso $x + iy$ rappresentate sul piano di ARGAND-GAUSS xy.

Osservo infine che il legame tra calotte d'area minima e configurazioni $2r$-gonali non deve sorprendere. Si rifletta invero che il sistema delle calotte

(*) Indirizzo: Via Aladino Govoni 24, 00136 Roma, Italia.
(**) Ricevuto: 15-IX-1968.
(1) G. VACCARO, *Sulle superficie d'area minima*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) 3 (1962), 139-168.

d'area minima d'ordine fissato nella posizione su indicata rispetto al riferimento, è invariante per il gruppo di rotazioni intorno all'asse z (giacchè la nozione di superficie d'area minima è ovviamente invariante per congruenze), e che una configurazione $2r$-gonale è invariante per il sottogruppo di rotazioni intorno all'asse z di ampiezza multipla di π/r.

In particolare con una rotazione del sottogruppo indicato una calotta σ^r con σ^{r-1} piana si muta in sè o nella simmetrica rispetto al piano xy.

§ I. - Richiami e preliminari.

2. – Supposto di avere complessificato lo spazio, introduciamo le nuove coordinate complesse u, v, z con

$$u = x + iy\,, \qquad v = x - iy\,.$$

I punti reali sono caratterizzati dalle condizioni:

$$v = \bar{u}\,, \qquad z \text{ reale,} \tag{2.1}$$

indicando al solito con sopralineatura il valore complesso coniugato.

Ci occorrerà far uso di derivazioni rispetto alle nuove variabili u, v. Richiamiamo le formule:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\,, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right), \tag{2.2}$$

e quelle che se ne deducono iterando le derivate:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\,, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} = i\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) \\ &\frac{\partial^2}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial^2}{\partial v^2}\,. \end{aligned}\right. \tag{2.3}$$

Tenuto conto delle (2.2), (2.3), risulta immediatamente che l'equazione differenziale caratterizzante le superficie d'area minima $z = f(x, y)$:

$$H(x, y) \equiv \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} + \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \,, \tag{2.4}$$

diviene nelle nuove variabili:

$$K(u, v) \equiv -\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \left(1 + 2 \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial u \, \partial v} - \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0 \,, \tag{2.5}$$

essendo la (2.5) riferita alla equazione della superficie scritta nella forma

$$z = f(x, y) \equiv f\left(\frac{u + v}{2}, \quad \frac{u - v}{2\,i}\right) \equiv g(u, v) \,,$$

e avendosi $K(u, v) \equiv (1/4)\, H(x, y)$.

Adotteremo per le derivate rispetto ad u, v i simboli concisi appresso indicati:

$$\frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h \, \partial v^k} = (\quad)_{h\bar{k}} \quad \text{(2)} \,; \tag{2.6}$$

cosicchè la (2.5) potrà scriversi:

$$K \equiv - z_{0\bar{1}}^2 \, z_{2\bar{0}} + (1 + 2\, z_{1\bar{0}} \, z_{0\bar{1}})\, z_{1\bar{1}} - z_{1\bar{0}}^2 \, z_{0\bar{2}} = 0 \,. \tag{2.7}$$

3. – Per il seguito è importante l'osservazione seguente. Le funzioni che avremo da considerare, come $z = g(u, v)$, $K(u, v)$, sono trasformate delle funzioni $z = f(x, y)$, $\frac{1}{4} H(x, y)$, le quali, insieme alle loro derivate, assumono valori reali per valori reali delle variabili x, y. Ciò porta la conseguenza che le corrispondenti funzioni di u, v godono della proprietà espressa dall'uguaglianza seguente che si riferisce in particolare alla $g(u, v)$:

$$g_{h\bar{k}}(u, \bar{u}) = \overline{g_{k\bar{h}}(u, \bar{u})} \,. \tag{3.1}$$

Infatti, invertendo le (2.2) si ha intanto:

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{3.2}$$

---

(2) La sopralineatura sull'indice di derivazione rispetto alla seconda variabile viene qui usata per non confondere con i simboli della Memoria citata in (1).

Ora, per calcolare $g_{h\bar{k}}$ occorre applicare rispettivamente h e k volte gli operatori (3.2) ad $f(x, y)$ e volendo calcolare $g_{k\bar{h}}$ nel punto $(u, \bar{u})$ che è un punto reale del piano xy (n. 2), tali operatori dànno luogo ad una combinazione lineare di derivate di ordine $h + k$ di f che hanno valori reali. Il calcolo di $g_{k\bar{h}}(u, \bar{u})$ dà luogo allo stesso calcolo con lo scambio degli operatori, il che implica lo scambio di i e $-i$. Da ciò discende senz'altro la (3.1).

In particolare avremo spesso da considerare derivate calcolate nell'origine (reale) O, il che indicheremo sovrapponendo al simbolo uno zero. Dovremo perciò tenere presenti le relazioni seguenti:

$$\mathring{z}_{h\bar{k}} = \overline{\mathring{z}_{k\bar{h}}}\,, \qquad \mathring{K}_{h\bar{k}} = \overline{\mathring{K}_{k\bar{h}}}\,. \tag{3.3}$$

4. – Aggiungiamo infine il seguente

Lemma. *Una configurazione $2r$-gonale del piano $z = 0$ è rappresentata da un'equazione del tipo*

$$a u^r + \bar{a}\,\bar{u}^{\,r} = 0\,, \tag{4.1}$$

essendo a, $\bar{a}$ costanti complesse coniugate non nulle.

