Riv. Mat. Univ. Parma (2) 9 (1968), 203-209

GIAN LUCA CARAFFINI (*)

Su un teorema di unicità per le vibrazioni della trave elastica. (**)

1. – In un recente lavoro [1] è stato assegnato un teorema di unicità per le piccole vibrazioni trasversali di una trave elastica in un mezzo viscoso, autosostenute da una forza di attrito solido applicata all'estremo libero della trave e funzione non lineare della velocità dell'estremo stesso.

Nella ricerca or ora citata si prescinde, oltre che dagli attriti interni e dagli scorrimenti dovuti agli sforzi di taglio, anche dalla sollecitazione longitudinale.

Ora, è facile provare — e questo è appunto l'oggetto di questa Nota — che *anche in presenza di sforzi longitudinali può sussistere un teorema di unicità.*

2. – Consideriamo dunque una trave elastica incastrata ad un estremo; ne siano l la lunghezza, A la sezione trasversale, che ammetteremo costante, e μ la densità lineare. Supponiamo poi che il continuo costituente la trave abbia modulo elastico E e verifichi la legge di HOOKE.

Riferiamo la trave ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $Ox\eta$ avente origine nel baricentro della sezione d'incastro, l'asse Ox coincidente con l'asse longitudinale baricentrico della trave (indeformata), l'asse $O\eta$ come asse di simmetria per la sezione trasversale della trave.

Supporremo verificate, oltre a quella di NAVIER-BERNOULLI, le seguenti ulteriori ipotesi:

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito da vincitore di borsa di studio ministeriale per l'anno 1968. Ricevuto: 26-IX-1968.

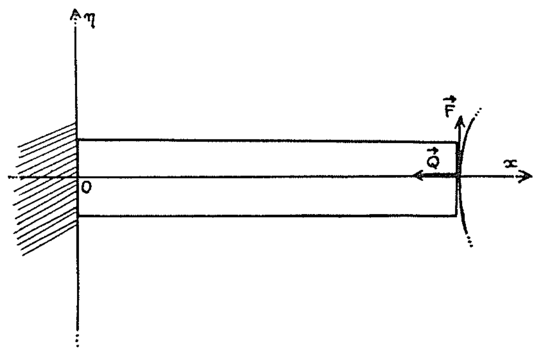
1) la trave sia immersa in un mezzo viscoso, essendo $-\beta \frac{\partial \eta}{\partial t} \mathrm{d}x$ (con $\beta > 0$) la forza resistente esercitata dal mezzo circostante sull'elemento $\mathrm{d}x$ della trave;

2) siano trascurabili il peso della trave, gli attriti interni e gli scorrimenti dovuti agli sforzi di taglio;

3) all'estremo libero della trave ($x = l$) siano concentrate una massa puntiforme m e una forza trasversale (diretta cioè secondo l'asse η) $\vec{F}(N)$ funzione non lineare della sola velocità $\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{x=l}$ dell'estremo stesso;

4) inoltre, a tale estremo libero sia applicata una forza assiale (diretta cioè secondo l'asse x) di intensità $Q(N)$ costante nel tempo, che riterremo positiva se di compressione (ossia diretta nel senso negativo dell'asse x).

Come è detto altrove [1], la forza $\vec{F}$ schematizza abbastanza fedelmente l'azione esercitata sulla sezione libera della trave per attrito solido quando, ad esempio, si faccia strisciare su di essa la periferia di un cilindro rotante con velocità angolare costante, spinto con la forza $\vec{Q}$ contro la sezione stessa (v. Figura).



La funzione $F\left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_{x=l}\right]$ che esprime l'intensità della forza $\vec{F}$ si identifica, salvo la diversità dell'argomento, con la nota funzione $\Phi(v_r)$ della velocità relativa $v_r = v_0 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{x=l}$ con cui si schematizza di solito la forza di attrito solido (dinamico) dovuta allo strisciamento con velocità v_r di due superficie, l'una rispetto all'altra. Tale funzione presenta una discontinuità di prima specie per $\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{x=l} = v_0$, essendo $\vec{v}_0$ la velocità (costante) del punto del cilindro rotante a contatto con l'estremo libero della trave; tuttavia è tale che, considerati due qualunque valori z_1 e z_2 dell'argomento $z = \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{x=l}$, si abbia

$$(z_2 - z_1)[F(z_2) - F(z_1)] \leqslant N(z_2 - z_1)^2 , \tag{1}$$

essendo N un opportuno numero positivo.

