Riv. Mat. Univ. Parma (2) **11** (1970), 17-43

CORRADO SCARAVELLI (*)

Risoluzione, razionale nelle funzioni date, delle equazioni alle differenze (con un passo $h \neq 0$), d'ordine finito, lineari e a coefficienti periodici di periodo h.

Parte I. - Variabile indipendente reale, ed equazioni dei primi tre ordini. (**)

§ 1. - Introduzione.

1.1 – Una generica equazione alle differenze, con un passo h ($\neq 0$), d'ordine finito, lineare, e a coefficienti periodici di periodo h, ha, come ben si sa, la forma

$$(\mathrm{E}_n) \quad \tilde{a}_0 u(x + nh) + \tilde{a}_1 u(x + (n-1)h) + \ldots + \tilde{a}_{n-1} u(x + h) + \tilde{a}_n u(x) = f(x) ,$$

dove:

x è la variabile indipendente (che qui suppongo reale);

h è un «passo» assegnato (reale) non nullo;

$u(x)$ è la funzione incognita;

$f(x)$ è una data funzione (reale o complessa), univoca, *definita in modo qualsiasi* su un intervallo $x_0 \leqslant x < x_1$ (1);

$\tilde{a}_r \equiv \tilde{a}_r(x; h)$ $(r = 0, 1, 2, \ldots, n)$ sono date funzioni periodiche di periodo h, cioè date *costanti per l'incremento* h (2).

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R., Contratto n. 115.3083.05179. — Ricevuto: 11-XI-1970.

(1) In seguito userò anche la notazione $(x_0 \ldots x_1 —)$ in luogo di $x_0 \leqslant x < x_1$. Suppongo che x_1 sia finito oppure $+\infty$; nel caso di x_1 finito è però necessario (come si vedrà) che sia $x_1 - x_0 > n|h|$.

(2) Su questi simboli e questa denominazione cfr. [5].

L'equazione (E_n) è *d'ordine n* se è contemporaneamente

$$(1) \qquad \tilde{a}_0 = \tilde{a}_0(x;\, h) \not\equiv 0\,, \qquad \tilde{a}_n = \tilde{a}_n(x;\, h) \not\equiv 0\,.$$

Nel seguito, per semplicità, supporrò che sia

$$(2) \quad \tilde{a}_0 = \tilde{a}_0(x;\, h) \neq 0\,, \qquad \tilde{a}_n = \tilde{a}_n(x;\, h) \neq 0\,, \qquad \forall\, x \in (x_0 \ldots (x_0 + h) -)$$

(e allora sarà $\tilde{a}_0 \neq 0$, $\tilde{a}_n \neq 0$, $\forall x$ reale).

1.2. – Che cosa conosciamo sulla risoluzione effettiva di una equazione (E_n)?
Limitando la risposta alla eventualità più semplice nella quale i coefficienti sono tutti delle *costanti effettive* (cioè non dipendenti da x), si distinguono due casi (cfr. [1] e [4]):

Caso 1°. L'equazione (E_n), a coefficienti costanti effettive, è omogenea [ossia è $f(x) \equiv 0$], e supponiamo che si sappia risolvere la corrispondente equazione caratteristica. Allora, si può subito scrivere un sistema fondamentale di soluzioni di (E_n), e poi passare alla soluzione generale di tale equazione (E_n) omogenea.

Caso 2°. L'equazione (E_n), a coefficienti costanti, è non omogenea [ossia è $f(x) \not\equiv 0$], e diciamo $(\mathrm{E}_n)_0$ l'equazione omogenea corrispondente a (E_n). Allora, se si sa risolvere l'equazione caratteristica di $(\mathrm{E}_n)_0$, si può trovare una soluzione particolare F_0 di (E_n): la soluzione generale di (E_n) si ottiene poi aggiungendo a F_0 la soluzione generale di $(\mathrm{E}_n)_0$.
Ma vi è un inconveniente: non sempre si sa risolvere la nominata equazione caratteristica, ed allora il procedimento di risoluzione effettiva si arresta.

1.3. – Il metodo di risoluzione esplicita che qui invece propongo per l'equazione (E_n) è una generalizzazione di un procedimento seguito da A. Mambriani [3], e gode di questi due requisiti:

1°) *è sempre possibile* [quando sia soddisfatta la naturale condizione (2)];
2°) *è completamente elementare*, nel senso che la soluzione generale si esprime non solo in termini finiti, ma anche razionalmente con i dati coefficienti (costanti per l'incremento h) dell'equazione (E_n), con la funzione data $f(x)$, e con funzioni arbitrarie (anch'esse costanti per l'incremento h).
La soluzione generale dell'equazione (E_n), ottenuta con questo metodo, ha (come si vedrà) la forma

$$u(x) = F(x;\, h) + U(x;\, h)\,,$$

dove $F(x; h)$ e $U(x; h)$ sono, rispettivamente, una soluzione particolare di (E_n) e la soluzione generale di $(E_n)_0$ [equazione omogenea corrispondente a (E_n)], entrambe in termini finiti e di forma speciale. Pertanto dirò che:

1°) $F(x; h)$ è *la soluzione elementare* di (E_n);

2°) $U(x; h)$ è *la soluzione generale elementare* di $(E_n)_0$;

3°) $F(x; h) + U(x; h)$ è *la soluzione generale elementare* di (E_n).

La soluzione elementare $F(x; h)$ gode della seguente proprietà fondamentale (che dimostrerò nella Parte II di questo lavoro): *$F(x; h)$ si può esprimere esplicitamente in modo semplice mediante una qualsiasi soluzione della* (E_n).

La soluzione elementare $U(x; h)$ si può trasformare (cfr. § 6) nella forma usuale della soluzione generale di $(E_n)_0$, quando si sa risolvere l'equazione caratteristica di $(E_n)_0$.

Questo metodo (nel quale non occorre nemmeno specificare se l'equazione sia omogenea o no) poggia su queste due possibilità:

1°) Possibilità di trasformare in equazione ricorrente una qualsiasi equazione (E_n) alle differenze.

2°) Possibilità di risolvere elementarmente una qualsiasi equazione ricorrente, d'ordine finito, lineare, e a coefficienti costanti.