I punti reali del piano xy rappresentati dall'equazione (4.1) sono anche rappresentati ovviamente dall'equazione che si ottiene moltiplicando per $a\,u^r$. Pertanto la (4.1) può sostituirsi con

$$a^2\, u^{2r} + a\,\bar{a}\,(u\,\bar{u})^r = 0\,,$$

ovvero (escludendo O):

$$\left(\frac{u}{|\,u\,|}\right)^{2r} = -\frac{\bar{a}}{a}\,. \tag{4.2}$$

La (4.2) ci dice che i valori del numero complesso $u/|u|$ (di modulo 1) soddisfacenti la (4.2) sono le $2r$ radici $2r$-esime del numero complesso $-\bar{a}/a$ (di modulo 1), le quali come è ben noto sono rappresentate nel piano di ARGAND-GAUSS xy dai vertici di un $2r$-gono regolare inscritto in una circonferenza di raggio 1.

I valori di u che risolvono la (4.2) si ottengono dalle dette radici alterandole per un fattore reale positivo qualunque. Quindi i punti rappresentati nel piano xy dalla (4.1) costituiscono le r diagonali per O del $2r$-gono considerato; e il Lemma è provato.

§ II. - Calotte σ^r con σ^{r-1} piana.

5. – Una calotta d'area minima σ^r contenente una σ^{r-1} piana è rappresentata in coordinate u, v, z da una equazione della forma:

$$z = (\overset{\circ}{z}_{r\bar{0}}\, u^r + r\, \overset{\circ}{z}_{r-1,\bar{1}}\, u^{r-1} v + \dots + \overset{\circ}{z}_{0\bar{r}}\, v^r)/r! + [r+1], \tag{5.1}$$

dove $[r+1]$ indica termini di ordine $\geqslant r+1$ in u, v. Appunto perchè la $\sigma^{r-1} \subset \sigma^r$ è piana (e il piano tangente coincide col piano xy come sempre supponiamo; n. **1**), mancano nella (5.1) i termini di grado $\leqslant r-1$, cioè si ha

$$\overset{\circ}{z}_{h\bar{k}} = 0 \qquad \text{per } h+k \leqslant r-1. \tag{5.2}$$

La condizione necessaria e sufficiente affinchè la calotta σ^r sia effettivamente d'area minima si ottiene esprimendo che le derivate calcolate in O della funzione $z = g(u, v)$, che appaiono nella (5.1), soddisfano alla equazione (2.7) e alle sue conseguenze differenziali. Intervengono qui precisamente le conseguenze differenziali che si ottengono derivando la (2.7) $r-2$ volte, il che dà invero relazioni che contengono le derivate di z di ordine r.

Si tratta di calcolare $\overset{\circ}{K}_{h\bar{k}}$ con $h+k = r-2$. Ora, a parte l'addendo $z_{1\bar{1}}$ che appare nell'espressione di K data dalla (2.7), ogni altro addendo è un prodotto di tre fattori, uno solo dei quali è una derivata di z del secondo ordine. Perciò quando si derivino tali addendi $r-2$ volte si ottengono derivate di ordine r soltanto dal fattore che è già una derivata del secondo ordine. Una tal derivata di ordine r risulta perciò sempre moltiplicata per derivate di ordine $< r$, che, calcolate in O, si annullano. Pertanto risulta

$$\overset{\circ}{K}_{h\bar{k}} = \overset{\circ}{z}_{1+h,\,\overline{1+k}}\,. \tag{5.3}$$

Le uniche condizioni sulle derivate di ordine r che si ottengono sono dunque:

$$\overset{\circ}{z}_{1+h,\,\overline{1+k}} = 0 \qquad \text{per} \quad h+k = r-2. \tag{5.4}$$

Ciò esprime che sono nulle tutte le derivate *miste*, d'ordine r, di z.

La (5.1) si riduce pertanto alla forma:

$$z = \frac{1}{r!}\left[\overset{\circ}{z}_{r\bar{0}}\, u^r + \overset{\circ}{z}_{0\bar{r}}\, v^r\right] + [r+1]\,. \tag{5.5}$$

Ne segue che le tangenti asintotiche definite dalla calotta sono rappresentate nel piano xy dalla equazione:

$$\overset{\circ}{z}_{r\bar{0}}\, u^r + \overset{\circ}{z}_{0\bar{r}}\, v^r = 0\,. \tag{5.6}$$

Tenuto conto delle (3.3), nella precedente risulta $\overset{\circ}{z}_{0\bar{r}} = \overline{\overset{\circ}{z}_{r\bar{0}}}$. Inoltre, con riguardo ai punti reali del piano xy rappresentati dalla (5.6), si può porre in essa $v = \bar{u}$ (n. 2). Dunque l'equazione (5.6) risulta del tipo (4.1); cosicchè, in base al Lemma del n. 4, è dimostrato il Teorema (già altrimenti provato da G. VACCARO nella Memoria citata):

Teorema I. *Una calotta d'area minima σ^r contenente una σ^{r-1} piana è caratterizzata dal fatto che le tangenti asintotiche nel suo centro costituiscono una configurazione $2r$-gonale.*

6. – Come si è già accennato, il sistema considerato dalle calotte d'area minima d'ordine r è invariante per rotazione intorno all'asse z. Se, in particolare, si considerano una calotta σ^r con σ^{r-1} piana fissata e il sottogruppo delle rotazioni di angoli multipli di π/r (sottogruppo che muta in sè la configurazione $2r$-gonale), la calotta deve di necessità mutarsi in una calotta d'area minima che ha la stessa configurazione di tangenti asintotiche.