Ora, come è ben noto, nelle ipotesi sopra fatte la funzione $\eta(x, t)$ che caratterizza le piccole vibrazioni trasversali della trave elastica deve essere una soluzione dell'equazione differenziale [2]:

$$EJ\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \beta\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mu\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + Q\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\mu J}{A}\frac{\partial^4 \eta}{\partial t^2 \partial x^2} = 0 \text{ (1)}, \tag{2}$$

e deve verificare, oltre ad assegnate condizioni iniziali, le condizioni al contorno:

$$\left\{\begin{aligned} &(\eta)_{x=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_{x=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right)_{x=l} = 0 \\ &\left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}\right)_{x=l} = -\frac{F}{EJ} + \frac{m}{EJ}\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right)_{x=l} - \frac{Q}{EJ}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_{x=l} + \frac{\mu}{AE}\left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial t^2 \partial x}\right)_{x=l}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

3. – Supposta l'esistenza di una soluzione $\eta = \eta(x, t)$ del problema, soddisfacente ad assegnate condizioni iniziali e per la quale si ammettano le abituali condizioni di continuità e derivabilità, supponiamo che esista un'altra funzione $\eta(x, t) + \eta'(x, t)$ soluzione del problema e soddisfacente alle stesse condizioni iniziali. Allora $\eta'(x, t)$ dovrà essere soluzione dell'equazione indefinita

$$EJ\frac{\partial^4 \eta'}{\partial x^4} + \beta\frac{\partial \eta'}{\partial t} + \mu\frac{\partial^2 \eta'}{\partial t^2} + Q\frac{\partial^2 \eta'}{\partial x^2} - \frac{\mu J}{A}\frac{\partial^4 \eta'}{\partial t^2 \partial x^2} = 0 , \tag{4}$$

alla quale vanno aggiunte le condizioni al contorno:

$$\left\{\begin{aligned} &(\eta')_{x=0} = , \qquad \left(\frac{\partial \eta'}{\partial x}\right)_{x=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 \eta'}{\partial x^2}\right)_{x=l} = 0 \\ &\left(\frac{\partial^3 \eta'}{\partial x^3}\right)_{x=l} = -\frac{\Delta F}{EJ} + \frac{m}{EJ}\left(\frac{\partial^2 \eta'}{\partial t^2}\right)_{x=l} - \frac{Q}{EJ}\left(\frac{\partial \eta'}{\partial x}\right)_{x=l} + \frac{\mu}{AE}\left(\frac{\partial^3 \eta'}{\partial t^2 \partial x}\right)_{x=l}, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

e le condizioni iniziali:

(1) Con J si indica, come di consueto, il momento d'inerzia della sezione trasversale della trave rispetto all'asse neutro.

$$(\eta')_{t=0} = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial \eta'}{\partial t}\right)_{t=0} = 0\,. \tag{6}$$

Nella (5) si è posto per brevità

$$\Delta F = F\left[\left(\frac{\partial(\eta+\eta')}{\partial t}\right)_{x=l}\right] - F\left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{x=l}\right]. \tag{7}$$

Seguendo un noto procedimento [3], [4], moltiplichiamo ora ambo i membri della (4) per $\partial\eta'/\partial t$ e integriamo rispetto a x da 0 a l; con alcune integrazioni per parti, tenendo conto di (1), (5), (6), si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Bigg\{ m\left(\frac{\partial\eta'}{\partial t}\right)^2_{x=l} + E\,J\int_0^l\left(\frac{\partial^2\eta'}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}x + \mu\int_0^l\left(\frac{\partial\eta'}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x\, + \\ + \frac{\mu\,J}{A}\int_0^l\left(\frac{\partial^2\eta'}{\partial t\,\partial x}\right)^2\mathrm{d}x - Q\int_0^l\left(\frac{\partial\eta'}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x\Bigg\} = \\ = \left(\frac{\partial\eta'}{\partial t}\right)_{x=l}\Delta F - \beta\int_0^l\left(\frac{\partial\eta'}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x \leqslant N\left(\frac{\partial\eta'}{\partial t}\right)^2_{x=l} - \beta\int_0^l\left(\frac{\partial\eta'}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x \;\;(^2)\,.\end{aligned} \tag{8}$$