1.4. – In questa Parte I, dopo alcune premesse e richiami (cfr. § 2), risolvo le equazioni (E_n) alle differenze dei primi tre ordini, ossia le equazioni:

$$(E_1) \qquad \tilde{a}_0 u(x+h) + \tilde{a}_1 u(x) = f(x) ,$$

$$(E_2) \qquad \tilde{a}_0 u(x+2h) + \tilde{a}_1 u(x+h) + \tilde{a}_2 u(x) = f(x) ,$$

$$(E_3) \qquad \tilde{a}_0 u(x+3h) + \tilde{a}_1 u(x+2h) + \tilde{a}_2 u(x+h) + \tilde{a}_3 u(x) = f(x)$$

(cfr. §§ 3, 4, 5), e dò alcuni semplici esempi (cfr. § 6).

In una successiva Parte II tratterò la risoluzione della generica equazione (E_n).

§ 2. - Premesse e richiami.

2.1. – Premetto qui succintamente alcune considerazioni figuranti in [3], § 2.

A) Ad ogni numero reale x si possono far corrispondere simultaneamente due numeri: la sua « parte intera » $\nu = \nu_x$ $\big(= [x]$, intero positivo, nullo, o negativo$\big)$ definita da

$$\nu_x \leqslant x < \nu_x + 1 ; \tag{3}$$

e la sua «mantissa» $\theta = \theta_x$ (con $0 \leqslant \theta < 1$) definita da

(4) $$\theta_x = x - \nu_x \ \bigl(= x - [x]\bigr) .$$

Da (4) si ha subito

$$x = \nu_x + \theta_x = \nu + \theta ,$$

pertanto: *alla variabilità continua di x si possono sostituire le due variabilità di ν e θ; e per queste due variabilità avviene che, essendo n un intero qualsiasi e $x \in \bigl(n \ldots (n+1)-\bigr)$, la ν è costante e uguale a n, e θ varia con continuità da zero a $1-$.*

Valgono le proprietà:

(5) $$\nu_{x+1} = \nu_x + 1 , \qquad \nu_{x-1} = \nu_x - 1 ,$$

(6) $$\theta_{x+1} = \theta_x , \qquad \theta_{x-1} = \theta_x .$$

La (6) dice che *la matissa θ_x è una funzione* (*della x*) *periodica di periodo* 1.

B) Più in generale, fissati due numeri reali x_0, h (con $h \neq 0$), ad ogni numero reale x si possono far corrispondere simultaneamente due numeri: la sua «parte intera, a partire da x_0, e col passo $|h|$» $\nu = \nu_{x;\, x_0,\, |h|}$ (intero positivo, nullo, o negativo) definita da

(7) $$x_0 + \nu|h| \leqslant x < x_0 + (\nu + 1)|h| ;$$

e la sua «mantissa, a partire da x_0, e col passo $|h|$» $\theta = \theta_{x;\, x_0,\, |h|}$ (con $0 \leqslant \theta < 1$) definita da

(8) $$\theta|h| = x - \bigl(x_0 + \nu|h|\bigr) .$$

Da (8) si ha subito

(9) $$x = x_0 + \nu|h| + \theta|h| ,$$

od anche

(10) $$(x - x_0)/|h| = \nu + \theta .$$

Per $x_0 = 0$ e $h = 1$, i numeri ν e θ sono rispettivamente le comuni parte intera e mantissa considerate in A). È poi, chiaramente,

$$\nu = \nu_{(x-x_0)/|h|} = [\text{parte intera di } (x - x_0)/|h|\,] ,$$
$$\theta = \theta_{(x-x_0)/|h|} = \bigl\{(x - x_0)/|h|\bigr\} - \nu_{(x-x_0)/|h|} = [\text{mantissa di } (x - x_0)/|h|\,] .$$

Valgono le proprietà seguenti:

$$\nu_{(x+h-x_0)/|h|} = \nu_{(x-x_0)/|h|} + 1 \qquad \text{se è } h > 0\,, \tag{11}$$

$$\nu_{(x+h-x_0)/|h|} = \nu_{(x-x_0)/|h|} - 1 \qquad \text{se è } h < 0\,, \tag{11)'$$

$$\theta_{(x+h-x_0)/|h|} = \theta_{(x-x_0)/|h|}\,. \tag{12}$$

La (12) dice che *la mantissa di x, a partire da x_0, e col passo $|h|$ è una funzione (della x) periodica di periodo h.*

Si hanno anche le seguenti relazioni limiti:

$$\lim_{x\to\pm\infty} |\nu_{(x-x_0)/|h|}| = +\infty\,, \qquad \lim_{h\to\pm 0} |\nu_{(x-x_0)/|h|}| = +\infty \qquad (x \neq x_0)\,, \tag{13}$$

$$\lim_{h\to\pm 0} (\nu_{(x-x_0)/|h|}\cdot |h|) = \lim_{h\to\pm 0} (\nu\, |h|) = x - x_0\,. \tag{14}$$

2.2. – Una generica equazione ricorrente, d'ordine finito n, lineare, e a coefficienti costanti, si può sempre scrivere nella forma:

$$(\mathrm{R}_n) \qquad a_0\gamma_\nu + a_1\gamma_{\nu-1} + a_2\gamma_{\nu-2} + \ldots + a_n\gamma_{\nu-n} = b_\nu \qquad (\nu = n,\, n+1,\, \ldots)\ (^3),$$

dove γ_ν $(\nu = n, n+1, \ldots)$ è la successione incognita, i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono date costanti (rispetto a ν), e b_ν $(\nu = n, n+1, \ldots)$ è una data successione. L'equazione (R_n) è *d'ordine* n se è $a_0 \neq 0$.