Di fatto accade che *la σ^r suddetta si muta in sè o nella simmetrica rispetto al piano xy.*

Infatti una rotazione dell'angolo θ è espressa in coordinate u, v, z da

$$u' = u\, e^{i\theta}, \qquad v' = v\, e^{-i\theta}, \qquad z' = z\,. \tag{6.1}$$

Trasformando la (5.5) mediante le (6.1) risulta che σ^r si muta nella calotta:

$$z = \frac{1}{r!}\left[\overset{\circ}{z}_{r\bar{0}}\; e^{-ir\theta}\, u^r + \overset{\circ}{z}_{0\bar{r}}\; e^{ir\theta}\, v^r\right] + [r+1]\,. \tag{6.2}$$

Allorchè θ è un multiplo di π/r i due fattori $e^{-i\theta r}$, $e^{i\theta r}$ divengono entrambi simultaneamente $+1$ oppure -1. Pertanto la calotta (6.2) si riduce allora alla (5.5) o alla sua simmetrica rispetto al piano xy.

§ III. - Calotte σ^r generali.

7. – Passiamo a considerare una calotta d'area minima σ^r contenente una assegnata, ma arbitraria, σ^{r-1} (anch'essa di necessità d'area minima).

Indicata concisamente con

$$z = \sum\nolimits^{r-1} + [r] \tag{7.1}$$

la rappresentazione di σ^{r-1}, la σ^r risulta rappresentata da una equazione del tipo:

$$z = \sum\nolimits^{r-1} + \frac{1}{r!}\left[\overset{\circ}{z}_{r\bar{0}}\; u^r + r\,\overset{\circ}{z}_{r-1,\bar{1}}\; u^{r-1}\, v + \ldots + \overset{\circ}{z}_{0\bar{r}}\; v^r\right] + [r+1]\,. \tag{7.2}$$

Per esprimere che la calotta (7.2) è di fatto d'area minima occorre al solito tener conto della (2.7) e delle sue conseguenze differenziali, relazioni tutte valutate in O.

A tale scopo scriviamo la (2.7) nella forma:

$$K \equiv z_{1\bar{1}} + z_{1\bar{1}}\ \alpha + z_{2\bar{0}}\ \beta + z_{0\bar{2}}\ \gamma = 0\,, \tag{7.3}$$

essendo:

$$\alpha = 2\, z_{1\bar{0}}\, z_{0\bar{1}}\,, \qquad \beta = -\, z^2_{0\bar{1}}\,, \qquad \gamma = -\, z^2_{1\bar{0}}\,. \tag{7.4}$$

Indicheremo con D_1, $\mathrm{D}_2, \ldots$ generiche operazioni di derivata rispettivamente di ordini 1, 2, ... rispetto alla coppia di variabili u, v. Risulta allora, per $p + q = s - 2 \geqslant 1$,

$$\left\{\begin{aligned} K_{p,\bar{q}} = {} & z_{1+p,\,\overline{1+q}}\,(1 + \alpha) + z_{2+p,\,\bar{q}}\,\beta + z_{p,\,\overline{2+q}}\ \gamma + \\ & + \sum (\mathrm{D}_{s-1} z\ \ \mathrm{D}_1\alpha) + \sum (\mathrm{D}_{s-2} z\ \ \mathrm{D}_2\,\alpha) + \ldots + \mathrm{D}_2\, z\ \ \mathrm{D}_{s-2}\,\alpha + \\ & + \sum (\mathrm{D}_{s-1} z\ \ \mathrm{D}_1\,\beta) + \ldots + \mathrm{D}_2\, z\ \ \mathrm{D}_{s-2}\,\beta + \\ & + \sum (\mathrm{D}_{s-1} z\ \ \mathrm{D}_1\,\gamma) + \ldots + \mathrm{D}_2\, z\ \ \mathrm{D}_{s-2}\,\gamma\,, \end{aligned}\right. \tag{7.5}$$

dove, qui e in seguito, con i segni di sommatoria si indicano genericamente somme opportune di termini del tipo indicato.

