Riv. Mat. Univ. Parma (2) 9 (1968), 221-245

LUCILLA BASSOTTI (*)

Calcolo numerico degli autovalori relativi al primo problema dell'elastostatica piana in un quadrato. (**)

1. - In un precedente lavoro (1) ho considerato il seguente problema di autovalori relativo al primo problema di valori al contorno (problema di DIRICHLET) della elastostatica piana:

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta_2 u_i + \sigma \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + \lambda u_i = 0 & \text{in } A, \\ u_i = 0 & \text{su } \mathscr{F}A, \end{cases} \qquad i = 1,\ 2,$$

dove A denota il quadrato del piano cartesiano x_1, x_2 definito dalle limitazioni $|x_i| < \pi/2$, $\mathscr{F}A$ la sua frontiera e σ un numero reale positivo fissato. Introdotte notazioni vettoriali e posto:

$$(2)\qquad \mathrm{L}\, u \equiv \Delta_2 u + \sigma \text{ grad div } u\,,$$

la (1) può scriversi brevemente:

$$(3)\qquad \mathrm{L}\, u + \lambda u = 0 \quad \text{in } A, \qquad u = 0 \quad \text{su } \mathscr{F}A.$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 21 del Comitato per la Matematica del C.N.R., nell'anno 1967-68. — Ricevuto: 3-XI-1968.

(1) L. BASSOTTI, *Su un problema di autovalori per l'elasticità piana*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) 8 (1967), 259-289, nel seguito brevemente indicato con [1], al quale si rinvia per le notazioni e per i dettagli.

Questo lavoro fa seguito al lavoro citato. In esso indicherò come, utilizzando i risultati ottenuti in [1], si possa effettivamente pervenire al calcolo approssimato degli autovalori e fornirò le relative tabelle numeriche.

Una parte del calcolo, che si presenta alquanto laborioso, viene eseguita direttamente. L'uso sistematico di alcune proprietà messe in luce nel corso del lavoro [1] permette infatti di conseguire notevoli semplificazioni.

La parte conclusiva dei calcoli ha invece richiesto l'ausilio del calcolatore IBM 7040 della Facoltà di Scienze dell'Università di Roma. Alla Dott. M. Schaerf, che ne ha curata l'esecuzione, va il mio vivo ringraziamento.

2. – Conviene ora ricordare che lo spazio di Hilbert dei vettori $u \equiv (u_1, u_2)$ a due componenti reali, funzioni di quadrato sommabile in A, con l'usuale definizione di prodotto scalare, è somma diretta di sei sottospazi, invarianti per l'operatore L, denotati con $W^{\alpha\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 0, 1$), W^{10}, W^{01}. Il sottospazio generico viene in seguito indicato con Z.

Ciò premesso, seguendo il metodo di Rayleigh-Ritz, le *approssimazioni per eccesso* degli autovalori nei singoli sottospazi invarianti, riportate nelle tabelle accluse, sono state ottenute facendo uso del calcolatore, a partire dalle equazioni (4.3), (4.4), (4.5) di [1] (2).

Più laborioso è il calcolo delle *approssimazioni per difetto* ottenute col metodo degli invarianti ortogonali. Esse vengono determinate in ogni sottospazio Z, dalla (5.31) di [1], in funzione delle approssimazioni per eccesso e dell'invariante $\mathscr{I}_1^2(G_\varrho^Z)$.

Considero quindi l'invariante $\mathscr{I}_1^2(G_\varrho^Z)$ (formula (5.30)). In base alle (3.9), (3.10), (3.5), i vettori v^{rs} sono opportune combinazioni lineari dei vettori dei sistemi $\{\Phi^{hk}\}$, $\{\Psi^{hk}\}$.

Tenuto conto di ciò e ricordando le proprietà della trasformazione lineare S negli spazi $W^{\alpha\alpha\beta}$ (3), l'espressione dell'invariante ortogonale negli spazi $W^{11\beta}$ diviene:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{I}_1^2(G_\varrho^{11\beta}) = \sum_{h,k,r,s}^{1,\infty} \Big[&((R\Phi^{2h,2k-1}, R\Phi^{2r,2s-1})) + (-1)^{\beta+1}((R\Phi^{2h,2k-1}, R\Psi^{2s-1,2r})) - \\
&- 2 \sum_{p,q}^{1,\varrho} \Omega_{pq}^{(\varrho)} ((R\Phi^{2h,2k-1}, \omega^p))((R\Phi^{2r,2s-1}, \omega^q)) \Big]^2 .
\end{aligned}
\tag{4}
$$

(2) Le formule con doppia numerazione si riferiscono sempre al lavoro [1].

(3) Si confronti [1], proprietà 1.XIV, 3.II, 5.IV.

Analogamente l'espressione dell'invariante negli spazi $W^{00\beta}$ diviene:

$$\mathscr{I}_1^2(G_\varrho^{00\beta}) = \sum_{h,k,r,s}^{1,\infty} [((R\Phi^{2k-1,2h}, R\Phi^{2s-1,2r})) + (-1)^{\beta+1}((R\Phi^{2k-1,2h}, R\Psi^{2r,2s-1})) - \tag{5}$$
$$- 2\sum_{p,q}^{1,\varrho} \Omega_{pq}^{(\varrho)} ((R\Phi^{2k-1,2h}, \omega^p))((R\Phi^{2s-1,2r}, \omega^q))]^2 .$$

Infine nello spazio W^{10} l'invariante è dato da:

$$\left\{\begin{aligned} \mathscr{I}_1^2(G_\varrho^{10}) = \sum_{h,k,r,s}^{1,\infty} [((R\Phi^{2h-1,2k-1}, R\Phi^{2r-1,2s-1})) - \\ - \sum_{p,q}^{1,\varrho} \Omega_{pq}^{(\varrho)} ((R\Phi^{2h-1,2k-1}, \omega^p))((R\Phi^{2r-1,2s-1}, \omega^q))]^2 + \\ + 2\sum_{h,k,r,s}^{1,\infty} [((R\Phi^{2h-1,2k-1}, R\Psi^{2r,2s})) - \sum_{p,q}^{1,\varrho} \Omega_{pq}^{(\varrho)}((R\Phi^{2h-1,2k-1}, \omega^p))((R\Psi^{2r,2s}, \omega^q))]^2 + \\ + \sum_{h,k,r,s}^{1,\infty} [((R\Psi^{2h,2k}, R\Psi^{2r,2s})) - \sum_{p,q}^{1,\varrho} \Omega_{pq}^{(\varrho)} ((R\Psi^{2h,2k}, \omega^p))((R\Psi^{2r,2s},\omega^q))]^2. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Non viene considerato l'invariante ortogonale nello spazio W^{01}, in quanto è stato dimostrato che gli autovalori in W^{10} e W^{01} sono gli stessi. (Si confronti [1], 1.XVIII.)

