Riv. Mat. Univ. Parma (2) **11** (1970), 1-15

DANG-CHAU PHIEN et NICOLAS ROUCHE (*)

Stabilité d'ensembles pour des équations différentielles ordinaires. (**)

1. - Introduction.

Considérons une équation différentielle $\dot{x} = f(t, x)$, où $t \in \boldsymbol{R}$ et $x \in \boldsymbol{R}^n$. La présente étude traite de la stabilité des ensembles fermés de $\boldsymbol{R}^n$, par rapport à cette équation. Elle fait suite à deux autres (cf. N. ROUCHE [**7**]; N. ROUCHE et D.-C. PHIEN [**11**]) dans lesquelles les conditions suffisantes de stabilité connues dans le cadre de la méthode directe de LIAPOUNOV ont été quelque peu étendues. Même si l'on connaît des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité, on a encore intérêt à chercher des conditions suffisantes de moins en moins exigentes, de manière à élargir la classe des « fonctions de LIAPOUNOV » auxquelles on peut utilement recourir. Il faut cependant que les conditions trouvées demeurent d'un usage commode: par exemple, celles des conditions qui requièrent la connaissance explicite des solutions de l'équation différentielle ne sont que d'un faible secours au praticien.

A partir d'un lemme très général donnant des conditions pour q'une solution partant d'un ensemble P_1 à l'instant initial, demeure ultérieurement dans un ensemble $P_2 \supset P_1$, nous donnons des conditions de stabilité et stabilité asymptotique utilisant des fonctions dépourvues des qualités habituellement requises dans ce genre de circonstances: elles pourront ne pas être de signe défini, ni bornées, et il en ira de même de leurs dérivées temporelles totales le long des solutions de l'équation différentielle. Malgré cela, les conditions

---

(*) Indirizzi degli Autori: Institut de Mathématique pure et appliquée, Université Catholique de Louvain; 200 b, avenue de Célestins, 3030 Héverlé, Belgique.

(**) Rapport n. 37 (septembre 1970): Séminaires de Mathématique appliquée et Mécanique. — Ricevuto: 12-IX-1970.

énoncées ne semblent pas, dans les cas d'espèce, plus difficiles à vérifier que celles des théorèmes classiques. Nous en donnons plusieurs exemples. Il est intéressant de noter que le lemme se démontre en très peu d'espace et que les théorèmes en découlent immédiatement.

2. - Définitions et notations.

Soit $f\colon I\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$, $(t, x)\mapsto f(t, x)$ une fonction continue ($I=[0, \infty[$ et n est un entier positif). Supposons-la suffisamment régulière pour que, par tout point $(t_0, x_0)\in I\times\boldsymbol{R}^n$ passe une et une seule solution maximale de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x)\,. \tag{1}$$

Une telle solution sera notée $x(t;\, t_0, x_0)$, si bien que $x(t_0;\, t_0, x_0)=x_0$. Nous appellerons t le temps. Dans beaucoup de circonstances, il sera possible d'appliquer la théorie ci-après sans que la fonction f soit définie sur la totalité de $I\times\boldsymbol{R}^n$. Nous ne nous attarderons pas à ce point de vue.

Si $A\subset\boldsymbol{R}^n$, nous désignons par $\mathring{A}$, $\mathrm{C}A$, $\mathrm{Fr}A$ respectivement l'intérieur, le complémentaire et la frontière de A. La lettre $\mathcal{F}$ désignera l'ensemble des parties fermées de $\boldsymbol{R}^n$. La distance d'un point a à un ensemble B sera comme d'habitude

$$d(a, B)=\inf\{d(a, b)\colon\ b\in B\}.$$

De même, la distance entre deux ensembles sera

$$d(A, B)=\inf\{d(a, b)\colon\ a\in A\,,\ b\in B\}.$$

On se souviendra qu'elle n'est pas une distance au sens axiomatique du terme, et on veillera à ne pas la confondre avec la distance $\varrho(A, B)$ introduite au n. **3** ci-après. Nous utiliserons fréquemment la notation

$$S(M, \varepsilon)=\{x\in\boldsymbol{R}^n\colon\ d(x, M)<\varepsilon\},$$

où M est un ensemble de $\boldsymbol{R}^n$. Le symbole $\subset$ désignera une inclusion stricte.

Si $V\colon I\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$, $(t, x)\mapsto V(t, x)$, nous désignons par $\dot V(t, x)$ sa dérivée temporelle totale le long des solutions de l'équation (1). Quand la fonction n'est pas assez régulière pour admettre une telle dérivée, il s'agira d'une dérivée de Dini appropriée.

Enfin, pour $\varrho > 0$, une fonction a: $[0, \varrho[\to \boldsymbol{R}$, $r \mapsto a(r)$ sera dite de « classe K » (au sens de W. HAHN [12]) si elle est continue, strictement croissante et nulle à l'origine.