Quando si calcola in O la (7.5), c'è da tener conto che, avendo supposto il piano tangente a σ^r coincidente col piano xy, è:

$$\mathring{z}_{1\bar{0}} = \mathring{z}_{0\bar{1}} = 0\,; \tag{7.6}$$

e quindi risulta:

$$\mathring{\alpha} = \mathring{\beta} = \mathring{\gamma} = 0\,, \qquad \overset{0}{\widehat{\mathrm{D}_1\alpha}} = \overset{0}{\widehat{\mathrm{D}_1\beta}} = \overset{0}{\widehat{\mathrm{D}_1\gamma}} = 0\,. \tag{7.7}$$

Inoltre risulta:

$$\tfrac{1}{2}\, \mathrm{D}_{s-2}\, \alpha = (\mathrm{D}_{s-2}\, z_{1\bar{0}})\, z_{0\bar{1}} + \sum (\mathrm{D}_{s-3}\, z_{1\bar{0}}\ \ \mathrm{D}_1\, z_{0\bar{1}}) + \ldots + z_{1\bar{0}}\ \ \mathrm{D}_{s-2}\, z_{0\bar{1}}\,,$$

e quindi, tenuto conto delle (7.6), appare che $\overset{0}{\widehat{\mathrm{D}_{s-2}\alpha}}$ si riduce ad una funzione razionale intera delle derivate di z in O di ordini $\leqslant s-2$. Analogamente accade per $\overset{0}{\overbrace{\mathrm{D}_{s-2}\beta}}$ e $\overset{0}{\overbrace{\mathrm{D}_{s-2}\gamma}}$.

Avuto riguardo alle precedenti osservazioni, la (7.5) dà:

$$\mathring{K}_{p,\bar{q}} = \mathring{z}_{1+p,\,\overline{1+q}} + (\text{funzione razionale intera di derivate della } z \text{ di ordini } \leqslant p+q, \text{ calcolate in } O). \tag{7.8}$$

Ne segue che la conseguenza differenziale

$$\mathring{K}_{p,\bar{q}} = 0 \tag{7.9}$$

determina la derivata d'ordine s di z del tipo $\mathring{z}_{1+p,\,\overline{1+q}}$ $(p+q=s-2)$, una volta note le derivate di ordini $\leqslant s-2$ di z in O, cioè una volta nota la calotta d'area minima σ^{s-2}.

Quindi σ^{s-2} individua *tutte* le derivate di z in O di ordine s, *eccetto* $\mathring{z}_{s\bar{0}}$, $\mathring{z}_{0\bar{s}}$ che potranno assumere valori arbitrari complessi coniugati [cfr. le (3.3)].

Ritornando alla σ^r espressa dalla (7.2), contenente la prefissata σ^{r-1}, si ha che la $\sigma^{r-2} \subset \sigma^{r-1}$ individua i coefficienti dei termini di grado r dello sviluppo (7.2), eccezion fatta per i coefficienti di u^r, v^r.

Indicheremo con $\Phi^r[\sigma^{r-2}]$ il complesso dei termini di grado r individuati da σ^{r-2}. La (7.2) diviene allora:

$$z = \sum{}^{r-1} + \Phi^r[\sigma^{r-2}] + \frac{1}{r!}\,[\mathring{z}_{r\bar{0}}\, u^r + \mathring{z}_{0\bar{r}}\, v^r] + [r+1]\,. \tag{7.10}$$

La superficie di equazione

$$z = \sum{}^{r-1} + \Phi^r[\sigma^{r-2}] \tag{7.11}$$

è dunque un paraboloide d'ordine r individuato dalla prefissata calotta σ^{r-1} contenuta nella calotta d'area minima σ^r: lo chiameremo *r-paraboloide associato a* σ^{r-1}.

Il terzo gruppo di termini a secondo membro nella (7.10), uguagliato a 0, rappresenta nel piano xy, come sappiamo (n. 4), una configurazione $2r$-gonale, e quindi nello spazio rappresenta il sistema di r piani per l'asse z che proietta tale configurazione. Lo diremo brevemente *sistema $2r$-gonale di piani*, e ne indicheremo l'equazione con $S^r = 0$.

L'equazione della più generale σ^r d'area minima contenente una prefissata

σ^{r-1} data da (7.1), può quindi scriversi:

$$z = \sum^{r-1} + \Phi[\sigma^{r-2}] + \lambda\, S^r + [r+1]\,, \tag{7.12}$$

con λ parametro reale arbitrario.

Sopprimendo nella (7.12) il termine indeterminato $[r+1]$, si ha l'equazione del più generale paraboloide contenente una σ^r d'area minima. Si ha dunque il

Teorema II. *Tutte le calotte d'area minima σ^r contenenti una preassegnata σ^{r-1} appartengono alle superfici del fascio individuato dall' r-paraboloide associato a σ^{r-1} e da un arbitrario sistema $2r$-gonale di piani.*

Allorchè σ^{r-1} è piana, nella (7.12) si annullano i termini $\sum^{r-1}$ e, come è immediato riconoscere, anche i termini $\Phi^r[\sigma^{r-2}]$, cosicchè si ricade nel Teorema I del n. **5**.

Il Teorema II dà non soltanto risposta positiva per tutti i valori di r alla congettura espressa da G. VACCARO (n. **1**), ma fornisce anche, concettualmente, un procedimento ricorrente che permette di ottenere ogni σ^r d'area minima costruendo successivamente le calotte d'area minima σ^2 poi le σ^3 contenenti le costruite σ^2, e cosí sino alle σ^r.

§ IV. - Casi particolari.