È bene osservare che il sistema di vettori $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^q$ e la matrice $(\Omega_{pq}^{(\varrho)})$ ad esso relativa, che intervengono nelle (4), (5), (6), dipendono dal sottospazio invariante in considerazione.

3. – Ci proponiamo ora la valutazione dei prodotti scalari

$$((R\Phi^{rs}, R\Phi^{hk})), \quad ((R\Psi^{rs}, R\Psi^{hk})), \quad ((R\Phi^{rs}, R\Psi^{hk})) ,$$

che intervengono nelle (4), (5), (6).

A tale scopo conviene introdurre i vettori

$$M^{rs} = -\frac{2}{\pi}\left(s^2 \varphi_{rs}(x),\ r\, s\ \psi_{rs}(x)\right), \qquad N^{rs} = -\left(\frac{2}{\pi} r\, s\ \psi_{rs}(x),\ r^2 \varphi_{rs}(x)\right), \tag{7}$$

ove, come in [1], è:

$$\varphi_{rs}(x) = \operatorname{sen}\{r(x_1 + \tfrac{1}{2}\pi)\}\cdot\operatorname{sen}\{s(x_2 + \tfrac{1}{2}\pi)\}, \quad \psi_{rs}(x) = \cos\{r(x_1 + \tfrac{1}{2}\pi)\}\cdot\cos s\{r(x_2 + \tfrac{1}{2}\pi)\}.$$

Si provano direttamente le uguaglianze

$$\operatorname{div} M^{rs} = \operatorname{div} N^{rs} = 0\,, \tag{8}$$

$$\mathrm{L} M^{rs} = -(r^2 + s^2) M^{rs}\,, \qquad \mathrm{L} N^{rs} = -(r^2 + s^2) N^{rs}\,. \tag{9}$$

Conviene anche notare che

$$N^{rs} = S\, M^{sr}\,. \tag{10}$$

Ciò premesso, le (5.9), (5.10) divengono:

$$\begin{aligned} R\,\Phi^{rs} &= \Delta_{rs}[-(r^2 + s^2)\Phi^{rs} + \sigma M^{rs}]\,, \\ R\,\Psi^{rs} &= \Delta_{rs}[-(r^2 + s^2)\Psi^{rs} + \sigma N^{rs}]\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Dalle formule di GREEN, ricordando l'identità $\mathrm{L}Ru = u$ (cfr. 5.I di [1]), si ottiene:

$$\begin{aligned} ((R\Phi^{rs},\ \Phi^{hk})) &= ((R\Psi^{sr},\ \Psi^{kh})) = -\ \delta_r^h\,\delta_s^k\,, \\ ((R\Phi^{rs},\ \Psi^{hk})) &= ((R\Psi^{sr},\ \Phi^{kh})) = 0\,. \end{aligned} \tag{12}$$

In modo analogo, tenuto conto delle (11), si ricava:

$$((R\Phi^{rs},\ M^{hk})) = ((R\Psi^{sr},\ N^{kh})) = k^2\,\delta_r^h\,\delta_s^k\,. \tag{13}$$

Con un calcolo diretto, sempre in virtù delle (11) e tenuta presente la (8), si prova che, per $h \nsim r$ e $k \nsim s$ è:

$$((R\Phi^{rs}, N^{hk})) = \frac{16}{\pi^2}\,\frac{r\,s\,h\,k\,\Delta_{rs}}{(r^2 - h^2)(s^2 - k^2)}\left\{(r^2+s^2)(h^2+k^2) + \sigma[s^2(h^2+k^2) + h^2(r^2+s^2)]\right\}, \tag{14}$$

mentre negli altri casi il prodotto scalare a primo membro risulta nullo (4).

In conclusione, tenute presenti le (11), dalle (12), (13) discende:

$$((R\Phi^{rs},\ R\Phi^{hk})) = ((R\Psi^{sr},\ R\Psi^{kh})) = \Delta_{hk}(h^2 + k^2 + \sigma k^2)\,\delta_r^h\,\delta_s^k\,. \tag{15}$$

---

(4) Si scriverà brevemente $j \sim l$ se e solo se i due interi positivi j, l hanno la stessa parità. In caso contrario si scriverà $j \nsim l$.

Sempre in base alle (11), dalle (12), (13), (14) segue, quando $h \sim\!\!/\, r$ e $k \sim\!\!/\, s$,

$$((R\Phi^{rs},\ R\Psi^{hk})) =$$

(16)

$$= \frac{16}{\pi^2}\sigma \frac{r\,s\,h\,k\ \Delta_{rs}\,\Delta_{hk}}{(r^2-h^2)\,(s^2-k^2)}\left\{(r^2+s^2)(h^2+k^2)+\sigma\left[s^2(h^2+k^2)+h^2(r^2+s^2)\right]\right\},$$

mentre negli altri casi il prodotto scalare a primo membro risulta nullo.

4. – Ci proponiamo ora di valutare i prodotti scalari $((R\Phi^{rs},\ \omega^p)), ((R\Psi^{rs},\ \omega^p))$ che intervengono nelle (4), (5), (6) del n. 2.

È bene ricordare che in ogni sottospazio invariante Z, le componenti dei vettori ω^p sono polinomi omogenei dello stesso grado ν_p (5).

Come è stato osservato in [1] (teor. 2.I), ogni vettore ω^p determina univocamente un vettore armonico a^p a due componenti polinomi omogenei di grado ν_p. Posto

$$\hat{a}{}^p = (x_1^2 + x_2^2)\ \text{grad div}\ a^p\,, \tag{17}$$

riesce

$$\omega^p = a^p + \lambda_{\nu_p,\sigma}\, \hat{a}{}^p\,, \tag{18}$$

ove:

$$\lambda_{\nu_p,\sigma} = \begin{cases} 0 & \text{se } \nu_p = 1 \\ -\dfrac{\sigma}{2(2+\sigma)(\nu_p - 1)} & \text{se } \nu_p > 1\,. \end{cases} \tag{19}$$

Ciò premesso, si verifica subito, applicando la formula di Green, che

$$((\Phi^{rs},\ \omega^p)) = ((\Psi^{rs},\ \omega^p)) = 0\,. \tag{20}$$

Ne segue che, in virtù delle (11), il calcolo di

$$((R\Phi^{rs},\ \omega^p)),\qquad ((R\Psi^{rs},\ \omega^p)),$$

---

(5) Il sistema $\{\omega^p\}$ in considerazione è quello indicato in [1] alla fine del paragrafo 5.