3. - Situation d'un point mobile par rapport à un ensemble .

Nous devrons, dans les paragraphes suivants, étudier les circonstances dans lesquelles un point mobile sort d'un ensemble variant continûment avec t. Si l'ensemble est fixe, le problème est simple et peut être exposé dans les termes suivants.

Soit $J = [t_1, t_2]$ un intervalle fermé de $\boldsymbol{R}$ et x: $J \to \boldsymbol{R}^n$, $t \mapsto x(t)$ une fonction vectorielle continue. Soit A fermé $\subset \boldsymbol{R}^n$ et supposons que $x(t_1) \in \mathring{A}$ et $x(t_2) \in \complement A$. Alors il existe un $\tau \in J$ tel que $x(\tau) \in \operatorname{Fr} A$. Une façon de le démontrer consiste à considérer la fonction d^*: $J \to \boldsymbol{R}$ dont la valeur en t est

$$d^*(t) = d\big(x(t), A\big) - d\big(x(t), \complement A\big).$$

C'est une fonction continue en t, qui ne s'annule que quand $x(t) \in \operatorname{Fr} A$. De plus, elle est strictement négative en $t = t_1$ et strictement positive en $t = t_2$. Donc il existe dans J un τ où elle s'annule. On en conclut que $x(\tau) \in \operatorname{Fr} A$, C.Q.F.D. .

Pour établir une proposition analogue dans le cas où le fermé A varie avec t, il nous faut d'abord éclaircir la notion d'ensemble variant continûment avec t. Pour cela, introduisons la métrique de HAUSDORFF [1] pour la famille $\mathcal{F}$ des fermés non vides de $\boldsymbol{R}^n$. Pour A et $B \subset \mathcal{F}$, définissons $\varrho^*(A, B)$ par

$$\varrho^*(A, B) = \sup\{d(a, B): a \in A\}.$$

Le nombre $\varrho^*(A, B)$ peut être infini: songer au cas où B contient un seul point et où A est non borné. Cependant, même si on se réfère à une métrique à valeurs dans $R^+ \cup \{+\infty\}$ (cf. R. ABRAHAM [6]), ϱ^* n'est pas une métrique puisqu'en général $\varrho^*(A, B) \neq \varrho^*(B, A)$. Par contre

$$\varrho(A, B) = \sup\{\varrho^*(A, B), \varrho^*(B, A)\}$$

est une métrique. C'est la *métrique de Hausdorff*.

On sait que si $x, y \in \boldsymbol{R}^n$ et $A \subset \boldsymbol{R}^n$, on a $|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y)$ (cf. par exemple J. DIEUDONNÉ [2]). Une propriété analogue de la distance $\varrho(A, B)$ nous sera utile.

Proposition 1. *Quels que soient* $x \in \boldsymbol{R}^n$ et $A, B \in \mathcal{F}$, *on a*

$$| d(x, A) - d(x, B) | \leqslant \varrho(A, B) .$$

De l'inégalité triangulaire $d(x, a) \leqslant d(x, b) + d(b, a)$ on tire la chaîne d'inégalités

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a):\ a \in A\} \leqslant \inf\{d(x, b) + d(b, a):\ a \in A\} =$$

$$= d(x, b) + d(b, A) \leqslant \inf\{d(x, b):\ b \in B\} + \sup\{d(b, A):\ b \in B\} \leqslant$$

$$\leqslant d(x, B) + \varrho(A, B) .$$

On montre de même que

$$d(x, B) \leqslant d(x, A) + \varrho(B, A) ,$$

d'où le résultat annoncé. Cette Proposition va servir essentiellement à démontrer la Proposition 2.

Considérons la fonction

$$d:\ \boldsymbol{R}^n \times \mathcal{F} \to \boldsymbol{R}^+,\quad (x, A) \mapsto d(x, A) ,$$

et pour pouvoir envisager sa continuité, munissons $\boldsymbol{R}^n \times \mathcal{F}$ d'une distance, par exemple celle fournie pour deux points (x, A), $(y, B) \in \boldsymbol{R}^n \times \mathcal{F}$ par

$$\sup\{d(x, y),\ \varrho(A, B)\}. \tag{2}$$

Proposition 2. *La fonction* $d(x, A)$ *est uniformément continue.*

Il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que si $\sup\{d(x, y), \varrho(A, B)\} < \eta$, alors $| d(x, A) - d(y, B) | < \varepsilon$. Or, en vertu de la Proposition 1,

$$| d(x, A) - d(y, B) | \leqslant | d(x, A) - d(x, B) | + | d(x, B) - d(y, B) |$$

$$\leqslant \varrho(A, B) + d(x, y) ,$$

d'où évidemment le résultat annoncé.