8. – Vogliamo infine scrivere esplicitamente le equazioni della più generale σ^r d'area minima per i primi valori di r, precisamente per $r \leqslant 6$.

Basterà naturalmente scrivere l'equazione della più generale σ^6 per il che occorrerà considerare la (2.7) e le sue conseguenze differenziali che si ottengono derivando sino all'ordine 4.

Per eseguire rapidamente i calcoli è opportuno tenere conto che si tratta di derivare, e calcolare in O, i singoli addendi a secondo membro della (2.7), ciascuno dei quali, escluso l'addendo $z_{1\bar{1}}$, è un prodotto di tre fattori del tipo $\zeta'\zeta''\zeta'''$.

Si ha:

$$(\zeta'\zeta''\zeta''')_{h\bar{k}} = \sum \nu\, \zeta'_{h'\bar{k}'}\, \zeta''_{h''\bar{k}''}\, \zeta'''_{h'''\bar{k}'''}\,, \tag{8.1}$$

dove la somma si intende estesa a tutte le ripartizioni di h, k in interi $\geqslant 0$: $h = h' + h'' + h'''$, $k = k' + k'' + k'''$, e ν è un coefficiente numerico che vale (in relazione ai diversi addendi):

$$\nu = \frac{h!}{h'!\; h''!\; h'''!}\, \frac{k!}{k'!\; k''!\; k'''!}\,. \tag{8.2}$$

Invero ν corrisponde al prodotto del numero delle disposizioni con cui ζ', ζ'', ζ''' possono disporsi ad $h+k$ ad $h+k$, con h', h'', h''' e k', k'', k''' ripetizioni nei primi h e nei successivi k posti.

Ciò premesso, dalla condizione $\mathring{K}=0$, tenuto conto delle (7.6), si ha intanto

$$\mathring{z}_{1\bar{1}}=0\,. \tag{8.3}$$

Avuto riguardo sempre alle (7.6) ed alla precedente (8.3), gli unici termini non nulli che appaiono nelle derivate prime di K calcolate in O risultano subito dalla formula (8.1). Uguagliando a zero tali derivate prime di K, si ha precisamente:

$$\mathring{K}_{1\bar{0}}=\mathring{z}_{2\bar{1}}=0\,,\qquad \mathring{K}_{0\bar{1}}=\mathring{z}_{1\bar{2}}=0\,. \tag{8.4}$$

Tenuto conto delle (7.6), (8.3), (8.4), e applicando le (8.1), (8.2), si ottiene per le derivate seconde di K:

$$\mathring{K}_{2\bar{0}}=\mathring{z}_{3\bar{1}}-2\,\mathring{z}_{2\bar{0}}\,\mathring{z}_{2\bar{0}}\,\mathring{z}_{0\bar{2}}=0,\qquad \mathring{K}_{1\bar{1}}=\mathring{z}_{2\bar{2}}=0,\qquad \mathring{K}_{0\bar{2}}=\mathring{z}_{1\bar{3}}-2\,\mathring{z}_{0\bar{2}}\,\mathring{z}_{0\bar{2}}\,\mathring{z}_{2\bar{0}}=0,$$

dove l'espressione di $\mathring{K}_{0\bar{2}}$ può anche ottenersi da quella di $\mathring{K}_{2\bar{0}}$ passando ai valori complessi coniugati in base alle (3.3).

Dalle precedenti si traggono le

$$\mathring{z}_{3\bar{1}}=2\,\mathring{z}^{2}_{2\bar{0}}\,\mathring{z}_{0\bar{2}}\,,\qquad \mathring{z}_{2\bar{2}}=0,\qquad \mathring{z}_{1\bar{3}}=2\,\mathring{z}^{2}_{0\bar{2}}\,\mathring{z}_{2\bar{0}}\,. \tag{8.5}$$

Così continuando e avendo riguardo alle relazioni già trovate tra le derivate di z in O, si ha:

$$\mathring{K}_{3\bar{0}}=\mathring{z}_{4\bar{1}}-\frac{3\,!}{1\,!\,2\,!\,0\,!}\;\mathring{z}_{2\bar{0}}\;\mathring{z}_{3\bar{0}}\;\mathring{z}_{0\bar{2}}-\frac{3\,!}{2\,!\,1\,!\,0\,!}\;\mathring{z}_{3\bar{0}}\;\mathring{z}_{2\bar{0}}\;\mathring{z}_{0\bar{2}}=0,$$

$$\mathring{K}_{2\bar{1}}=\mathring{z}_{3\bar{2}}-\frac{2\,!}{1\,!\,1\,!\,0\,!}\;\frac{1\,!}{0\,!\,0\,!\,1\,!}\;\mathring{z}_{2\bar{0}}\;\mathring{z}_{2\bar{0}}\,\mathring{z}_{0\bar{3}}=0$$

e le relazioni coniugate:

$$\mathring{K}_{0\bar{3}}=\mathring{z}_{1\bar{4}}-6\;\mathring{z}_{0\bar{2}}\;\mathring{z}_{0\bar{3}}\;\mathring{z}_{2\bar{0}}=0\,,\qquad \mathring{K}_{1\bar{2}}=\mathring{z}_{2\bar{3}}-2\;\mathring{z}_{0\bar{2}}\;\mathring{z}_{0\bar{2}}\;\mathring{z}_{3\bar{0}}=0\,.$$