In questa Nota interessano le prime tre equazioni (R_n), precisamente:

$$(\mathrm{R}_1) \qquad a_0\gamma_\nu + a_1\gamma_{\nu-1} = b_\nu \qquad (a_0 \neq 0;\quad \nu = 1, 2, 3, \ldots)\,,$$

$$(\mathrm{R}_2) \qquad a_0\gamma_\nu + a_1\gamma_{\nu-1} + a_2\gamma_{\nu-2} = b_\nu \qquad (a_0 \neq 0;\quad \nu = 2, 3, 4, \ldots)\,,$$

$$(\mathrm{R}_3) \qquad a_0\gamma_\nu + a_1\gamma_{\nu-1} + a_2\gamma_{\nu-2} + a_3\gamma_{\nu-3} = b_\nu \qquad (a_0 \neq 0;\quad \nu = 3, 4, 5, \ldots)\,.$$

Sulla loro risoluzione si ha:

1°) La soluzione generale dell'equazione (R_1) è (cfr. [2], p. 19, (8))

$$\gamma_\nu = \sum_0^\nu {}_s (-1)^s \{a_1^s / a_0^{s+1}\}\, b_{\nu-s}\,, \tag{15}$$

---

(3) Sulla risoluzione di questa equazione ricorrente si veda [2].

dove

$$b_0 = a_0 \gamma_0 \tag{16}$$

è una *costante arbitraria*, quindi γ_0 *è pure costante arbitraria.*

Per il seguito interessa mettere in evidenza una determinata soluzione particolare dell'equazione (R_1) (non omogenea) e anche la soluzione generale dell'equazione omogenea corrispondente ad (R_1). A tale scopo pongo, per brevità,

$$A_s = (-1)^s a_1^s / a_0^{s+1} \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, \nu) \,. \tag{17}$$

Allora la (15) si può scrivere:

$$\gamma_\nu = \sum_0^{\nu-1}{}_s\, A_s b_{\nu-s} + b_0 A_\nu \,, \tag{15$'$}$$

dove

$$\sum_0^{\nu-1}{}_s\, A_s b_{\nu-s}$$

è una soluzione particolare dell'equazione (R_1) (non omogenea), e

$$b_0 A_\nu \qquad (b_0 \text{ costante arbitraria})$$

è la soluzione generale dell'equazione omogenea corrispondente ad (R_1).

2°) La soluzione generale dell'equazione (R_2) è (cfr. [2], p. 19, (10))

$$\gamma_\nu = \sum_0^{\nu}{}_s\, b_{\nu-s} \sum_0^{s}{}_r\, (-1)^r \binom{r}{s-r} a_1^{2r-s} a_2^{s-r} / a_0^{r+1} \,, \tag{18}$$

dove

$$b_0 = a_0 \gamma_0 \,, \qquad b_1 = a_0 \gamma_1 + a_1 \gamma_0 \tag{19}$$

sono *costanti arbitrarie*, quindi γ_0, γ_1 *sono pure costanti arbitrarie.*

Per il seguito interessa mettere in evidenza una determinata soluzione particolare dell'equazione (R_2) (non omogenea) e la soluzione generale dell'equazione omogenea corrispondente ad (R_2). A tale scopo pongo, per brevità,

$$A_s = \sum_0^{s}{}_r\, (-1)^r \binom{r}{s-r} a_1^{2r-s} a_2^{s-r} / a_0^{r+1} \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, \nu) \,. \tag{20}$$

Allora la (18) si può scrivere:

$$(18)' \qquad \gamma_\nu = \sum_0^{\nu-2} {}_s A_s b_{\nu-s} + (b_0 A_\nu + b_1 A_{\nu-1}) ,$$

dove

$$\sum_0^{\nu-2} {}_s A_s b_{\nu-s}$$

è una soluzione particolare dell'equazione (R_2) (non omogenea), e

$$b_0 A_\nu + b_1 A_{\nu-1} \qquad (b_0,\ b_1 \text{ costanti arbitrarie})$$

è la soluzione generale dell'equazione omogenea corrispondente ad (R_2).

3°) La soluzione generale dell'equazione (R_3) è (cfr. [2], p. 19, (12))

$$(21) \qquad \gamma_\nu = \sum_0^{\nu} {}_s b_{\nu-s} \sum_0^{s} {}_r \sum_0^{r} {}_\varrho (-1)^r \binom{r}{\varrho} \binom{\varrho}{s-r-\varrho} \frac{a_1^{r-\varrho} a_2^{r+2\varrho-s} a_3^{s-r-\varrho}}{a_0^{r+1}} ,$$

dove

$$(22) \qquad b_0 = a_0 \gamma_0 , \qquad b_1 = a_0 \gamma_1 + a_1 \gamma_0 , \qquad b_2 = a_0 \gamma_2 + a_1 \gamma_1 + a_2 \gamma_0$$

sono *costanti arbitrarie*, quindi γ_0, γ_1, γ_2 *sono pure costanti arbitrarie.*

Per il seguito interessa mettere in evidenza una determinata soluzione particolare dell'equazione (R_3) (non omogenea) e la soluzione generale dell'equazione omogenea corrispondente ad (R_3). A tale scopo pongo, per brevità,

$$(23) \qquad A_s = \sum_0^{s} {}_r \sum_0^{r} {}_\varrho (-1)^r \binom{r}{\varrho} \binom{\varrho}{s-r-\varrho} \frac{a_1^{r-\varrho} a_2^{r+2\varrho-s} a_3^{s-r-\varrho}}{a_0^{r+1}} \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, \nu) .$$

Allora la (21) si può scrivere:

$$(21)' \qquad \gamma_\nu = \sum_0^{\nu-3} {}_s A_s b_{\nu-s} + (b_0 A_\nu + b_1 A_{\nu-1} + b_2 A_{\nu-2}) ,$$

dove

$$\sum_0^{\nu-3} {}_s A_s b_{\nu-s}$$

è una soluzione particolare dell'equazione (R_3) (non omogenea), e

$$b_0 A_\nu + b_1 A_{\nu-1} + b_2 A_{\nu-2} \qquad (b_0,\ b_1,\ b_2 \text{ costanti arbitrarie})$$

è la soluzione generale dell'equazione omogenea corrispondente ad (R_3).