Cette Proposition va nous permettre d'introduire la continuité de la distance $d(x(t), A(t))$ d'un point mobile x à un ensemble A variant avec t. Soit $J = [t_1, t_2]$ un intervalle de $\boldsymbol{R}$ et

$$x: J \to \boldsymbol{R}^n, \; t \mapsto x(t),$$

$$A: J \to \mathcal{F}, \; t \mapsto A(t), \tag{3}$$

deux fonctions continues, la seconde au sens de la métrique de HAUSDORFF. La fonction $J \to \boldsymbol{R}^n \times \mathcal{F}$ qui envoie t sur $(x(t), A(t))$ est continue pour la métrique définie par (2) (cf. J. DIEUDONNÉ [2]). Quant à la fonction composée $J \to \boldsymbol{R}^+$ dont la valeur en t est $d(x(t), A(t))$, elle est continue comme fonction continue de fonction continue (Proposition 2). Remarquons de plus qu'elle est nulle pour tout t où $x(t) \in A(t)$ et strictement positive dans les autres cas.

Si une fonction $A(t)$ du type (3) est continue, avec $A(t) \neq \boldsymbol{R}^n$ pour tout $t \in J$, il ne s'en suit pas forcément que la fonction de $J \to \mathcal{F}$ ayant pour valeur en t l'adhérence du complémentaire de $A(t)$, soit continue. Un contre-exemple simple est le suivant. Soit un plan euclidien (x, y) rapporté à des coordonnées polaires r, ϑ. Considérons la fonction définie sur $[-1, +1]$, ayant pour valeur en t le fermé du plan défini par $A(t) = \{(x, y): \; r \leqslant 1\}$ quand $t \in [-1, \; 0]$, et le fermé

$$A(t) = \{(x, y): \; r \leqslant 1, \; \pi t \leqslant \vartheta \leqslant \pi (2 - t)\}$$

quand $t \in]0, 1]$. Cette fonction est continue. Par contre, la fonction qui envoie t sur $\overline{\mathrm{C}A(t)}$ est discontinue en $t = 0$. On observe qu'un point de l'axe des x, d'abscisse constante et inférieure à 1, voit en $t = 0$ sa distance à $\overline{\mathrm{C}A(t)}$ passer d'une valeur strictement positive à la valeur nulle. Pour éviter ce genre d'incident, nous ne considérerons ci-après que des fonctions $A(t)$ continues et telles que la fonction associée $\overline{\mathrm{C}A(t)}$ soit continue elle aussi.

Proposition 3. *Soit $J = [t_1, t_2]$ un intervalle de $\boldsymbol{R}$ et*

$$x: \; J \to \boldsymbol{R}^n, \; t \mapsto x(t); \qquad A: \; J \to \mathcal{F}, \; t \mapsto A(t)$$

deux fonctions continues. Si la fonction associée à A et qui envoie t sur $\overline{\mathrm{C}A(t)}$ est aussi continue, si $x(t_1) \in \mathring{A}(t_1)$ et $x(t_2) \notin A(t_2)$, alors il existe un $\tau \in [t_1, t_2]$ tel que $x(\tau) \in \mathrm{Fr}\, A(\tau)$.

Effectivement, les deux fonctions $J \to \boldsymbol{R}^+$ telles que

$$t \mapsto d(x(t), \; A(t)) \qquad \text{et} \qquad t \mapsto d(x(t), \; \overline{\mathrm{C}A(t)})$$

sont continues. Donc la fonction

$$d(x(t),\ A(t)) - d(x(t),\ \overline{\complement A(t)})$$

est aussi continue. Or elle est strictement négative pour $t = t_1$, strictement positive pour $t = t_2$, et de plus, elle s'annule si et seulement si $x(t) \in \operatorname{Fr} A(t)$. D'où la Proposition annoncée.

4. - Localisation d'une solution.

Du Lemme suivant découleront sans aucune peine plusieurs conditions suffisantes de stabilité, stabilité asymptotique, ... On y compare les valeurs d'une fonction auxiliaire $V(t, x)$ à celles d'une fonction $a(t)$ qui ne dépend que du temps, et on compare aussi les dérivées temporelles totales de ces deux fonctions. L'usage d'une fonction $a(t)$ servant ainsi de repère a été proposé dans N. ROUCHE [7]. Le Lemme fondamental ci-après, dans la version où il ne fait pas usage de la fonction de comparaison ω, est substantiellement le théorème 1 de A. N. MICHEL [8].