Si ottiene quindi:

$$
(8.6)\qquad \begin{cases} \mathring{z}_{4\bar{1}} = 6\, \mathring{z}_{2\bar{0}}\, \mathring{z}_{0\bar{2}}\, \mathring{z}_{3\bar{0}}\,, & \mathring{z}_{3\bar{2}} = 2\, \mathring{z}^{2}_{2\bar{0}}\, \mathring{z}_{0\bar{3}}\,, \\ \mathring{z}_{2\bar{3}} = 2\, \mathring{z}^{2}_{0\bar{2}}\, \mathring{z}_{3\bar{0}}\,, & \mathring{z}_{1\bar{4}} = 6\, \mathring{z}_{0\bar{2}}\, \mathring{z}_{2\bar{0}}\, \mathring{z}_{0\bar{3}}\,. \end{cases}
$$

Analogamente si ha:

$$
\mathring{K}_{4\bar{0}} = \mathring{z}_{5\bar{1}} - \frac{4\,!}{2\,!\,2\,!\,0\,!}\, \mathring{z}_{3\bar{0}}\, \mathring{z}_{3\bar{0}}\, \mathring{z}_{0\bar{2}} - 2 \left[\frac{4\,!}{3\,!\,1\,!\,0\,!}\, \mathring{z}_{4\bar{0}}\, \mathring{z}_{2\bar{0}}\, \mathring{z}_{0\bar{2}} \right] = 0\,,
$$

$$
\mathring{K}_{3\bar{1}} = \mathring{z}_{4\bar{2}} - 2 \left[\frac{3\,!}{3\,!\,0\,!\,0\,!}\, \frac{1\,!}{0\,!\,1\,!\,0\,!}\, \mathring{z}_{3\bar{1}}\, \mathring{z}_{0\bar{2}}\, \mathring{z}_{2\bar{0}} \right] + \frac{3\,!}{1\,!\,0\,!\,2\,!}\, \frac{1\,!}{0\,!\,1\,!\,0\,!}\, 2\, \mathring{z}_{2\bar{0}}\, \mathring{z}_{0\bar{2}}\, \mathring{z}_{3\bar{1}}
$$

$$
- 2 \left[\frac{3\,!}{1\,!\,2\,!\,0\,!}\, \frac{1\,!}{0\,!\,1\,!\,0\,!}\, \mathring{z}_{2\bar{0}}\, \mathring{z}_{3\bar{1}}\, \mathring{z}_{0\bar{2}} \right]
$$

$$
- 2 \left[\frac{3\,!}{2\,!\,1\,!\,0\,!}\, \frac{1\,!}{0\,!\,0\,!\,1\,!}\, \mathring{z}_{3\bar{0}}\, \mathring{z}_{2\bar{0}}\, \mathring{z}_{0\bar{3}} \right] - 2 \left[\frac{3\,!}{1\,!\,1\,!\,1\,!}\, \frac{1\,!}{0\,!\,0\,!\,1\,!}\, \mathring{z}_{2\bar{0}}\, \mathring{z}_{2\bar{0}}\, \mathring{z}_{1\bar{3}} \right] = 0\,,
$$

$$
\mathring{K}_{2\bar{2}} = z_{3\bar{3}} - \frac{2\,!}{0\,!\,0\,!\,2\,!}\, \frac{2\,!}{1\,!\,1\,!\,0\,!}\, \mathring{z}_{0\bar{2}}\, \mathring{z}_{0\bar{2}}\, \mathring{z}_{4\bar{0}} - \frac{2\,!}{1\,!\,1\,!\,0\,!}\, \frac{2\,!}{0\,!\,0\,!\,2\,!}\, \mathring{z}_{2\bar{0}}\, \mathring{z}_{2\bar{0}}\, \mathring{z}_{0\bar{4}} = 0\,.
$$

Da queste e dalle coniugate si ottengono le relazioni seguenti:

$$
(8.7)\qquad \begin{cases} \mathring{z}_{5\bar{1}} = 6\, \mathring{z}_{0\bar{2}}\, \mathring{z}^{2}_{3\bar{0}} + 8\, \mathring{z}_{2\bar{0}}\, \mathring{z}_{0\bar{2}}\, \mathring{z}_{4\bar{0}} \\ \mathring{z}_{4\bar{2}} = 2\, \mathring{z}_{2\bar{0}}\, \mathring{z}_{0\bar{2}}\, \mathring{z}_{3\bar{1}} + 6\, \mathring{z}_{2\bar{0}}\, \mathring{z}_{3\bar{0}}\, \mathring{z}_{0\bar{3}} + 12\, \mathring{z}^{2}_{2\bar{0}}\, \mathring{z}_{1\bar{3}} \\ \mathring{z}_{3\bar{3}} = 2\, \mathring{z}^{2}_{0\bar{2}}\, \mathring{z}_{4\bar{0}} + 2\, \mathring{z}^{2}_{2\bar{0}}\, \mathring{z}_{0\bar{4}} \\ \mathring{z}_{2\bar{4}} = 2\, \mathring{z}_{0\bar{2}}\, \mathring{z}_{2\bar{0}}\, \mathring{z}_{1\bar{3}} + 6\, \mathring{z}_{0\bar{2}}\, \mathring{z}_{0\bar{3}}\, \mathring{z}_{3\bar{0}} + 12\, \mathring{z}^{2}_{0\bar{2}}\, \mathring{z}_{3\bar{1}} \\ \mathring{z}_{1\bar{5}} = 6\, \mathring{z}_{2\bar{0}}\, \mathring{z}^{2}_{0\bar{3}} + 8\, \mathring{z}_{0\bar{2}}\, \mathring{z}_{2\bar{0}}\, \mathring{z}_{0\bar{4}}\,. \end{cases}
$$