Convenzione importante. Nelle formule risolutive delle precedenti equazioni ricorrenti figurano varie potenze della forma $a_k^{r_k}$, con r_k intero non negativo. Per tali potenze *si deve qui convenire* che quando risulta $a_k = 0$ si abbia:

$$a_k^{r_k} = 0^{r_k} = \varepsilon_{r_k} \, ,$$

essendo (cfr. [5], n. 2.2)

$$\ldots = \varepsilon_{-2} = \varepsilon_{-1} = 0 \, , \qquad \varepsilon_0 = 1 \, , \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = 0 \, .$$

§ 3. - Risoluzione dell'equazione (E_1).

3.1. - Caso del passo $h > 0$.

A) Considero dapprima la più semplice delle equazioni (E_n) con $h > 0$, ossia

$$(E_1)' \qquad \tilde{a}_0 u(x+h) + \tilde{a}_1 u(x) = f(x) \qquad (h > 0) \, ,$$

dove: $f(x)$ è una data funzione (reale o complessa) univoca, definita in modo qualsiasi su un intervallo $(x_0 \ldots x_1 -)$ con $x_1 - x_0 > h$ [4]; i coefficienti $\tilde{a}_0 = \tilde{a}_0(x; h)$, $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_1(x; h)$ sono date costanti per l'incremento h, mai nulle nell'intervallo $(x_0 \ldots (x_0 + h) -)$.

Mutando x in $x - h$ la (E_1)$'$ diventa

$$(24) \qquad \tilde{a}_0 u(x) + \tilde{a}_1 u(x-h) = f(x-h) \qquad (h > 0) \, ,$$

dove necessariamente deve essere $x_0 \leqslant x - h < x_1$, cioè

$$(25) \qquad x_0 + h \leqslant x < x_1 + h \, .$$

---

[4] La necessità di questa affermazione risulterà evidente in seguito; inoltre x_1 può anche essere $+\infty$.

Posto [cfr. (9)]

(26) $$x = x_0 + \nu h + \theta h = \xi_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots) ,$$

la (24) si scrive

(27) $$\tilde{a}_0 u(\xi_\nu) + \tilde{a}_1 u(\xi_{\nu-1}) = f(\xi_{\nu-1}) \qquad (\nu \geqslant 1) ,$$

dove ora, per la (26) e per la periodicità (di periodo h) dei coefficienti, si ha:

$$\tilde{a}_0 = \tilde{a}_0(x_0 + \nu h + \theta h; h) = \tilde{a}_0(x_0 + \theta h; h) = \tilde{a}_0(\xi_0; h) .$$

$$\tilde{a}_1 = \tilde{a}_1(x_0 + \nu h + \theta h; h) = \tilde{a}_1(x_0 + \theta h; h) = \tilde{a}_1(\xi_0; h) ,$$

cioè $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_1$ sono delle costanti rispetto a ν. Ne segue che la (27) è una equazione ricorrente della forma (R_1), precisamente si passa da (R_1) a (27) ponendo

(28) $$\gamma_\nu = u(\xi_\nu) , \qquad b_\nu = f(\xi_{\nu-1}) , \qquad (\nu \geqslant 1) .$$

Applicando la formula (15)′ risolutiva di (R_1) e tenendo conto di (16) [cioè che si ha $b_0 = \tilde{a}_0 \gamma_0 = \tilde{a}_0 u(\xi_0)$], si trova che la soluzione generale di (27) è data da

(29) $$u(\xi_\nu) = \sum_0^{\nu-1}{}_s A_s f(\xi_{\nu-s-1}) + \tilde{a}_0 u(\xi_0) A_\nu ,$$

dove: $\nu = \nu_{(x-x_0)/h} \geqslant 1$, $u(\xi_0)$ [che è costante rispetto a ν] *va preso ad arbitrio*, inoltre si ha

(30) $$A_s = (1/\tilde{a}_0)(-\tilde{a}_1/\tilde{a}_0)^s \qquad (s = 0, 1, 2, \dots, \nu) .$$

B) Dalla (26) segue

(26)′ $$\xi_0 = x_0 + \theta h , \qquad \xi_{\nu-s-1} = x - (s+1) h , \qquad \xi_\nu = x ,$$

e quindi la (29) si può scrivere:

(31) $$u(x) = \sum_0^{\nu-1}{}_s A_s f\big(x - (s+1) h\big) + \tilde{a}_0 u(x_0 + \theta h) A_\nu \qquad (\nu \geqslant 1) ,$$

che dà la soluzione generale elementare [in forma razionale, come è detto nel n. **1.3**, 2°)] di (24), e anche di (E_1)′.

Per interpretare chiaramente la (31), osservo che la (31) equivale ad un insieme di *successive uguaglianze.* Precisamente, suddiviso l'intervallo $(x_0 \dots x_1 -)$, di definizione della $f(x)$, nei successive intervalli

$$(32) \qquad (x_0 \dots (x_0 + h) -), \; (x_0 + h \dots (x_0 + 2h) -), \; (x_0 + 2h \dots (x_0 + 3h) -), \; \dots$$

[nei quali le variabili rispettive sono (cfr. (26)): $x = x_0 + \theta h$, $x = x_0 + h + \theta h$, $x = x_0 + 2h + \theta h$, ..., $(0 \leqslant \theta < 1)$], la (31) equivale ad affermare via via:

$$u(x_0 + h + \theta h) = A_0 f(x_0 + \theta h) + \tilde{a}_0 u(x_0 + \theta h) A_1 ,$$

$$u(x_0 + 2h + \theta h) = \{A_0 f(x_0 + h + \theta h) + A_1 f(x_0 + \theta h)\} + \tilde{a}_0 u(x_0 + \theta h) A_2 ,$$

$$u(x_0 + 3h + \theta h) = \{A_0 f(x_0 + 2h + \theta h) + A_1 f(x_0 + h + \theta h) + A_2 f(x_0 + \theta h)\} + \\ + \tilde{a}_0 u(x_0 + \theta h) A_3 ,$$

. . . .