è ricondotto a quello di

$$((M^{rs}, \omega^{p})), \qquad ((N^{rs}, \omega^{p})).$$

In base alla (18) tutto si riconduce dunque a calcolare i prodotti scalari

$$((M^{rs}, a^{p})), \qquad ((M^{rs}, \hat{a}{}^{p})), \qquad ((N^{rs}, a^{p})), \qquad ((N^{rs}, \hat{a}{}^{p})).$$

Posto ora

$$((u, v))_0 = \sum_{i}^{1,2} \int_{A} \operatorname{grad} u_i \times \operatorname{grad} v_i \, dx ,$$

a causa delle (8), le quantità precedenti si riducono rispettivamente ai prodotti scalari

$$(21) \qquad ((M^{rs}, a^{p}))_0 , \quad ((M^{rs}, \hat{a}{}^{p}))_0 , \quad ((N^{rs}, a^{p}))_0 , \quad ((N^{rs}, \hat{a}{}^{p}))_0 ,$$

indipendenti dal parametro σ.

Essi, come si vedrà ai nn. 5, 6, sono *forme quadratiche* nelle variabili

$$(22) \qquad I^{n}_{2m} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^{2m} \cos nx \, dx , \qquad J^{n}_{2m-1} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^{2m-1} \operatorname{sen} nx \, dx ,$$

ove $m = 0, 1, \ldots, p$; $n = r, s$.

Ora, poichè risulta direttamente $I^{n}_{0} = \frac{2}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$, gli integrali I^{n}_{2m}, J^{n}_{2m-1}, fissato n, si possono calcolare per ricorrenza mediante le formule:

$$I^{n}_{2m} = \frac{2}{n} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} - \frac{2m}{n} J^{n}_{2m-1} ,$$

$$J^{n}_{2m-1} = - \frac{2}{n} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m-1} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{2m-1}{n} I^{n}_{2m-2} .$$

Per questa via si può pervenire alla valutazione dei prodotti scalari $((R\Phi^{rs}, \omega^{p}))$, $((R\Psi^{rs}, \omega^{p}))$ considerati all'inizio di questo numero.

5. – Si considerino ora, in particolare, i sottospazi $W^{\alpha\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 0, 1)$. In questi casi, come risulta dalle (4), (5), interessano soltanto prodotti scalari del tipo $((R\Phi^{rs}, \omega^{p}))$ e quindi, tenuto conto delle (11), (20) e di quanto esposto

al n. **4**, per valutare i relativi invarianti $\mathscr{I}_1^2(G_\varrho^{\lambda\alpha\beta})$ non resta ormai altro che dare l'espressione esplicita [in funzione degli integrali (22)] dei prodotti scalari $((M^{rs}, a^p))$, $((M^{rs}, \overset{\wedge}{a^p}))$ per i valori di r, s che effettivamente intervengono.

A tal fine, conviene introdurre le quantità

$$(23)\qquad \begin{aligned} \alpha_p^{rs} &= \sum_{i=1}^{2} \int_A \frac{\partial\, \mathrm{Re}(x_1+ix_2)^{2p-1}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathrm{sen}\, rx_1 \cdot \cos sx_2)\, dx, \\ \xi_p^{rs} &= \sum_{i=1}^{2} \int_A \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(x_1^2+x_2^2)\frac{\partial^2\, \mathrm{Re}(x_1+ix_2)^{2p-1}}{\partial x_1^2}\right]\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathrm{sen}\, rx_1 \cdot \cos sx_2)\, dx, \end{aligned}$$

indipendenti da σ e dal sottospazio in esame.

Si ricordi ora che negli spazi $W^{11\beta}$ risulta

$$(24)\qquad a^p \equiv \left(\mathrm{Re}(x_1+ix_2)^{2p-1},\quad (-1)^{\beta+1}\,\mathrm{Re}(x_2+ix_1)^{2p-1}\right)\ (^6).$$

Si verifica poi facilmente che

$$(25)\qquad \begin{aligned} ((M^{2h,2k-1}, a^p))_0 &= \frac{2}{\pi}(-1)^{h+k}\left[(2k-1)^2\,\alpha_p^{2h,2k-1} + (-1)^\beta\, 2h(2k-1)\,\alpha_p^{2k-1,2h}\right], \\ ((M^{2h,2k-1}, \overset{\wedge}{a^p}))_0 &= \frac{2}{\pi}(-1)^{h+k}[1+(-1)^{p+\beta}]\left[(2k-1)^2\,\xi_p^{2h,2k-1} + (-1)^\beta 2h(2k-1)\xi_p^{2k-1,2h}\right]. \end{aligned}$$

Analogamente negli spazi $W^{00\beta}$, risulta

$$(26)\qquad a^p \equiv \left(\mathrm{Re}(x_2+ix_1)^{2p-1},\quad (-1)^{\beta+1}\,\mathrm{Re}(x_1+ix_2)^{2p-1}\right)\ (^7).$$

Ne discende

$$(27)\qquad \begin{aligned} ((M^{2k-1,2h}, a^p))_0 &= \frac{2}{\pi}(-1)^{h+k}\left[4h^2\,\alpha_p^{2h,2k-1} + (-1)^\beta\, 2h(2k-1)\alpha_p^{2k-1,2h}\right], \\ ((M^{2k-1,2h}, \overset{\wedge}{a^p}))_0 &= \frac{2}{\pi}(-1)^{h+k+1}\left[4h^2\,\xi_p^{2h,2k-1} + (-1)^\beta 2h(2k-1)\xi_p^{2k-1,2h}\right][1-(-1)^{p+\beta}]. \end{aligned}$$

---

(6) Nel caso attuale a^p coincide col vettore B^p del paragrafo 2 di [1].
(7) Nel caso attuale a^p coincide col vettore C^p del paragrafo 2 di [1].