Lemme fondamental. *Soit J un intervalle quelconque de $\mathbf{R}$ et*

$$P_i:\ J \to \mathscr{F},\ t \mapsto P_i(t) \qquad (i = 1,\ 2)$$

deux fonctions continues ainsi que les fonctions associées $t \to \overline{\complement P_i(t)}$. Supposons que

$$(\forall\, t \in J) \quad \phi \subset \overset{\circ}{P}_1(t) \subset P_1(t) \subset \overset{\circ}{P}_2(t) \subset P_2(t)\,.$$

Soient

$$V:\ J \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R},\ (t,\ x) \mapsto V(t,\ x)$$

et

$$a:\ J \to \mathbf{R}\,,\ t \mapsto a(t)$$

deux fonctions localement lipschitziennes, telles que

(i) $(\forall\, t \in J)\ (\forall\, x \in \operatorname{Fr} P_2(t))$ $\qquad V(t,\ x) \geqslant a(t)$,

(ii) $(\forall\, t \in J)\ (\forall\, x \in \operatorname{Fr} P_1(t))$ $\qquad V(t,\ x) < a(t)$,

(iii) $(\forall\, t \in J)\ (\forall\, x \in P_2(t) \setminus \overset{\circ}{P}_1(t))$ $\qquad \dot{V}(t,\ x) \leqslant \dot{a}(t)$;

si de plus $t_0 \in J$ et $x_0 \in P_1(t_0)$, alors, pour tout t appartenant à J et supérieur à t_0, $x(t;\ t_0,\ x_0)$ appartient à $P_2(t)$.

En termes imagés, toute solution qui part dans P_1 demeure dans P_2 aux instants ultérieurs. En effet, supposons qu'il existe un $t^* > t_0$, $t^* \in J$ tel que $x(t^*;\ t_0,\ x_0) \notin P_2(t^*)$. Alors on sait, en vertu de la Proposition 3, qu'il existe dans J deux instants τ_1, τ_2, tels que $\tau_1 < \tau_2 < t^*$, que

$$x(\tau_1;\ t_0,\ x_0) \in \operatorname{Fr} P_1(\tau_1)\,, \qquad x(\tau_2;\ t_0,\ x_0) \in \operatorname{Fr} P_2(\tau_2)$$

et que $x(t;\ t_0,\ x_0) \in P_2(t) \setminus \mathring{P}_1(t)$ pour tout $t \in [\tau_1, \tau_2]$. À cause de l'hypothèse (iii), on aurait

$$V(\tau_2,\ x(\tau_2;\ t_0,\ x_0)) - V(\tau_1,\ x(\tau_1;\ t_0,\ x_0)) \leqslant a(\tau_2) - a(\tau_1)\,. \tag{4}$$

Or, à cause de (ii),

$$V(\tau_1,\ x(\tau_1;\ t_0,\ x_0)) < a(\tau_1)\,.$$

On déduit de ces deux inégalités que

$$V(\tau_2,\ x(\tau_2;\ t_0,\ x_0)) < a(\tau_2)\,,$$

ce qui contredit (i).

Ce Lemme peut être généralisé à peu de frais par recours à la théorie des inégalités différentielles, ce qui donne lieu au Corollaire suivant.

Corollaire 1. *On peut, dans le Lemme fondamental, remplacer l'hypothèse* (iii) *par*

(iii′) *il existe une fonction* $\omega(t, y)\colon J \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ *telle que*

$$(\forall\, t \in J)\ (\forall\, x \in P_2(t) - \mathring{P}_1(t)) \qquad \dot V(t,\ x) < \omega(t,\ V(t,\ x))\,,\ \dot a(t) \geqslant \omega(t,\ a(t))\,.$$

La démonstration est la même que celle du Lemme, à ceci près que l'inégalité (4) sera obtenue à partir de la propriété adéquate des inégalités différentielles (cf. par exemple A. Halanay [3]).

5. - Conditions suffisantes de stabilité.

En plus de ses applications propres à des cas d'espèce, le Lemme fondamental fournit plusieurs généralisations de théorèmes connus sur la stabilité et la stabilité asymptotique. Supposons que l'origine des coordonnées soit un équilibre pour l'équation (1). Dire que cet équilibre est stable, c'est en gros dire que pour toute boule donnée de rayon ε, il en existe une autre de rayon $\eta < \varepsilon$, et que toute solution partant dans la seconde demeure dans la première pour tous les temps ultérieurs. Pour empêcher la solution de s'échapper, il faut, en termes imagés, lui opposer une barrière. Dans les théorèmes classiques et en particulier dans celui de LIAPOUNOV, la barrière est constituée par toute la couronne $\eta \leqslant \|x\| \leqslant \varepsilon$. Ce sont les propriétés des fonctions V et $\dot{V}$ sur cette couronne qui permettent de montrer que la solution n'atteint pas la sphère de rayon ε. Or, il suffit, pour empêcher la solution de passer, de lui opposer une barrière dont l'épaisseur n'a pas d'importance et qui ne doit certainement pas aller de η à ε. On peut utiliser, pour ainsi dire, une *barrière locale*. C'est la mise en oeuvre de cette idée qui nous a permis d'étendre notablement le champ des fonctions auxiliaires auxquelles on peut recourir pour démontrer la stabilité.