Da qui risulta evidente che, preso ad arbitrio $u(x_0 + \theta h)$ $(0 \leqslant \theta < 1)$, cioè il valore di $u(x)$ in $(x_0 \dots (x_0 + h) -)$, la soluzione $u(x)$ risulta determinata in $(x_0 + h \dots x_1 -)$. Se prendo semplicemente $u(x) = 0$ per $x \in (x_0 \dots (x_0 + h) -)$, ottengo la speciale soluzione particolare $u(x)$ seguente (dove $0 \leqslant \theta < 1$):

$$u(x_0 + \theta h) = 0 ,$$

$$u(x_0 + h + \theta h) = A_0 f(x_0 + \theta h) ,$$

$$u(x_0 + 2h + \theta h) = A_0 f(x_0 + h + \theta h) + A_1 f(x_0 + \theta h) ,$$

$$u(x_0 + 3h + \theta h) = A_0 f(x_0 + 2h + \theta h) + A_1 f(x_0 + h + \theta h) + A_2 f(x_0 + \theta h) ,$$

. . . .,

soluzione che indicherò con $F(x; h)$.

Tenendo poi presente la (30) per $s = \nu$, e notando che dalla (26) segue

$$(26)'' \qquad \nu = (x/h) - (x_0 + \theta h)/h ,$$

la (31) si può scrivere

$$(31)' \qquad u(x) = F(x; h) + u(x_0 + \theta h)(-\tilde{a}_1/\tilde{a}_0)^{-(x_0 + \theta h)/h} \cdot (-\tilde{a}_1/\tilde{a}_0)^{x/h}.$$

Osservo, infine, che nella (31)' la $u(x_0+\theta h)$, $0\leqslant\theta<1$, contenendo θ [che è una funzione (della x) periodica di periodo h, cfr. (12)], va considerata *un'arbitraria costante* per l'incremento h [cfr. loc. cit. in (2)]. Sarà quindi tale anche il coefficiente di $(-\tilde{a}_1/\tilde{a}_0)^{x/h}$: indicherò questo coefficiente con $\tilde{c}(x;h)$.

Concludo allora:

La soluzione generale elementare dell'equazione alle differenze $(E_1)'$ *ha la forma*

$$u(x)=F(x;h)+U(x;h)\,,$$

dove:

$$F(x;h)=\begin{cases}0\,, & x\in(x_0\ldots(x_0+h)-)\\ \sum_0^{\nu-1}{}_s\,A_s f(x-(s+1)h), \quad \nu=\nu_{(x-x_0)/h}, & x\in(x_0+h\ldots x_1-),\end{cases}\tag{33}$$

è (v. Introduzione, n. **1.3**) *la soluzione elementare dell'equazione* $(E_1)'$ (5);

$$U(x;h)=\tilde{c}(x;h)\,(-\tilde{a}_1/\tilde{a}_0)^{x/h}\tag{34}$$

[$\tilde{c}(x;h)$ *arbitraria costante per l'incremento* h, $x\in(-\infty\ldots+\infty)$] *è* (v. Introduzione, n. **1.3**) *la soluzione generale elementare dell'equazione omogenea corrispondente ad* $(E_1)'$ [ora, però, a motivo del passaggio (31)', la $U(x;h)$ non ha più forma razionale nei coefficienti].

3.2. - Caso del passo $h<0$.

Considero ora l'equazione

$$\tilde{a}_0 u(x+h)+\tilde{a}_1 u(x)=f(x)\qquad(h<0)\,,\tag{$(E_1)''$}$$

dove su $f(x)$, $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_1$ valgono le stesse ipotesi fatte al n. **3.1**, A).

Essendo qui $h=-|h|$, la $(E_1)''$ si può scrivere

$$\tilde{a}_0 u(x-|h|)+\tilde{a}_1 u(x)=f(x)\qquad(h<0)\,,$$

(5) Se $f(x)$ è definita in un intervallo $(x_1+\cdots x_0)$, con x_1 eventualmente uguale a $-\infty$, si pone $x=x_0-\nu h-\theta h$ $(\nu=\nu_{(x_0-x)/h},\ 0\leqslant\theta<1)$ e con analogo procedimento si trova una soluzione particolare $F(x;h)$. Se $f(x)$ è definita in $(-\infty\cdots+\infty)$ basta fissare un x_0 e poi considerare i due intervalli $(-\infty\cdots x_0)$, $(x_0\cdots+\infty)$.

ossia

$$\tilde{a}_1 u(x) + \tilde{a}_0 u(x - |h|) = f(x) \qquad (h < 0)\,, \tag{35}$$

che è un'equazione del tipo (24). Precisamente (sempre ricordando che qui è $h<0$), da (24) si passa a (35) così:

1°) si scambiano fra loro i coefficienti $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_1$,
2°) si sostituisce h con $|h|$,
3°) si muta $f(x-|h|)$ in $f(x)$.

Tenendo conto di ciò, concludo facilmente (6):
La soluzione generale elementare dell'equazione alle differenze $(E_1)''$ *ha la forma*

$$u(x) = \overline{F}(x; h) + \overline{U}(x; h)\,,$$

dove:

$$\overline{F}(x;h) = \begin{cases} 0\,, & x \in (x_0 \dots (x_0 - h) -) \\ \sum_0^{\nu-1}{}_s \overline{A}_s\, f(x + sh)\,, \quad \nu = \nu_{(x-x_0)/(-h)}\,, & x \in (x_0 - h \dots x_1 -)\,, \end{cases} \tag{36}$$

è (v. Introduzione, n. **1.3**) *la soluzione elementare dell'equazione* $(E_1)''$ [*con* $\overline{A}_s = (1/\tilde{a}_1)(-\tilde{a}_0/\tilde{a}_1)^s$];

$$\overline{U}(x; h) = \tilde{c}(x; h)\,(-\tilde{a}_1/\tilde{a}_0)^{x/h} \tag{37}$$

[$\tilde{c}(x; h)$ *arbitraria costante per l'incremento* h, $x \in (-\infty \dots +\infty)$] *è* (v. Introduzione, n. **1.3**) *la soluzione generale elementare dell'equazione omogenea corrispondente ad* $(E_1)''$.

§ 4. - Risoluzione dell'equazione (E_2).

4.1. - Caso del passo $h > 0$.