Le quantità $\alpha_p^{2h,2k-1}$, $\alpha_p^{2k-1,2h}$, $\xi_p^{2h,2k-1}$, $\xi_p^{2k-1,2h}$, che intervengono nelle (25), (27), si esprimono a loro volta come forme quadratiche nelle variabili (22). Precisamente si ha:

$$\alpha_p^{2h,2k-1} = 0,$$

$$\alpha_p^{2k-1,2h} = [4h^2 + (2k-1)^2] \sum_{r=0}^{p-1} (-1)^r \binom{2p-1}{2r} J_{2p-2r-1}^{2k-1} I_{2r}^{2h},$$

$$\xi_p^{2h,2k-1} = -2^4(2p-1)(p-1)^2 \sum_{r=0}^{p-2} (-1)^r \binom{2p-3}{2r} J_{2p-2r-3}^{2h} I_{2r}^{2k-1},$$

$$\xi_p^{2k-1,2h} = 2(2p-1)(p-1)[4h^2 + (2k-1)^2] \Bigg\{ (-1)^p (2p-3) J_1^{2k-1} I_{2(p-1)}^{2h} +$$

$$+ \sum_{r=1}^{p-2} (-1)^r \left[\binom{2p-3}{2r} - \binom{2p-3}{2r-2} \right] J_{2p-2r-1}^{2k-1} I_{2r}^{2h} \Bigg\} \text{ (}^{8}\text{)}.$$

In conclusione lo scopo che ci siamo proposti all'inizio di questo numero è raggiunto.

6. – Considerato ora il sottospazio invariante W^{10} occorre indicare esplicitamente l'espressione dei prodotti scalari (21), che intervengono nel caso attuale, per mezzo degli integrali (22), secondo quanto si è annunciato al n. **4**.

Conviene scegliere l'indice ϱ pari. Posto $\varrho = 2\varrho'$, indicherò con ω^l il vettore corrispondente tramite la (18) al vettore

(28) $$a^l \equiv \left(\mathrm{Re}(x_1 + ix_2)^{2l}, \quad 0\right),$$

e con $\omega^{\varrho'+l}$ quello corrispondente al vettore

(29) $$a^{\varrho'+l} \equiv \left(0, \quad \mathrm{Im}(x_1 + ix_2)^{2l}\right).$$

Si constata immediatamente che

(30) $$\hat{a}{}^l = \hat{a}{}^{\varrho'+l}.$$

(8) In queste espressioni per taluni valori di p alcune sommatorie perdono senso. Si intende allora di sostituirle con lo zero.

Il calcolo diretto mostra che

$$((M^{2h-1,2k-1},\ a^l))_0 = ((N^{2h,2k},\ a^{\varrho'+l}))_0 = 0\ ,$$

$$((M^{2h-1,2k-1},\ a^{\varrho'+l}))_0 = \frac{4}{\pi}(-1)^{h+k}\,[(2h-1)^2 + (2k-1)^2]\sum_{r=1}^{l}(-1)^r\binom{2l}{2r} r\,(2r-1) I^{2k-1}_{2r-2}\, I^{2h-1}_{2l-2r},$$

$$((N^{2h,2k},\ a^l))_0 = -\frac{8}{\pi}(-1)^{h+k}\,[4h^2+4k^2]\sum_{r=1}^{l-1}(-1)^r\binom{2l}{2r} r(l-r) J^{2k}_{2r-1}\, J^{2h}_{2l-2r-1}\ ,$$

$$\begin{aligned}((M^{2h-1,2k-1},\ \hat{a}^l))_0 = \frac{8}{\pi}(-1)^{h+k+1}\Big\{&(2k-1)^2\,(4l-2)\cdot\\ &\cdot\sum_{r=1}^{l}(-1)^r\binom{2l}{2r} r(2r-1)\, I^{2h-1}_{2l-2r}\, I^{2k-1}_{2r-2} + [(2h-1)^2+(2k-1)^2]\cdot\\ &\cdot\sum_{r=1}^{l}(-1)^r\binom{2l}{2r} r(2r-1)[2l(l-r)+(2r-1)(1-l)] I^{2h-1}_{2l-2r}\, I^{2k-1}_{2r-2}\Big\}\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((N^{2h,2k},\ \hat{a}^l))_0 = \frac{16}{\pi}(-1)^{h+k+1}\,(2l-1)\Big\{&(4h^2+4k^2)\cdot\\ &\cdot\sum_{r=1}^{l-1}(-1)^r\binom{2l}{2r}(l-r)\,r(\,l-2r) J^{2h}_{2l-2r-1}\, J^{2k}_{2r-1} -\\ &-8h^2\sum_{r=1}^{l-1}(-1)^r\binom{2l}{2r} r(l-r)\, J^{2h}_{2l-2r-1}\, J^{2k}_{2r-1}\Big\}\,{}^{(9)}\ .\end{aligned}$$

7. – Conviene ricordare che la matrice $(\Omega^{(\varrho)}_{pq})$ che interviene nell'espressione dell'invariante $\mathscr{I}^2_1(G^z_\varrho)$ (n. 2), è, per definizione, la matrice inversa della matrice di GRAM, di ordine ϱ, $\{((\omega^p,\ \omega^q))\}$ (10). Mostriamo ora come si possa procedere alla valutazione dei prodotti scalari $((\omega^p,\ \omega^q))$ nei singoli sottospazi invarianti. La costruzione della matrice inversa $(\Omega^{(\varrho)}_{pq})$ può successivamente essere eseguita con ausilio del calcolatore.

---

(9) Anche in queste espressioni si adotta la convenzione di cui all'annotazione (8).
(10) Cfr. [1], paragrafo 5.

È utile osservare anzitutto che, in virtù della (18), riesce

$$\operatorname{div}\omega^p = \frac{2}{2+\sigma}\operatorname{div} a^p,$$

onde può scriversi

$$((\omega^p,\ \omega^q)) = ((\omega^p,\ \omega^q))_0 + \frac{4\sigma}{(2+\sigma)^2}\int_A \operatorname{div}a^p \operatorname{div}a^q \, dx\,. \tag{31}$$

D'altra parte, sempre per la (18), risulta:

$$\begin{aligned} ((\omega^p,\ \omega^q))_0 = ((a^p,\ a^q))_0 &+ \lambda_{\nu_q,\sigma}((a^p,\ \hat{a}^q))_0 + \\ &+ \lambda_{\nu_p,\sigma}((\hat{a}^p,\ a^q))_0 + \lambda_{\nu_p,\sigma}\lambda_{\nu_q,\sigma}((\hat{a}^p,\ \hat{a}^q))_0\,. \end{aligned} \tag{32}$$