La définition suivante de la stabilité pour un fermé de $\boldsymbol{R}^n$ est une adaptation au cas d'équations différentielles non autonomes de celle donnée par N. P. BHATIA et G. P. SZEGÖ [4] dans le cadre des systèmes dynamiques abstraits. Elle généralise correctement la notion commune de stabilité à la LIAPOUNOV pour un point critique.

Un fermé $M \subset \boldsymbol{R}^n$ est dit *stable* (à la LIAPOUNOV) si pour tout $t_0 \in [0, \infty[$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage ouvert $P(t_0, \varepsilon)$ de M tel que $x_0 \in P$ et $t \geqslant t_0$ impliquent que $x(t; t_0, x_0) \in S(M, \varepsilon)$. Si, en plus,

$$\inf\{d(M, \operatorname{Fr} P(t_0, \varepsilon): \ t_0 \in I\} > 0 ,$$

on dit que M est *uniformément stable.*

Théorème 1. *Soit M fermé $\subset \boldsymbol{R}^n$. Si, pour un certain $\varrho > 0$, il existe une fonction localement lipschitzienne*

$$V: \ I \times [S(M, \varrho) \setminus M] \to \boldsymbol{R} , \quad (t, x) \mapsto V(t, x);$$

si pour tout ε, $0 < \varepsilon < \varrho$, il existe deux fonctions

$$P_i: \ I \to \mathcal{F} , \quad t \mapsto P_i(t, \varepsilon) \qquad (i = 1, 2)$$

continues ainsi que les fonctions associées $t \mapsto \overline{\complement P_i(t)}$, telles que $M \subset \mathring{P}_1(t, \varepsilon) \subset \subset P_1(t, \varepsilon) \subset \mathring{P}_2(t, \varepsilon) \subset P_2(t, \varepsilon) \subseteq S(M, \varepsilon)$; si de plus il existe pour chacun de ces ε

une fonction localement lipschitzienne $a\colon\ I \to \boldsymbol{R},\ t \mapsto a(t,\ \varepsilon)$, *et si enfin*

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} & (\forall\, t \in I) & \big(\forall\, x \in \operatorname{Fr} P_2(t,\ \varepsilon)\big) & V(t,\ x) > a(t,\ \varepsilon)\,, \\ \text{(ii)} & (\forall\, t \in I) & \big(\forall\, x \in \operatorname{Fr} P_1(t,\ \varepsilon)\big) & V(t,\ x) < a(t,\ \varepsilon)\,, \\ \text{(iii)} & (\forall\, t \in I) & \big(\forall\, x \in P_2(t,\ \varepsilon) \setminus \mathring{P}_1(t,\ \varepsilon)\big) & \dot{V}(t,\ x) \leqslant \dot{a}(t,\ \varepsilon)\,, \end{array}$$

alors M *est stable.*

Ce Théorème est une application directe du Lemme fondamental. En modifiant de manière appropriée son hypothèse (iii), on peut le généraliser comme on l'a fait pour le Lemme (cf. Corollaire 1). On a de plus le Théorème suivant.

Théorème 2. *Si on ajoute aux hypothèses du Théorème* 1 *que, pour tout* ε, $\inf\big\{d(M,\ \operatorname{Fr} P_1(t,\ \varepsilon))\colon\ t \in I\big\} > 0$, *alors la stabilité est uniforme.*

Les Théorèmes 1 et 2 sont tellement évidents qu'ils confirment l'observation de J. A. Yorke [5] selon laquelle la théorie de la stabilité à la Liapounov tend à devenir « a theory of the nearly trivial ». Malgré cela, leur portée est loin d'être négligeable.

En effet, montrons tout d'abord qu'ils généralisent respectivement le théorème de Liapounov sur la stabilité et celui de Liapounov-Persidski sur la stabilité uniforme, pour un point critique situé à l'origine des coordonnées. Si la fonction $V(t,\ x)$ est telle que $V(t,\ 0) = 0$, que pour tout $t \in I$: $V(t,\ x) \geqslant \varphi(\|x\|)$ où φ est une fonction de classe K, et si $\dot{V}(t,\ x) \leqslant 0$, les hypothèses du Théorème 1 sont satisfaites pour $M = \{0\}$ si on prend $\eta(t,\ \varepsilon)$ tel que

$$\|x\| < \eta(t,\ \varepsilon) \ \Rightarrow\ V(t,\ x) < \varphi(\varepsilon)\,,$$

et si on choisit $P_1(t,\ \varepsilon) = S(\{0\},\ \eta)$, $P_2(t,\ \varepsilon) = S(\{0\},\ \varepsilon)$ et $a(t,\ \varepsilon) = \varphi(\varepsilon)$.