In conclusione le relazioni che ci interessano sono le (7.6), (8.3), (8.4), (8.6), (8.7). In esse non appare nessuna delle derivate non miste di z di ordine >1, le quali possono quindi assumere valori arbitrari coniugati [in base alle (3.3)].

Porremo:

$$\mathring{z}_{2\bar{0}} = A\,, \qquad \mathring{z}_{0\bar{2}} = \overline{A}; \qquad \mathring{z}_{3\bar{0}} = B\,, \qquad \mathring{z}_{0\bar{3}} = \overline{B}; \qquad \mathring{z}_{4\bar{0}} = C\,, \qquad \mathring{z}_{0\bar{4}} = \overline{C};$$

$$\mathring{z}_{5\bar{0}} = D\,, \qquad \mathring{z}_{0\bar{5}} = \overline{D}; \qquad \mathring{z}_{6\bar{0}} = E\,, \qquad \mathring{z}_{0\bar{6}} = \overline{E}\,.$$

Le (8.5), (8.6), (8.7) si scrivono allora:

$$(8.5)' \qquad \mathring{z}_{3\bar{1}} = 2\,A^2\,\overline{A}\,, \qquad \mathring{z}_{2\bar{2}} = 0\,, \qquad \mathring{z}_{1\bar{3}} = 2\,\overline{A}^2\,A\,,$$

$$(8.6)' \qquad \mathring{z}_{4\bar{1}} = 6A\overline{A}B\,, \qquad \mathring{z}_{3\bar{2}} = 2A^2\,\overline{B}\,, \qquad \mathring{z}_{2\bar{3}} = 2\,\overline{A}^2\,B\,, \qquad \mathring{z}_{1\bar{4}} = 6\overline{A}A\overline{B}\,,$$

$$(8.7)' \left\{ \begin{array}{l} \mathring{z}_{5\bar{1}} = 6\overline{A}B^2 + 8A\overline{A}C, \quad \mathring{z}_{4\bar{2}} = 28A^3\,\overline{A}^2 + 6AB\overline{B}, \quad \mathring{z}_{3\bar{3}} = 2\overline{A}^2C + 2A^2\,\overline{C} \\ \mathring{z}_{2\bar{4}} = 28\overline{A}^3\,A^2 + 6\overline{A}\,\overline{B}B, \qquad \mathring{z}_{1\bar{5}} = 6A\overline{B}^2 + 8\overline{A}A\overline{C}. \end{array} \right.$$

La più generale calotta σ^6 d'area minima risulta quindi rappresentata dallo sviluppo:

$$(8.8) \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{1}{2}\,[Au^2 + \overline{A}v^2] + \frac{1}{3\,!}\,[Bu^3 + \overline{B}v^3] + \frac{1}{4\,!}\,[Cu^4 + \overline{C}v^4 + 8A\overline{A}uv(Au^2 + \overline{A}v^2)] \\ \quad + \frac{1}{5\,!}\,[Du^5 + \overline{D}v^5 + 30A\overline{A}\,uv(Bu^3 + \overline{B}v^3) + 20\,u^2\,v^2(A^2\,\overline{B}u + \overline{A}^2B\,v)] \\ \quad + \frac{1}{6\,!}\,[Eu^6 + \overline{E}v^6 + 12uv\{(3B^2 + 4AC)\overline{A}u^4 + (3\overline{B}^2 + 4\overline{A}\,\overline{C})Av^4\} \\ \quad + 30(14A^2\overline{A}^2 + 3B\,\overline{B})u^2v^2(Au^2 + \overline{A}v^2) + 40(\overline{A}^2C + A^2\overline{C})u^3\,v^3] + [7]\,. \end{array} \right.$$

È immediata la verifica sulla (8.8) dei Teoremi I e II dei nn. **6** e **7** per $r \leqslant 6$.

9. – Limitandosi nella (8.8) ai termini di grado $\leqslant 5$ e ritornando alle coordinate reali x, y è facile confrontare lo sviluppo ottenuto con quello dato da G. VACCARO nella Memoria citata in (1).