Per il calcolo dei prodotti scalari a secondo membro è opportuno introdurre gli integrali seguenti, la cui valutazione è immediata:

$$h_{rs} = \int_A \frac{\partial\,\mathrm{Re}(x_1+ix_2)^r}{\partial x_1}\,\frac{\partial\,\mathrm{Re}(x_1+ix_2)^s}{\partial x_1}\,dx, \quad k_{rs} = \int_A \frac{\partial\,\mathrm{Re}(x_1+ix_2)^r}{\partial x_2}\,\frac{\partial\,\mathrm{Re}(x_1+ix_2)^s}{\partial x_2}\,dx;$$

$$m_{rs} = \sum_{i=1}^{2}\int_A \frac{\partial\,\mathrm{Re}(x_1+ix_2)^r}{\partial x_i}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left[(x_1^2+x_2^2)\,\frac{\partial^2\,\mathrm{Re}(x_1+ix_2)^s}{\partial x_1^2}\right]dx\,,$$

$$\tilde{m}_{rs} = \sum_{i=1}^{2}\int_A \frac{\partial\,\mathrm{Im}(x_1+ix_2)^r}{\partial x_i}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left[(x_1^2+x_2^2)\,\frac{\partial^2\,\mathrm{Re}(x_1+ix_2)^s}{\partial x_1\,\partial x_2}\right]dx;$$

$$n_{rs} = \sum_{i=1}^{2}\int_A \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(x_1^2+x_2^2)\,\frac{\partial^2\,\mathrm{Re}(x_1+ix_2)^r}{\partial x_1^2}\right]\frac{\partial}{\partial x_i}\left[(x_1^2+x_2^2)\,\frac{\partial^2\,\mathrm{Re}(x_1+ix_2)^s}{\partial x_1^2}\right]dx\,,$$

$$\tilde{n}_{rs} = \sum_{i=1}^{2}\int_A \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(x_1^2+x_2^2)\,\frac{\partial^2\,\mathrm{Re}(x_1+ix_2)^r}{\partial x_1\,\partial x_2}\right]\frac{\partial}{\partial x_i}\left[(x_1^2+x_2^2)\,\frac{\partial^2\,\mathrm{Re}(x_1+ix_2)^s}{\partial x_1\,\partial x_2}\right]dx\,.$$

Sussiste la relazione

$$h_{2p-1,2q-1} = k_{2p-1,2q-1} = 0 \qquad \text{con } p \not\sim q\,.$$

8. – Si considerino ora i sottospazi $W^{11\beta}$ ($\beta = 0, 1$). Tenuto conto della definizione di (24) a^p e della (17), si trova:

$$((a^p, a^q))_0 = 2\, h_{2p-1,2q-1} + 2\, k_{2p-1,2q-1}\,,$$

$$((a^p, \hat{a}{}^q))_0 = 2\,[1 + (-1)^{\beta+q}]\, m_{2p-1,2q-1}\,,$$

$$((\hat{a}{}^p, \hat{a}{}^q))_0 = 2\,[1 + (-1)^{\beta+p}][1 + (-1)^{\beta+q}]\, n_{2p-1,2q-1}\,.$$

Risulta inoltre:

$$\int_A \operatorname{div} a^p \operatorname{div} a^q\, dx = [1 + (-1)^{\beta+p}][1 + (-1)^{\beta+q}]\, h_{2p-1,2q-1}\,.$$

Analogamente dalle (26), (17) segue, negli spazi $W^{00\beta}$ ($\beta = 0, 1$):

$$((a^p, a^q))_0 = 2\, h_{2p-1,2q-1} + 2\, k_{2p-1,2q-1}\,,$$

$$((a^p, \hat{a}{}^q))_0 = -2\,[1 - (-1)^{\beta+q}]\, m_{2p-1,2q-1}\,,$$

$$((\hat{a}{}^p, \hat{a}{}^q))_0 = 2\,[1 - (-1)^{\beta+p}][1 - (-1)^{\beta+q}]\, n_{2p-1,2q-1}\,,$$

e risulta

$$\int_A \operatorname{div} a^p \operatorname{div} a^q\, dx = [1 - (-1)^{\beta+p}][1 - (-1)^{\beta+q}]\, k_{2p-1,2q-1}\,.$$

Infine dalle (28), (29), tenuto conto anche delle (17), (30), segue, nello spazio W^{10},

$$((a^l, a^j))_0 = ((a^{\varrho'+l}, a^{\varrho'+j}))_0 = h_{2l,2j} + k_{2l,2j}\,, \qquad ((a^l, a^{\varrho'+j}))_0 = 0\,,$$

$$((a^l, \hat{a}{}^j))_0 = m_{2l,2j}\,, \qquad ((a^{\varrho'+l}, \hat{a}{}^j))_0 = \tilde{m}_{2l,2j}\,,$$

$$((\hat{a}{}^l, \hat{a}{}^j)) = n_{2l,2j} + \tilde{n}_{2l,2j}\,,$$

gli indici l, j percorrendo gli interi $1, 2, \ldots, \varrho'$. Inoltre

$$\int_A \operatorname{div} a^l \operatorname{div} a^j\, dx = h_{2l,2j}\,.$$

Tenuto presente che $\operatorname{div} a^{\varrho'+l} = \operatorname{div} a^l$, segue subito

$$\int_A \operatorname{div} a^l \operatorname{div} a^{\varrho'+j}\, dx = \int_A \operatorname{div} a^{\varrho'+l} \operatorname{div} a^{\varrho'+j}\, dx = h_{2l,2j}\,.$$

In conclusione, nei singoli sottospazi invarianti, i prodotti scalari $((a^p, a^q))_0$, $((a^p, \hat{a}^q))_0$, $((\hat{a}^p, a^q))_0$, $((\hat{a}^p, \hat{a}^q))_0$ e gli integrali a secondo membro della (31) sono combinazioni lineari delle quantità

$$h_{rs}\,, \quad k_{rs}\,, \quad m_{rs}\,, \quad \tilde{m}_{rs}\,, \quad n_{rs}\,, \quad \tilde{n}_{rs}$$

introdotte alla fine del n. **7**. Pertanto la valutazione dei prodotti scalari $((\omega^p, \omega^q))$ nei sotto-pazi invarianti $W^{\alpha\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 0, 1)$, W^{10} è ottenuta.