A. Strauss [9] a démontré, pour les systèmes autonomes, un théorème de stabilité utilisant une fonction auxiliaire $V(x)$ qui peut être de signe indéfini dans tout voisinage de l'origine, mais dont la dérivée $\dot{V}(x)$ doit être semi-définie négative. Il impose $V(0) = 0$ et une condition supplémentaire sur les ensembles définis par $V(x) \leqslant k$ pour $k > 0$. Dans l'exemple suivant, toutes les hypothèses du théorème de Strauss sont violées, tandis que toutes celles du Théorème 1 sont respectées. Soit le système différentiel spécifié par

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + r\,x_1 \sin(1/r)\,, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + r\,x_2 \sin(1/r) \end{aligned}$$

pour $r \neq 0$, $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, et par $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ pour $r = 0$. Choisissons

$$V(x_1\,,\ x_2) = \sin(1/r)\,.$$

On calcule que

$$\dot{V}(x_1\,,\ x_2) = -\sin(1/r)\cos(1/r)\,.$$

Si on écrit

$$r_1 = 1/\left\{\left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi\right\}, \qquad r_2 = 1/\{(2k+1)\pi\}$$

pour tout k entier positif, on a

$$V(r_1) = -1\,, \qquad V(r_2) = 0\,,$$

$$\dot{V}(r) \leqslant 0 \quad \text{pour } r_1 \leqslant r \leqslant r_2\,.$$

Le Théorème 1 est applicable avec

$$P_2 = S(\{0\},\ r_2)\,, \qquad P_1 = S(\{0\},\ r_1)\,, \qquad a = V(r_2) = 0\,.$$

L'origine est donc (uniformément) stable.

L'exemple suivant montre qu'on peut utiliser, en connexion avec le Théorème 1, une fonction auxiliaire qui ne soit bornée ni supérieurement, ni inférieurement dans aucun voisinage de l'origine et dont la dérivée temporelle soit tout aussi dépourvue de bornes. Soit le système différentiel spécifié, dans les mêmes notations que le précédent, par

$$\dot{x}_1 = x_2\,,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + r\,x_2\ \{\sin(1/r) + (1/r)\cos(1/r)\}$$

pour $r \neq 0$ et par $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ pour $r = 0$. Choisissons

$$V(x_1\,,\ x_2) = (1/r)\sin(1/r)\,.$$

On calcule que

$$\dot{V}(x_1\,,\ x_2) = -(x_2^2/r^2)\{\sin(1/r) + (1/r)\cos(1/r)\}^2 \leqslant 0\,.$$

Soient

$$r_1 = 1/\{(2k+1)\pi\}, \qquad r_2 = 1/\{(2k+\tfrac{1}{2})\pi\}.$$

On a

$$V(r_1) = 0\,, \qquad V(r_2) = (2k+\tfrac{1}{2})\pi\,.$$

L'origine est (uniformément) stable.

Le Théorème 2 offre encore la possibilité d'utiliser une fonction auxiliaire $V(t, x)$ non définie positive en ce sens que, bien qu'elle soit strictement positive en tout point différent de l'origine, elle tende vers 0 en de tels points quand t tend vers l'infini. Un théorème présentant une possibilité analogue a déjà été proposé dans N. Rouche [7]. Soit, pour $x \in \boldsymbol{R}$, l'équation différentielle

$$\dot{x} = -x\, e^{-t}\,.$$

Les hypothèses du théorème sont satisfaites pour

$$V(t,\ x) = x^2\, e^{-t}\,, \qquad a(t,\ \varepsilon) = \varepsilon^2\, e^{-t}\,,$$

$$P_2 = S(\{0\},\ \varepsilon)\,, \qquad P_1 = S(\{0\},\ \eta)$$

où $\eta(t,\ \varepsilon) = \varepsilon/(1+2\,e^{-t})^{1/2}$. On a $\varepsilon/\sqrt{3} \leqslant \eta < \varepsilon$, et l'origine est uniformément stable.

6. - Conditions suffisantes de stabilité asymptotique.

Les concepts de stabilité asymptotique définis ci-après s'écartent quelque peu de ceux proposés par N.P. Bhatia et G. P. Szegö [4]. Pourtant, ils généralisent correctement les concepts correspondants relatifs à un point critique, tels qu'ils sont présentés par exemple dans H. A. Antosiewicz [10].