Nel piano xy reale deve assumersi $v = \bar{u}$ (n. **2**). Separando le parti reale e immaginaria porremo inoltre

$$A = A' + iA''\,, \qquad B = B' + iB''\,, \qquad \text{ecc.}\,.$$

Risulta:

$$(9.1)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}[Au^2+\bar{A}\bar{u}^2] = \mathrm{Re}(Au^2) = \mathrm{Re}[(A'+iA'')(x+iy)^2] \text{ (3)} \\ \qquad = \mathrm{Re}[(A'+iA'')\{(x^2-y^2)+2\,ixy\}] \\ \qquad = A'(x^2-y^2)-2A''xy\,, \end{cases}$$

$$(9.2)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{3!}[Bu^3+\bar{B}\bar{u}^3] = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{Re}(Bu^3) = \dfrac{2}{3!}[(B'+iB'')\{(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)\}] \\ \qquad = \dfrac{1}{3}[B'(x^3-3xy^2)+B''(y^3-3x^2y)]\,, \end{cases}$$

$$(9.3)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{4!}[Cu^4+\bar{C}\bar{u}^4] = \dfrac{1}{12}\,\mathrm{Re}(C\,u^4) \\ \qquad = \dfrac{1}{12}[(C'+i\,C'')\{(x^4-6x^2y^2+y^4)+i(4x^3y-4xy^3)\}] \\ \qquad = \dfrac{1}{12}[C'(x^4-6\,x^2y^2+y^4)-4C''\,xy(x^2-y^2)\,, \end{cases}$$

$$(9.4)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{5!}[Du^5+\bar{D}\bar{u}^5] = \dfrac{1}{60}\,\mathrm{Re}(Du^5) \\ = \dfrac{1}{60}[(D'+i\,D'')\{(x^5-10\,x^3y^2+5\,xy^4)+i(5\,x^4y-10\,x^2y^3+y^5)\}] \\ = \dfrac{1}{60}[D'(x^5-10\,x^3y^2+5\,x^4y)-D''(y^5-10\,x^2y^3+5\,x^4y)]\,. \end{cases}$$

Le (9.1), (9.2) dànno i termini di 2° e 3° grado, le (9.3), (9.4) una parte di quelli di 4° e 5° grado (in particolare tutti questi termini, nel caso di calotte $\sigma^4 \supset \sigma^3$ piana e $\sigma^5 \supset \sigma^4$ piana).

Nel lavoro di G. VACCARO si scelgono gli assi x, y nel piano $z=0$ coincidenti con le tangenti asintotiche alla σ^2 d'area minima che si considera. Inoltre si assume l'unità di misura in modo che l'equazione della σ^2 risulti: $z = xy + [3]$. Tali scelte equivalgono a porre nella (9.1)

$$(9.5)\qquad A' = 0\,, \qquad A'' = -\frac{1}{2}\,.$$

Una volta supposte soddisfatte le (9.5), il calcolo nelle coordinate x, y delle

(3) Indichiamo con Re la parte reale.

residue parti dei termini di 4° e 5° grado della (8.8) dà:

$$\frac{1}{4!}\, 8A\bar{A}\; u\bar{u}(Au^2 + \bar{A}\bar{u}^2) = \frac{1}{6}\,(x^2 + y^2)xy\,, \tag{9.6}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{5!}\,[30A\bar{A}\; u\bar{u}(Bu^3 + \bar{B}\bar{u}^3) + 20u^2\, v^2(A^2\,\bar{B}u + \bar{A}^2\, B\bar{u})] = \\ &= \frac{1}{8}\,(x^2+y^2)\,[B'(x^3 - 3xy^2) + B''(y^3 - 3x^2\, y)] - \frac{1}{12}\,(x^2+y^2)^2\,(B'x + B''y)\,. \end{aligned}\right. \tag{9.7}$$

Tenuto conto delle precedenti si scrive ovviamente lo sviluppo che rappresenta la più generale σ^5 d'area minima in coordinate x, y, z. Per i termini di 2°, 3°, 4° grado il riscontro con la formula (2.11) del citato lavoro di G. VACCARO (p. 145) è immediato. Basta all'uopo uguagliare le costanti ivi introdotte a quelle qui usate secondo le

$$b = \frac{1}{3}\,B'\,, \qquad c = \frac{1}{3}\,B''\,, \qquad e = \frac{1}{12}\,C'\,, \qquad h = -\frac{1}{3}\,C''\,.$$

Qualche avvertenza occorre per i termini di 5° grado, in quanto la decomposizione di questi espressa dalla (2.14) della Memoria di G. VACCARO (p. 146) non corrisponde alla decomposizione negli addendi (9.4), (9.7) che qui appare. Tuttavia si verifica facilmente che le espressioni complessive della Memoria citata e del lavoro attuale coincidono, assumendo come è lecito:

$$m = \frac{1}{60}\,D' - \frac{3}{40}\,b = \frac{1}{60}\,D' - \frac{1}{40}\,B'\,,$$

$$n = -\frac{1}{60}\,D'' - \frac{3}{40}\,c = -\frac{1}{60}\,D'' - \frac{1}{40}\,B''\,.$$

Résumé.

On établit une conjecture énoncée par G. Vaccaro, qui concerne les éléments σ^r, d'odre r, des surfaces minima de l'espace euclidien. Précisément on prouve que chaque σ^r est caractérisé par le fait qu'il appartient à une surface du faisceau définit par un paraboloïde d'ordre r bien déterminé qui contient l'élément $\sigma^{r-1} \subset \sigma^r$ et par un système de r plans qui passent par la normale à σ^r et forment 2r angles dièdres égaux.

* * *