9. – Nelle tabelle che seguono sono riportate le limitazioni per difetto e per eccesso degli autovalori del problema (1) del n. **1**, corrispondenti a diverse scelte del parametro σ. Più precisamente, per ogni fissato σ, vengono indicate le approssimazioni per difetto e per eccesso ottenute nei singoli sottospazi invarianti; indi le migliori approssimazioni degli autovalori λ_k del problema (1), dedotte da quelle.

I valori per eccesso nei singoli sottospazi invarianti sono stati tutti ottenuti applicando il metodo di Rayleigh-Ritz e operando con matrici di ordine 25; i valori per difetto sono stati ottenuti col metodo degli invarianti ortogonali oppure sfruttando la proprietà (conseguenza del principio di minimo-massimo), che in ogni sottospazio invariante Z il k-esimo autovalore è una funzione non decrescente di σ.

Nel compilare le tabelle degli autovalori λ_k di (1), si è applicato un procedimento di G. Fichera [11] per dedurre dalle limitazioni già note nei singoli sottospazi, la migliore limitazione per ciascun λ_k.

Nelle suddette tabelle sono riportati valori per difetto δ_k e valori per eccesso ε_k degli autovalori λ_k, per i quali riesce:

$$(\varepsilon_k - \delta_k)/\varepsilon_k < 0.25 \tag{33}$$

per $\sigma = 0.5$, $\sigma = 1$, $\sigma = 1.5$;

$$(\varepsilon_k - \delta_k)/\varepsilon_k < 0.30 \tag{34}$$

per $\sigma = 2$, $\sigma = 3$.

Si è tenuto conto infine che gli autovalori negli spazi W^{10} e W^{01} coincidono.

Per motivi di ordine tecnico, nelle Tabelle relative ai singoli sottospazi non vengono sempre rispettate le condizioni (33) e (34).

---

(11) Si confronti G. Fichera, *The problem of estimating eigenvalues when estimates in invariant subspaces are known*, Atti Accad. Sci. Torino **102** (1967-1968), 347-355.

W^{111}		$\sigma = 0.5$
λ_k^{111}	difetto	eccesso
$k = 1$	7.212	7.301
$= 2$	15.037	15.888
$= 3$	21.952	24.889
$= 4$	25.232	30.015
$= 5$	29	35.803
$= 6$	37	50.639
$= 7$	41	52.608
$= 8$	45	56.261
$= 9$	53	63.788
$= 10$	61	71.137
$= 11$	65	85.239
$= 12$	65	85.417
$= 13$	73	97.062
$= 14$	85	98.695
$= 15$	85	103.376
$= 16$	89	111.787
$= 17$	97	124.848
$= 18$	101	126.066
$= 19$	109	135.669
$= 20$	113	142.501
$= 21$	117	151.556
$= 22$	125	160.805
$= 23$	125	164.321
$= 24$	137	175.321
$= 25$	145	182.136

W^{110}		$\sigma = 0.5$
λ_k^{110}	difetto	eccesso
$k = 1$	6.511	6.576
$= 2$	13.078	13.621
$= 3$	21.855	24.718
$= 4$	25	28.310
$= 5$	29	32.319
$= 6$	37	43.898
$= 7$	41	52.498
$= 8$	45	55.870
$= 9$	53	62.108
$= 10$	61	66.583
$= 11$	65	76.848
$= 12$	65	85.236
$= 13$	73	91.446
$= 14$	85	96.847
$= 15$	85	99.511
$= 16$	89	108.879
$= 17$	97	119.660
$= 18$	101	124.557
$= 19$	109	126.154
$= 20$	113	142.518
$= 21$	117	144.988
$= 22$	125	151.975
$= 23$	125	163.359
$= 24$	137	168.871
$= 25$	145	177.199

W^{001}	$\sigma = 0.5$	
λ_k^{001}	difetto	eccesso
$k = 1$	5.783	5.816
$= 2$	16.129	16.862
$= 3$	17.997	19.033
$= 4$	27.018	30.961
$= 5$	30.720	36.937
$= 6$	37	41.739
$= 7$	41	48.091
$= 8$	45	57.959
$= 9$	53	65.040
$= 10$	61	72.980
$= 11$	65	74.644
$= 12$	65	80.953
$= 13$	73	91.221
$= 14$	85	99.257
$= 15$	85	101.268
$= 16$	89	111.056
$= 17$	97	118.352
$= 18$	101	127.301
$= 19$	109	131.227
$= 20$	113	139.122
$= 21$	117	145.558
$= 22$	125	150.763
$= 23$	125	158.079
$= 24$	137	165.578
$= 25$	145	183.232

W^{000}	$\sigma = 0.5$	
λ_k^{000}	difetto	eccesso
$k = 1$	5.074	5.097
$= 2$	15.039	15.648
$= 3$	17	17.770
$= 4$	25	26.574
$= 5$	30.530	36.861
$= 6$	37	41.050
$= 7$	41	45.211
$= 8$	45	52.098
$= 9$	53	64.838
$= 10$	61	65.703
$= 11$	65	72.870
$= 12$	65	79.575
$= 13$	73	87.891
$= 14$	85	92.709
$= 15$	85	101.200
$= 16$	89	106.580
$= 17$	97	110.949
$= 18$	101	122.142
$= 19$	109	126.496
$= 20$	113	131.616
$= 21$	117	144.257
$= 22$	125	145.653
$= 23$	125	157.970
$= 24$	137	164.336
$= 25$	145	177.893

W^{10}, W^{01}		$\sigma = 0.5$
λ_k^{10}	difetto	eccesso
$k = 1$	2.474	2.480
$= 2$	9.098	9.401
$= 3$	10.365	10.819
$= 4$	13.429	14.463
$= 5$	18	20.176
$= 6$	20	23.230
$= 7$	21.026	25.835
$= 8$	26	28.642
$= 9$	26	35.315
$= 10$	32	37.893
$= 11$	34	40.069
$= 12$	34	41.914
$= 13$	40	48.027
$= 14$	40	50.079
$= 15$	50	55.553
$= 16$	50	56.956
$= 17$	50	61.693
$= 18$	52	65.791
$= 19$	52	68.616
$= 20$	58	72.927
$= 21$	58	75.193
$= 22$	68	81.518
$= 23$	68	82.529
$= 24$	72	88.669
$= 25$	74	91.725