A) Considero l'equazione (E_2) con $h > 0$, ossia

$$\tilde{a}_0 u(x + 2h) + \tilde{a}_1 u(x + h) + \tilde{a}_2 u(x) = f(x) \qquad (h > 0)\,, \tag{E_2}'$$

(6) Si tenga presente che, essendo $h < 0$, risulta:

$$|h| = -h\,, \qquad (-\tilde{a}_0/\tilde{a}_1)^{x/|h|} = (-\tilde{a}_1/\tilde{a}_0)^{x/h}, \qquad f(x - s|h|) = f(x + sh)\,.$$

dove: $f(x)$ è una data funzione (reale o complessa) univoca, definita in modo qualsiasi su un intervallo $(x_0 \dots x_1 -)$ con $x_1 - x_0 > 2h$ (7); i coefficienti $\tilde{a}_0 = \tilde{a}_0(x; h)$, $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_1(x; h)$, $\tilde{a}_2 = \tilde{a}_2(x; h)$ sono date costanti per l'incremento h, e $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_2$ non sono mai nulle nell'intervallo $(x_0 \dots (x_0 + h) -)$.

Mutando x in $x - 2h$, la $(\mathrm{E}_2)'$ diventa

$$\tilde{a}_0 u(x) + \tilde{a}_1 u(x-h) + \tilde{a}_2 u(x - 2h) = f(x - 2h) \qquad (h > 0)\,, \tag{38}$$

dove necessariamente deve essere $x_0 \leqslant x - 2h < x_1$, cioè

$$x_0 + 2h \leqslant x < x_1 + 2h\,. \tag{39}$$

Posto [come nel n. **3.1**, A)]

$$x = x_0 + \nu h + \theta h = \xi_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots)\,, \tag{40}$$

la (38) si scrive

$$\tilde{a}_0 u(\xi_\nu) + \tilde{a}_1 u(\xi_{\nu-1}) + \tilde{a}_2 u(\xi_{\nu-2}) = f(\xi_{\nu-2}) \qquad (\nu \geqslant 2)\,, \tag{41}$$

dove $\tilde{a}_0 = \tilde{a}_0(\xi_0; h)$, $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_1(\xi_0; h)$, $\tilde{a}_2 = \tilde{a}_2(\xi_0; h)$ sono delle costanti rispetto a ν [cfr. le analoghe affermazioni del n. **3.1**, A)]. Ne segue che la (41) è un'equazione ricorrente della forma (R_2), precisamente si passa da (R_2) a (41) ponendo

$$\gamma_\nu = u(\xi_\nu)\,, \qquad b_\nu = f(\xi_{\nu-2}), \qquad (\nu \geqslant 2)\,.$$

Applicando la formula $(18)'$ risolutiva di (R_2) e tenendo conto di (19) [cioè che si ha $b_0 = \tilde{a}_0 \gamma_0 = \tilde{a}_0 u(\xi_0)$, $b_1 = \tilde{a}_0 \gamma_1 + \tilde{a}_1 \gamma_0 = \tilde{a}_0 u(\xi_1) + \tilde{a}_1 u(\xi_0)$], si trova che la soluzione generale di (41) è data da

$$u(\xi_\nu) = \sum_0^{\nu-2}{}_s A_s \cdot f(\xi_{\nu-s-2}) + \left\{\tilde{a}_0 u(\xi_0) \cdot A_\nu + [\tilde{a}_0 u(\xi_1) + \tilde{a}_1 u(\xi_0)] A_{\nu-1}\right\}, \tag{42}$$

dove: $\nu = \nu_{(x-x_0)/h} \geqslant 2$, $u(\xi_0)$ e $u(\xi_1)$ [che sono costanti rispetto a ν] *vanno prese ad arbitrio*, inoltre si ha

$$A_s = \sum_0^{s}{}_r (-1)^r \binom{r}{s-r} \tilde{a}_1^{2r-s} \tilde{a}_2^{s-r} / \tilde{a}_0^{r+1} \qquad (s = 0, 1, 2, \dots, \nu)\,, \tag{43}$$

---

(7) La necessità di questa affermazione risulterà evidente in seguito; inoltre x_1 può anche essere $+\infty$.

od anche

$$(43)' \qquad A_s = (\tilde{a}_2/\tilde{a}_0)^s A_s^*, \quad \text{con} \quad A_s^* = \sum_0^s {}_r (-1)^r \binom{r}{s-r} \tilde{a}_0^{s-r-1} \tilde{a}_1^{2r-s}/\tilde{a}_2^r$$
$$(s = 0, 1, 2, \ldots, \nu) .$$

B) Dalla (40) segue

$$(40)' \qquad \begin{cases} \xi_0 = x_0 + \theta h , & \xi_1 = x_0 + h + \theta h, \\ \xi_{\nu-s-2} = x - (s+2)h , & \xi_\nu = x , \end{cases}$$

e quindi la (42) si può scrivere:

$$(44) \qquad u(x) = \sum_0^{\nu-2} {}_s A_s \, f\big(x - (s+2)h\big) + (B_1 A_\nu + B_2 A_{\nu-1}) \qquad (\nu \geqslant 2) ,$$

dove ho posto, per brevità,

$$(45) \qquad \begin{cases} B_1 = \tilde{a}_0 u(x_0 + \theta h) \\ B_2 = \tilde{a}_0 u(x_0 + h + \theta h) + \tilde{a}_1 u(x_0 + \theta h) . \end{cases}$$

La (44) dà quindi la soluzione generale elementare [in forma *razionale*, com'è detto nel n. **1.3**, 2°)] di (38) e anche di $(E_2)'$.