Un ensemble fermé $M \subset \boldsymbol{R}^n$ est appelé *équi-attractif* si, pour tout $t_0 \in I$, il existe un ouvert $Q(t_0) \supset M$ tel que $x_0 \in Q(t_0)$ implique que $d(M,\ x(t;\ t_0\,,\ x_0)) \to 0$ quand $t \to \infty$, uniformément pour $x_0 \in Q(t_0)$. Il est appelé *uniformément attractif* si de plus

$$\inf\{d(M\,,\ \mathrm{Fr}\ Q(t_0)):\ t_0 \in I\} > 0$$

et si $d(M,\ x(t;\ t_0\,,\ x_0)) \to 0$ quand $t \to \infty$, uniformément pour $t_0 \in I$ et $x_0 \in Q(t_0)$.

De même un tel ensemble est appelé *équi-asymptotiquement stable* s'il est stable et équi-attractif. Enfin il est appelé *uniformément asymptotiquement stable* s'il est uniformément stable et uniformément attractif.

Théorème 3. *Si on ajoute aux hypothèses du Théorème 1 que pour tout* ε, $0 < \varepsilon < \varrho$, *il existe une fonction* $\sigma_\varepsilon(t)\colon I \to \boldsymbol{R}^+$ *telle que* $\sigma_\varepsilon(t) \to 0$ *quand* $t \to \infty$ *et que, pour tout* $t \in I$,

$$\sup\{d(M,\ y)\colon y \in \operatorname{Fr} P_2(t,\ \varepsilon)\} \leqslant \sigma_\varepsilon(t)\,,$$

alors M *est équi-asymptotiquement stable. Si cette hypothèse est ajoutée au Théorème 2,* M *est uniformément aymptotiquement stable.*

Ce Théorème se passe aussi de démonstration. Ce que nous voulons surtout, c'est illustrer sa généralité.

A cet effet, considérons d'abord le système différentiel specifié par

$$\dot{x}_1 = -x_2 - x_1 \sin(e^{-t}/r^2)\,,$$

$$\dot{x}_2 = \quad x_1 - x_2 \sin(e^{-t}/r^2)$$

pour $r \neq 0$, $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, et par $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ pour $r = 0$. Choisissons

$$V(t,\ x_1,\ x_2) = \sin\,(e^{-t}/r^2)\,.$$

On calcule que

$$\dot{V}(t,\ x_1,\ x_2) = -(e^{-t}/r^2)\{1 - 2\sin\,(e^{-t}/r^2)\}\cos\,(e^{-t}/r^2)\,.$$

Si on choisit

$$r_2(t,\ \varepsilon) = e^{-t/2}/\sqrt{(2k + (1/2))\,\pi}\,, \qquad r_1(t,\ \varepsilon) = e^{-t/2}/\sqrt{(2k + (5/6))\,\pi}\,,$$

on voit que les hypothèses du Théorème 3, première partie, sont vérifiées pour

$$P_2(t,\ \varepsilon) = S(\{0\},\ r_2)\,, \qquad P_1(t,\ \varepsilon) = S(\{0\},\ r_1)\,,$$

$$a(t,\ \varepsilon) = V(t,\ r_2) = 1, \qquad V(t,\ r_1) = 1/2 < a\,.$$

L'origine est équi-asymptotiquement stable. Remarquons que, pour r fixé, $V(t,\ r) \to +0$ quand $t \to +\infty$; pour t fixé, $V(t,\ r)$ oscille entre $+1$ et -1 pour r suffisamment petit [le diamètre de cette région où $V(t,\ r)$ est oscillant, tend vers 0 quand $t \to +\infty$]; enfin $\dot{V}(t, r)$ est de signe indéfini dans tout voisinage de l'origine.

Montrons maintenant que le Théorème 3, deuxième partie, généralise celui de LIAPOUNOV sur la stabilité asymptotique uniforme. Ce théorème dit que s'il existe une fonction $V(t, x)$ définie positive, tendant vers 0 uniformément pour $t \in I$ quand $x \to 0$ et telle que $\dot{V}(t, x)$ soit définie négative, alors l'origine des coordonnées, supposée point critique pour l'équation (1), est uniformément asymptotiquement stable. Ces hypothèses reviennent à l'existence de trois fonctions $a(r)$, $b(r)$ et $c(r)$ toutes trois de classe K, telles que

$$a(\|x\|) \leqslant V(t, x) < b(\|x\|)$$

et que

$$\dot{V}(t, x) \leqslant -c(\|x\|) .$$

Choisissons un ε positif arbitraire. Il est clair que, sur la frontière de $S(\{0\}, \varepsilon)$, on a $V(t, x) \geqslant a(\varepsilon)$. Définissons η par $\eta = b^{-1}(a(\varepsilon))$. Il est clair aussi que sur la frontière de $S(\{0\}, \eta)$, on a $V(t, x) < a(\varepsilon)$.