$\sigma = 0.5$

λ_k	difetto	eccesso	λ_k	difetto	eccesso
$k = 1$	2.474	2.480	$k = 36$	29	35.803
$= 2$	2.474	2.480	$= 37$	30.530	36.861
$= 3$	5.074	5.097	$= 38$	30.720	36.937
$= 4$	5.783	5.816	$= 39$	32	37.893
$= 5$	6.511	6.576	$= 40$	32	37.893
$= 6$	7.212	7.301	$= 41$	34	40.068
$= 7$	9.098	9.401	$= 42$	34	40.068
$= 8$	9.098	9.401	$= 43$	34	41.050
$= 9$	10.365	10.819	$= 44$	34	41.739
$= 10$	10.365	10.819	$= 45$	37	41.914
$= 11$	13.078	13.621	$= 46$	37	41.914
$= 12$	13.429	14.463	$= 47$	37	43.898
$= 13$	13.429	14.463	$= 48$	37	45.211
$= 14$	15.037	15.648	$= 49$	40	48.027
$= 15$	15.039	15.888	$= 50$	40	48.027
$= 16$	16.129	16.862	$= 51$	40	48.091
$= 17$	17	17.770	$= 52$	40	50.079
$= 18$	17.997	19.033	$= 53$	41	50.079
$= 19$	18	20.176	$= 54$	41	50.639
$= 20$	18	20.176	$= 55$	41	52.098
$= 21$	20	23.230	$= 56$	41	52.498
$= 22$	20	23.230	$= 57$	45	52.607
$= 23$	21.026	24.718	$= 58$	45	55.552
$= 24$	21.026	24.889	$= 59$	45	55.552
$= 25$	21.855	25.834	$= 60$	45	55.870
$= 26$	21.952	25.834	$= 61$	50	56.261
$= 27$	25	26.574	$= 62$	50	56.956
$= 28$	25	28.309	$= 63$	50	56.956
$= 29$	25.232	28.642	$= 64$	50	57.959
$= 30$	26	28.642	$= 65$	50	61.693
$= 31$	26	30.015	$= 66$	50	61.693
$= 32$	26	30.961	$= 67$	52	62.108
$= 33$	26	32.319	$= 68$	52	63.788
$= 34$	27.018	35.315	$= 69$	52	64.838
$= 35$	29	35.315	$= 70$	52	65.140

(continua)

(continuazione della Tabella di pagina precedente)

	$\sigma = 0.5$	
λ_k	difetto	eccesso
$k = 71$	53	65.703
$= 72$	53	65.791
$= 73$	53	65.791
$= 74$	53	66.583
$= 75$	58	68.616
$= 76$	58	68.616
$= 77$	58	71.137
$= 78$	58	72.870
$= 79$	61	72.927
$= 80$	61	72.927
$= 81$	61	72.980
$= 82$	61	74.644
$= 83$	65	75.192
$= 84$	65	75.192
$= 85$	65	76.848
$= 86$	65	79.574
$= 87$	65	80.953
$= 88$	65	81.518
$= 89$	65	81.518
$= 90$	65	82.528
$= 91$	68	82.528
$= 92$	68	85.236
$= 93$	68	85.238
$= 94$	68	85.417
$= 95$	72	87.891
$= 96$	72	88.669
$= 97$	73	88.669
$= 98$	73	91.220
$= 99$	73	91.446
$= 100$	73	91.725
$= 101$	74	91.725

W^{111}		$\sigma = 1$
λ_k^{111}	difetto	eccesso
$k = 1$	9.142	9.492
$= 2$	16.206	18.436
$= 3$	22.405	29.787
$= 4$	25.232	34.311
$= 5$	29	44.676
$= 6$	37	53.836

W^{110}		$\sigma = 1$
λ_k^{110}	difetto	eccesso
$k = 1$	7.792	8.001
$= 2$	13.091	14.160
$= 3$	21.934	28.498
$= 4$	25	32.010
$= 5$	29	37.097
$= 6$	37	46.897
$= 7$	41	54.220

W^{001}		$\sigma = 1$
λ_k^{001}	difetto	eccesso
$k = 1$	6.476	6.575
$= 2$	16.129	17.258
$= 3$	20.215	23.975
$= 4$	27.018	35.604
$= 5$	30.720	37.380
$= 6$	37	48.438

W^{000}		$\sigma = 1$
λ_k^{000}	difetto	eccesso
$k = 1$	5.113	5.147
$= 2$	15.453	16.463
$= 3$	17.970	19.616
$= 4$	25	28.165
$= 5$	30.530	37.171
$= 6$	37	45.126
$= 7$	41	51.024
$= 8$	45	60.561
$= 9$	53	65.387

W^{10}, W^{01}		$\sigma = 1$
λ_k^{10}	difetto	eccesso
$k = 1$	2.926	2.932
$= 2$	9.623	9.817
$= 3$	11.931	12.305
$= 4$	17.256	18.448
$= 5$	19.573	21.366
$= 6$	22.922	25.963
$= 7$	23.691	27.095
$= 8$	28.400	34.916
$= 9$	30.137	38.306
$= 10$	32	41.900

$\sigma = 1$

λ_k	difetto	eccesso
$k = 1$	2.926	2.932
$= 2$	2.926	2.932
$= 3$	5.113	5.147
$= 4$	6.476	6.575
$= 5$	7.792	8.001
$= 6$	9.142	9.492
$= 7$	9.623	9.817
$= 8$	9.623	9.817
$= 9$	11.931	12.305
$= 10$	11.931	12.305
$= 11$	13.091	14.160
$= 12$	15.453	16.463
$= 13$	16.129	17.258
$= 14$	16.206	18.436
$= 15$	17.256	18.448
$= 16$	17.256	18.448
$= 17$	17.970	19.616
$= 18$	19.573	21.366
$= 19$	19.573	21.366
$= 20$	20.215	23.975
$= 21$	21.934	25.963
$= 22$	22.405	25.963
$= 23$	22.922	27.095
$= 24$	22.922	27.095
$= 25$	23.691	28.165
$= 26$	23.691	28.498
$= 27$	25	29.787
$= 28$	25	32.010
$= 29$	25.232	34.311
$= 30$	27.018	34.916
$= 31$	28.400	34.916
$= 32$	28.400	35.604
$= 33$	29	37.097
$= 34$	29	37.171
$= 35$	30.137	37.380
$= 36$	30.137	38.306
$= 37$	30.530	38.306

W^{000} $\sigma = 1.5$

λ_k^{000}	difetto	eccesso
$k = 1$	5.136	5.179
$= 2$	15.410	16.653
$= 3$	18.835	21.253
$= 4$	25	30.132
$= 5$	30.530	37.411
$= 6$	37	46.179
$= 7$	41	55.355