Per interpretare chiaramente la (44), osservo che la (44) equivale ad un insieme di *successive uguaglianze*. Precisamente, suddiviso l'intervallo $(x_0 \ldots x_1 -)$, di definizione della $f(x)$, nei successivi intervalli

$$(46) \qquad \begin{cases} (x_0 \ldots (x_0 + h) -) , & (x_0 + h \ldots (x_0 + 2h) -) , \\ (x_0 + 2h \ldots (x_0 + 3h) -) , & (x_0 + 3h \ldots (x_0 + 4h) -) , \qquad \ldots \end{cases}$$

[nei quali le variabili rispettive sono (cfr. (40)) $x = x_0 + \theta h$, $x = x_0 + h + \theta h$, $x = x_0 + 2h + \theta h$, $x = x_0 + 3h + \theta h$, ..., $(0 \leqslant \theta < 1)$], la (44) equivale ad affermare via via:

$$u(x_0 + 2h + \theta h) = A_0 f(x_0 + \theta h) + (B_1 A_2 + B_2 A_1) ,$$

$$u(x_0 + 3h + \theta h) = A_0 f(x_0 + h + \theta h) + A_1 f(x_0 + \theta h) + (B_1 A_3 + B_2 A_2) ,$$

$$u(x_0 + 4h + \theta h) = A_0 f(x_0 + 2h + \theta h) + A_1 f(x_0 + h + \theta h) + A_2 f(x_0 + \theta h) + (B_1 A_4 + B_2 A_3) ,$$

. . . .

Da qui, ricordando le (45), risulta evidente che, preso ad arbitrio $u(x_0 + \theta h)$ e $u(x_0 + h + \theta h)$ $(0 \leqslant \theta < 1)$, cioè preso ad arbitrio i valori di $u(x)$ in $(x_0 \dots (x_0 + 2h) -)$, la soluzione $u(x)$ risulta determinata in $(x_2 + 2h \dots x_1 -)$. Se prendo semplicemente $u(x) = 0$ per $x \in (x_0 \dots (x_0 + 2h) -)$, ottengo la speciale soluzione particolare $u(x)$ seguente (dove $0 \leqslant \theta < 1$):

$$u(x_0 + \theta h) = u(x_0 + h + \theta h) = 0 \,,$$

$$u(x_0 + 2h + \theta h) = A_0 f(x_0 + \theta h) \,,$$

$$u(x_0 + 3h + \theta h) = A_0 f(x_0 + h + \theta h) + A_1 f(x_0 + \theta h) \,,$$

$$u(x_0 + 4h + \theta h) = A_0 f(x_0 + 2h + \theta h) + A_1 f(x_0 + h + \theta h) + A_2 f(x_0 + \theta h) \,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$$

soluzione che indicherò con $F(x; h)$.

Tenendo poi presente la (43)′ per $s = \nu$ e $s = \nu - 1$, e notando che dalla (40) segue

$$(40)'' \qquad \nu = (x/h) - (x_0 + \theta h)/h \,, \qquad \nu - 1 = [(x - h)/h] - (x_0 + \theta h)/h \,,$$

la (44) si può scrivere

$$(44)' \quad \begin{cases} u(x) = F(x; h) + \\ + [B_1 (\tilde{a}_2/\tilde{a}_0)^{-(x_0+\theta h)/h} (\tilde{a}_2/\tilde{a}_0)^{x/h} A^*_\nu + B_2 (\tilde{a}_2/\tilde{a}_0)^{-(x_0+\theta h)/h} (\tilde{a}_2/\tilde{a}_0)^{(x-h)/h} A^*_{\nu-1}] \,. \end{cases}$$

Osservo, infine, che nella (44)′ le B_1 e B_2, date da (45), contenendo θ [che è una funzione (della x) periodica di periodo h, cfr. (12)], vanno considerate *arbitrarie costanti* per l'incremento h [cfr. loc. cit. in (2)]. Saranno quindi tali anche i prodotti $B_1 (\tilde{a}_2/\tilde{a}_0)^{-(x_0+\theta h)/h}$, $B_2 (\tilde{a}_2/\tilde{a}_0)^{-(x_0+\theta h)/h}$, che indicherò rispettivamente con $\tilde{c}_1(x; h)$, $\tilde{c}_2(x; h)$.

Concludo allora:

La soluzione generale elementare dell'equazione alle differenze $(\mathrm{E}_2)'$ *ha la forma*

$$u(x) = F(x; h) + U(x; h) \,,$$

dove:

$$(47) \qquad F(x; h) = \begin{cases} 0 \,, & x \in (x_0 \dots (x_0 + 2h) -) \\ \sum_{0}^{\nu-2}{}_s A_s f(x - (s + 2) h), \quad \nu = \nu_{(x-x_0)/h} \,, & x \in (x_0 + 2h \dots x_1 -) \,, \end{cases}$$

è (v. Introduzione, n. **1.3**) *la soluzione elementare dell'equazione* $(\mathrm{E}_2)'$ ([8]);

$$U(x;\,h) = \tilde{c}_1(x;\,h)\,(\tilde{a}_2/\tilde{a}_0)^{x/h}\,A_\nu^* + \tilde{c}_2(x;\,h)\,(\tilde{a}_2/\tilde{a}_0)^{(x-h)/h}\,A_{\nu-1}^* \tag{48}$$

[$\tilde{c}_1(x;h)$, $\tilde{c}_2(x;\,h)$ *arbitrarie costanti per l'incremento* h, $\nu=\nu_{(x-x_0)/h}$, $x\in(x_0\ldots+\infty)$ ([9])] è (v. Introduzione, n. **1.3**) *la soluzione generale elementare dell'equazione omogenea corrispondente ad* $(\mathrm{E}_2)'$ ([10]) [ora, però, a motivo del passaggio $(44)'$, la $U(x;\,h)$ non ha più forma *razionale* nei coefficienti].

4.2. - Caso del passo $h<0$.

Considero ora l'equazione

$$\tilde{a}_0 u(x+2h) + \tilde{a}_1 u(x+h) + \tilde{a}_2 u(x) = f(x) \qquad (h<0)\,, \tag{E_2}''$$

dove su $f(x)$, $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_2$ valgono le stesse ipotesi fatte al n. **4.1**, A).

Essendo qui $h=-|h|$, la $(\mathrm{E}_2)''$ si può scrivere

$$\tilde{a}_0 u(x-2|h|) + \tilde{a}_1 u(x-|h|) + \tilde{a}_2 u(x) = f(x) \qquad (h<0)\,,$$

ossia

$$\tilde{a}_2 u(x) + \tilde{a}_1 u(x-|h|) + \tilde{a}_0 u(x-2|h|) = f(x) \qquad (h<0)\,, \tag{49}$$

che è un'equazione del tipo (38). Precisamente (sempre ricordando che qui è $h<0$), da (38) si passa a (49) così:

1°) si scambiano fra loro i coefficienti $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_2$,
2°) si sostituisce h con $|h|$,
3°) si muta $f(x-2|h|)$ in $f(x)$.