---

(2) È infatti:

$$\begin{aligned}\int_0^l \frac{\partial^4\eta'}{\partial x^4}\,\frac{\partial\eta'}{\partial t}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{\partial^3\eta'}{\partial x^3}\,\frac{\partial\eta'}{\partial t}\right]_0^l - \int_0^l \frac{\partial^3\eta'}{\partial x^3}\,\frac{\partial^2\eta'}{\partial t\,\partial x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \left(\frac{\partial\eta'}{\partial t}\right)_{x=l}\left(\frac{\partial^3\eta'}{\partial x^3}\right)_{x=l} - \left[\frac{\partial^2\eta'}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2\eta'}{\partial t\,\partial x}\right]_0^l + \int_0^l \frac{\partial^2\eta'}{\partial x^2}\,\frac{\partial^3\eta'}{\partial t\,\partial x^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= -\frac{1}{E\,J}\left(\frac{\partial\eta'}{\partial t}\right)_{x=l}\Delta F + \frac{1}{2}\,\frac{m}{E\,J}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\eta'}{\partial t}\right)^2_{x=l} - \frac{Q}{E\,J}\left(\frac{\partial\eta'}{\partial t}\,\frac{\partial\eta'}{\partial x}\right)_{x=l} + \\ &\quad + \mu\,\frac{1}{AE}\left(\frac{\partial\eta'}{\partial t}\,\frac{\partial^3\eta'}{\partial x\,\partial t^2}\right)_{x=l} + \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^l\left(\frac{\partial^2\eta'}{\partial x^2}\right)^2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

$$\int_0^l \frac{\partial^2\eta'}{\partial x^2}\,\frac{\partial\eta'}{\partial t}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\partial\eta'}{\partial x}\,\frac{\partial\eta'}{\partial t}\right]_0^l - \int_0^l \frac{\partial\eta'}{\partial x}\,\frac{\partial^2\eta'}{\partial t\,\partial x}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{\partial\eta'}{\partial t}\,\frac{\partial\eta'}{\partial x}\right)_{x=l} - \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^l\left(\frac{\partial\eta'}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^l \frac{\partial^4\eta'}{\partial t^2\,\partial x^2}\,\frac{\partial\eta'}{\partial t}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\partial^3\eta'}{\partial t^2\,\partial x}\,\frac{\partial\eta'}{\partial t}\right]_0^l - \int_0^l \frac{\partial^3\eta'}{\partial t^2\,\partial x}\cdot\frac{\partial^2\eta'}{\partial t\,\partial x}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{\partial\eta'}{\partial t}\,\frac{\partial^3\eta'}{\partial t^2\,\partial x}\right)_{x=l} - \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^l\left(\frac{\partial^2\eta'}{\partial t\,\partial x}\right)^2\mathrm{d}x.$$

Ora, per un noto teorema [5] si ha che, considerata una funzione $\varphi(x)$ definita in un intervallo (a, b), nulla in a, avente in (a, b) derivata continua (³), è

$$\int_a^b \varphi^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{4(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b \varphi'^2(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{9}$$

La funzione $\dfrac{\partial\eta'}{\partial x}$ è, per ogni fissato valore di t, una funzione di x definita in $(0, l)$ e soddisfacente alle ipotesi del teorema or ora citato. Si avrà perciò

$$\int_0^l \left(\frac{\partial\eta'}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x \leqslant \frac{4l^2}{\pi^2}\int_0^l \left(\frac{\partial^2\eta'}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}x\,. \tag{10}$$

È facile ora vedere che per la validità del teorema di unicità qui in oggetto è sufficiente che si abbia:

$$E\,J\int_0^l \left(\frac{\partial^2\eta'}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}x - Q\int_0^l \left(\frac{\partial\eta'}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant 0\,, \tag{11}$$

condizione che, in virtù della (10), è senz'altro verificata quando è

$$Q \leqslant \frac{\pi^2\,E\,J}{4\,l^2}\quad (^4)\,. \tag{12}$$

In tal caso, tenendo presente che anche le quantità

$$\int_0^l \left(\frac{\partial\eta'}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x\,, \qquad \int_0^l \left(\frac{\partial^2\eta'}{\partial t\,\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

(³) In realtà basterebbero condizioni meno restrittive.