W^{001} $\sigma = 1.5$

λ_k^{001}	difetto	eccesso
$k = 1$	7.075	7.296
$= 2$	16.129	17.478
$= 3$	20.349	28.553
$= 4$	27.018	37.145
$= 5$	30.720	39.618

W^{110} $\sigma = 1.5$

λ_k^{110}	difetto	eccesso
$k = 1$	8.797	9.223
$= 2$	13.210	14.800
$= 3$	21.934	28.945
$= 4$	25	35.898

W^{111} $\sigma = 1.5$

λ_k^{111}	difetto	eccesso
$k = 1$	10.763	11.589
$= 2$	16.838	20.669
$= 3$	22.405	31.351
$= 4$	25.232	41.849

W^{10}, W^{01} $\sigma = 1.5$

λ_k^{10}	difetto	eccesso
$k = 1$	2.926	3.363
$= 2$	9.623	9.989
$= 3$	11.931	13.767
$= 4$	17.256	20.694
$= 5$	19.573	23.891
$= 6$	22.922	26.366
$= 7$	23.691	29.741
$= 8$	28.400	37.885

$\sigma = 1.5$

λ_k	difetto	eccesso
$k = 1$	2.926	3.363
$= 2$	2.926	3.363
$= 3$	5.136	5.179
$= 4$	7.075	7.296
$= 5$	8.797	9.223
$= 6$	9.623	9.989
$= 7$	9.623	9.989
$= 8$	10.763	11.589
$= 9$	11.931	13.767
$= 10$	11.931	13.767
$= 11$	13.210	14.800
$= 12$	15.410	16.653
$= 13$	16.129	17.478
$= 14$	16.838	20.669
$= 15$	17.256	20.694
$= 16$	17.256	20.694
$= 17$	18.835	21.253
$= 18$	19.573	23.891
$= 19$	19.573	23.891
$= 20$	20.349	26.366
$= 21$	21.934	26.366
$= 22$	22.405	28.553
$= 23$	22.922	28.945
$= 24$	22.922	29.741
$= 25$	23.691	29.741
$= 26$	23 691	30.132
$= 27$	25	31.351

W^{001} $\sigma = 2$

λ_k^{001}	difetto	eccesso
$k = 1$	7.585	7.983
$= 2$	14.970	17.688
$= 3$	20.349	32.455
$= 4$	27.018	37.418
$= 5$	30.720	42.446

W^{000} $\sigma = 2$

λ_k^{000}	difetto	eccesso
$k = 1$	5.136	5.202
$= 2$	15.410	16.742
$= 3$	18.835	22.335
$= 4$	25	32.277
$= 5$	30.530	37.798

W^{111} $\sigma = 2$

λ_k^{111}	difetto	eccesso
$k = 1$	12.083	13.600
$= 2$	17.121	22.532
$= 3$	21.952	32.858
$= 4$	25.232	49.243

W^{110} $\sigma = 2$

λ_k^{110}	difetto	eccesso
$k = 1$	9.515	10.190
$= 2$	13.477	15.629
$= 3$	21.855	29.231
$= 4$	25	37.673

W^{10}, W^{01} $\sigma = 2$

λ_k^{10}	difetto	eccesso
$k = 1$	3.244	3.779
$= 2$	9.623	10.113
$= 3$	11.931	15.018
$= 4$	17.256	21.776
$= 5$	19.573	26.319
$= 6$	22.922	27.410
$= 7$	23.691	32.226
$= 8$	28.400	39.790

$\sigma = 2$

λ_k	difetto	eccesso
$k = 1$	3.244	3.779
$= 2$	3.244	3.779
$= 3$	5.136	5.202
$= 4$	7.585	7.983
$= 5$	9.515	10.113
$= 6$	9.623	10.113
$= 7$	9.623	10.189
$= 8$	11.931	13.600
$= 9$	11.931	15.018
$= 10$	12.083	15.018
$= 11$	13.477	15.629
$= 12$	14.970	16.742
$= 13$	15.410	17.688
$= 14$	17.121	21.776
$= 15$	17.256	21.776
$= 16$	17.256	22.335
$= 17$	18.835	22.532
$= 18$	19.573	26.319
$= 19$	19.573	26.319
$= 20$	20.349	27.410
$= 21$	21.855	27.410
$= 22$	21.952	29.231
$= 23$	22.922	32.226
$= 24$	22.922	32.226
$= 25$	23.691	32.277
$= 26$	23.691	32.455
$= 27$	25	32.858

W^{111}		$\sigma = 3$
λ_k^{111}	difetto	eccesso
$k = 1$	13.971	17.355
$= 2$	17.200	25.180
$= 3$	21.952	36.584

W^{001}		$\sigma = 3$
λ_k^{001}	difetto	eccesso
$k = 1$	8.385	9.256
$= 2$	14.970	18.160
$= 3$	20.349	36.789

W^{110}		$\sigma = 3$
λ_k^{110}	difetto	eccesso
$k = 1$	10.278	11.376
$= 2$	14.324	17.855
$= 3$	21.855	29.772

W^{000}		$\sigma = 3$
λ_k^{000}	difetto	eccesso
$k = 1$	5.136	5.232
$= 2$	15.410	16.825
$= 3$	18.835	23.488
$= 4$	25	35.235
$= 5$	30.530	39.365

W^{10}, W^{01}		$\sigma = 3$
λ_k^{10}	difetto	eccesso
$k = 1$	4.381	4.568
$= 2$	9.623	10.332
$= 3$	11.931	16.768
$= 4$	17.256	23.611
$= 5$	19.573	27.319

$\sigma = 3$

λ_k	difetto	eccesso
$k = 1$	4.381	4.568
$= 2$	4.381	4.568
$= 3$	5.136	5.232
$= 4$	8.395	9.256
$= 5$	9.623	10.332
$= 6$	9.623	10.332
$= 7$	10.278	11.376
$= 8$	11.931	16.768
$= 9$	11.931	16.768
$= 10$	13.971	16.825
$= 11$	14.324	17.355
$= 12$	14.970	17.855
$= 13$	15.410	18.160
$= 14$	17.200	23.488
$= 15$	17.256	23.611
$= 16$	17.256	23.611
$= 17$	18.835	25.180
$= 18$	19.573	27.319
$= 19$	19.573	27.319

Summary.

Taking advantage of some previous results by the present author, a procedure is described for numerical computation of the eigenvalues of the linear elasticity operator for a square bidimensional domain. Numerical tables are exhibited.

* * *