Les adhérences de $S(\{0\}, \varepsilon)$ et $S(\{0\}, \eta)$ vont jouer les rôles respectifs des ensembles P_2 et P_1 du théorème. Tout le problème revient maintenant à choisir adéquatement $\varepsilon(t)$ tel que $\varepsilon(t) \to 0$ quand $t \to \infty$ et que l'hypothèse (iii) du Théorème (celle sur les dérivées) soit respectée. La fonction $a(\varepsilon(t))$ jouera alors le rôle de la fonction a du théorème.

Choisissons donc $\varepsilon(t)$ de sort qu'on ait, dans la couronne $\overline{S(\{0\}, \varepsilon)} \setminus S(\{0\}, \eta)$,

$$\dot{V}(t, x) \leqslant \frac{\mathrm{d}a(\varepsilon(t))}{\mathrm{d}\varepsilon(t)} \dot{\varepsilon}(t) .$$

Nous avons ici supposé implicitement l'existence de la dérivée $\mathrm{d}a/\mathrm{d}\varepsilon$, mais ceci n'enlève pas de généralité au raisonnement. Nous supposerons même que cette dérivée est partout > 0, sauf éventuellement à l'origine. Or on sait que, dans la même couronne, $\dot{V}(t, x) \leqslant -c(\eta)$. Il suffira donc de choisir ε de sorte qu'on ait

$$\dot{\varepsilon}(t) \geqslant -c(\eta) \left(\frac{\mathrm{d}a(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)^{-1} .$$

Or $c(\eta) = c(b^{-1}(a(\varepsilon))) = d(\varepsilon)$, et puisque a, b^{-1} et c sont des fonctions de classe K, il en va de même de d. En définitive

$$\dot{\varepsilon} \geqslant -e(\varepsilon) ,$$

où $e(\varepsilon) > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$.

On obtiendra la décroissance la plus rapide pour ε en adoptant l'égalité $\dot{\varepsilon} = -e(\varepsilon)$. La fonction $\varepsilon(t)$, évidemment non croissante, tend vers 0 quand $t \to \infty$. En effet, soit ε_0 sa valeur à l'instant t_0 et ε_1 tel que $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$. L'intégrale

$$t_1 - t_0 = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_0} e(\varepsilon)^{-1} \, \mathrm{d}\varepsilon$$

est convergente et indépendante de t_0. Toutes les hypothèses du Théorème 3 (2^e partie) sont donc satisfaites.

La démonstration qu'on vient de faire est proche parente de celle de W. HAHN [11] pour le même théorème. Elle fournit une méthode d'évaluation de la rapidité de convergence des solutions vers l'origine. Elle se distingue de la démonstration originale de LIAPOUNOV, dans laquelle la stabilité uniforme et l'attractivité font l'objet de deux démonstrations séparées.

Bibliographie.

[1] F. HAUSDORFF, *Set Theory*, Chelsea, New York 1962; cf. p. 167.

[2] J. DIEUDONNÉ, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York 1960; cf. pp. 32 et 69.

[3] A. HALANAY, *Differential Equations, Stability Theory, Oscillations, Time Lags*, Academic Press, New York 1966; cf. p. 4.

[4] N. P. BHATIA and G. P. SZEGÖ, *Dynamical Systems: Stability Theory and Applications*, Springer, Berlin 1967; cf. p. 201.

[5] J. A. YORKE, *An Extension of Chetaev's Instability Theorem Using Invariant Sets and an Example*, Seminar on Differential Équations and Dynanical Systems, Springer, Berlin 1968.

[6] R. ABRAHAM, *Foundations of Mechanics*, Benjamin, New York 1967; cf. p. 237.

[7] N. ROUCHE, *Nouveaux théorèmes de stabilité utilisant la méthode direct de Liapounov*, Int. J. Non-Linear Mechanics 4 (1969), 301-309.

[8] A. N. MICHEL, *On the bounds of the trajectories of differential systems*, Int. J. Control **10** (1969), 593-600.

[9] A. STRAUSS, *A Geometric Introduction to Liapounov's Second Method*, Proc. N.A.T.O. Adv. Study Inst., E. Oderisi, Gubbio 1966; cf. p. 19.

[10] H. A. ANTOSIEWICZ, *A survey of Liapounov's second method.* Ann. Math. Studies **41** (Contr. Theory Non-Linear Oscill. **4**) (1958), 141-166.

[11] N. ROUCHE and D.-C. PHIEN, *Sufficient stability conditions based on global lemmas*, Fifth Int. Conf. Non-Linear Oscill., Kiev 1969; cf. pp. 439-446 .

[12] W. HAHN, *Stability of Motion*, Springer, Berlin 1967.

Summary.

Using a simple lemma which gives sufficient conditions for a solution starting in a given closed set to remain in another closed set in the future, one generalizes the classical Liapounov theorems on stability and asymptotic stability: the new sufficient conditions render possible the use of auxiliary functions which, together with their derivatives, are neither sign-definite nor even bounded.

* * *