(⁴) Infatti in tal caso è

$$\left(E\,J - \frac{4\,l^2\,Q}{\pi^2}\right)\int_0^l \left(\frac{\partial^2\eta'}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant 0\,,$$

da cui

$$E\,J\int_0^l \left(\frac{\partial^2\eta'}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant \frac{4l^2\,Q}{\pi^2}\int_0^l \left(\frac{\partial^2\eta'}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant Q\int_0^l \left(\frac{\partial\eta'}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x\,.$$

sono evidentemente non negative, dalla (8) si ha:

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{m\left(\frac{\partial\eta'}{\partial t}\right)^2_{x=l}+\mu\int_0^l\left(\frac{\partial\eta'}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\mu J}{A}\int_0^l\left(\frac{\partial^2\eta'}{\partial t\,\partial x}\right)^2\mathrm{d}x+EJ\int_0^l\left(\frac{\partial^2\eta'}{\partial x^2}\right)^2\mathrm{d}x-Q\int_0^l\left(\frac{\partial\eta'}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x\right\}\leqslant\\
&\leqslant N\left(\frac{\partial\eta'}{\partial t}\right)^2_{x=l}+\beta\int_0^l\left(\frac{\partial\eta'}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x+\\
&\qquad+\frac{M}{2}\frac{\mu J}{A}\int_0^l\left(\frac{\partial^2\eta'}{\partial t\,\partial x}\right)^2\mathrm{d}x+\frac{M}{2}\left\{EJ\int_0^l\left(\frac{\partial^2\eta'}{\partial x^2}\right)^2\mathrm{d}x-Q\int_0^l\left(\frac{\partial\eta'}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x\right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Qui con M si è indicata la maggiore delle quantità

$$\frac{2N}{m}\,,\qquad\frac{2\beta}{\mu}\,.$$

Consideriamo allora la funzione

$$
(14)\quad
\begin{aligned}
\Phi(t)=\frac{1}{2}&\left\{m\left(\frac{\partial\eta'}{\partial t}\right)^2_{x=l}+\mu\int_0^l\left(\frac{\partial\eta'}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x+\right.\\
&\left.+\frac{\mu J}{A}\int_0^l\left(\frac{\partial^2\eta'}{\partial t\,\partial x}\right)^2\mathrm{d}x+EJ\int_0^l\left(\frac{\partial^2\eta'}{\partial x^2}\right)^2\mathrm{d}x-Q\int_0^l\left(\frac{\partial\eta'}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x\right\}.
\end{aligned}
$$

Essa non è mai negativa, e per le relazioni (6) è nulla per $t=0$. Inoltre per la (13) verifica la diseguaglianza

$$(15)\qquad \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\leqslant M\Phi\,.$$

Allora, per il lemma di GRONWALL [6], la funzione $\Phi(t)$ è identicamente nulla. Tale è quindi anche la $\dfrac{\partial\eta'}{\partial t}$, per cui la funzione $\eta'(x,t)$ nulla inizialmente per ogni x, rimane tale ad ogni istante $t>0$, ed è perciò anch'essa identicamente nulla.

L'unicità è dunque provata.

Non altrettanto si può concludere, invece quando è

$$Q > \frac{\pi^2 E\, J}{4\, l^2}\,. \tag{16}$$

È interessante notare come il valore di Q corrispondente al segno $=$ nella (12), ossia $\pi^2\, E\, J/(4\, l^2)$, corrisponda al cosiddetto carico critico (o di EULERO) perle travi caricate di punta, incastrate ad un estremo e libere all'altro [7], cioè il carico di punta in corrispondenza del quale diviene instabile la configurazione $\eta \equiv 0$.

Bibliografia.

[1] L. CAPRIOLI, *Teoremi di unicità per problemi meccanici con condizioni al contorno non lineari,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **12** (1962-1963), 129-135; **15** (1966), 22-25.

[2] S. TIMOSHENKO, *Vibration Problems in Engineering,* Van Nostrand Co., New York 1955 (cfr. p. 374).

[3] D. GRAFFI, *Sulla teoria della propagazione del calore per convezione naturale,* Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **12** (1930), 129-135.

[4] D. GRAFFI, *Sui teoremi di unicità nella dinamica dei fluidi,* Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **32** (1962), 80-91.

[5] M. PICONE, *Su una proposizione dell'Almansi*, Boll. Un. Mat. (1) **2** Ital. (1923), 97-101.

[6] G. SANSONE, *Equazioni Differenziali nel Campo Reale,* Vol. 1. Zanichelli, Bologna 1948 (cfr. pp. 30-31).

[7] O. BELLUZZI, *Scienza delle Costruzioni,* Zanichelli, Bologna 1944 (cfr. p. 490).

* * *