Tenendo conto di ciò, concludo facilmente ([11]):

([8]) Cfr. annotazione ([5]).

([9]) La soluzione generale dell'equazione omogenea esiste anche in $(-\infty\ldots x_0)$: la sua espressione si ottiene in modo analogo a quanto si è fatto in $(x_0\ldots+\infty)$, ponendo però $x=x_0-\nu h-\theta h$ $(\nu=\nu_{\,x_0-x)/h}\,,\ 0\leqslant\theta<1)$ [v. annotazione ([5])].

([10]) Ne discende che $(\tilde{a}_2/\tilde{a}_0)^{x/h}A_\nu^*$, $(\tilde{a}_2/\tilde{a}_0)^{(x-h)/h}A_{\nu-1}^*$ costituiscono necessariamente un sistema fondamentale di soluzioni per l'equazione omogenea corrispondente ad $(\mathrm{E}_2)'$.

([11]) Si tenga presente che, essendo $h<0$, risulta:

$$|h|=-h\,,\qquad (\tilde{a}_0/\tilde{a}_2)^{x/|h|}=(\tilde{a}_2/\tilde{a}_0)^{x/h},\qquad (\tilde{a}_0/\tilde{a}_2)^{(x-|h|)/|h|}=(\tilde{a}_2/\tilde{a}_0)^{(x+h)/h},$$

$$f(x-s|h|)=f(x+sh)\,.$$

La soluzione generale elementare dell'equazione alle differenze $(E_2)''$ *ha la forma*

$$u(x) = \overline{F}(x; h) + \overline{U}(x; h)\,,$$

dove:

$$(50)\qquad \overline{F}(x; h) = \begin{cases} 0\,, & x \in (x_0 \dots (x_0 - 2h) -) \\ \sum_0^{\nu-2}{}_s \overline{A}_s\, f(x + sh)\,, \qquad \nu = \nu_{(x-x_0)/(-h)}, & x \in (x_0 - 2h \dots x_1 -)\,, \end{cases}$$

è (v. Introduzione, n. **1.3**) *la soluzione elementare dell'equazione* $(E_2)''$, *con*

$$\overline{A}_s = \sum_0^s{}_r (-1)^r \binom{r}{s-r} \tilde{a}_0^{s-r} \tilde{a}_1^{2r-s} / \tilde{a}_2^{r+1}\,;$$

$$(51)\qquad \overline{U}(x; h) = \tilde{c}_1(x; h)\,(\tilde{a}_2/\tilde{a}_0)^{x/h}\,\overline{A}_\nu^* + \tilde{c}_2(x; h)\,(\tilde{a}_2/\tilde{a}_0)^{(x+h)/h}\,\overline{A}_{\nu-1}^*$$

[$\tilde{c}_1(x; h)$, $\tilde{c}_2(x; h)$ *arbitrarie costanti per l'incremento* h, $\nu = \nu_{(x-x_0)/(-h)}$, $x \in (x_0 \dots + \infty)$; $\overline{A}_s = \sum_0^s{}_r (-1)^r \binom{r}{s-r} \tilde{a}_2^{s-r-1} \tilde{a}_1^{2r-s} / \tilde{a}_0^r$ $(s = \nu - 1,\ \nu)$] *è* (v. Introduzione, n. **1.3**) *la soluzione generale elementare dell'equazione omogenea corrisponde a* $(E_2)''$.

§ 5. - Risoluzione dell'equazione (E_3).

5.1. - Caso del passo $h > 0$.

A) Considero ora l'equazione (E_3) con $h > 0$, ossia

$$(E_3)' \qquad \tilde{a}_0 u(x + 3h) + \tilde{a}_1 u(x + 2h) + \tilde{a}_2 u(x + h) + \tilde{a}_3 u(x) = f(x) \quad (h > 0)\,,$$

dove: $f(x)$ è una data funzione (reale o complessa) univoca, definita in modo qualsiasi su un intervallo $(x_0 \dots x_1 -)$ con $x_1 - x_0 > 3h$ ([12]); i coefficienti $\tilde{a}_0 = \tilde{a}_0(x; h)$, $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_1(x; h)$, $\tilde{a}_2 = \tilde{a}_2(x; h)$, $\tilde{a}_3 = \tilde{a}_3(x; h)$ sono date costanti per l'incremento h, e $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_3$ non sono mai nulle nell'intervallo $(x_0 \dots (x_0 + h) -)$.

Mutando x in $x - 3h$, la $(E_3)'$ diventa

$$(52)\qquad \tilde{a}_0 u(x) + \tilde{a}_1 u(x - h) + \tilde{a}_2 u(x - 2h) + \tilde{a}_3 u(x - 3h) = f(x - 3h) \quad (h > 0),$$

([12]) La necessità di questa affermazione risulterà evidente in seguito; inoltre x_1 può anche essere $+ \infty$.

dove necessariamente deve essere $x_0 \leqslant x - 3h < x_1$, cioè

$$x_0 + 3h \leqslant x < x_1 + 3h \,. \tag{53}$$

Posto [come nei nn. **3.1** e **4.1**, A)]

$$x = x_0 + \nu h + \theta h = \xi_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \,, \tag{54}$$

la (52) si scrive

$$\tilde{a}_0 u(\xi_\nu) + \tilde{a}_1 u(\xi_{\nu-1}) + \tilde{a}_2 u(\xi_{\nu-2}) + \tilde{a}_3 u(\xi_{\nu-3}) = f(\xi_{\nu-3}) \qquad (\nu \geqslant 3) \,, \tag{55}$$

dove $\tilde{a}_0 = \tilde{a}_0(\xi_0; h)$, $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_1(\xi_0; h)$, $\tilde{a}_2 = \tilde{a}_2(\xi_0; h)$, $\tilde{a}_3 = \tilde{a}_3(\xi_0; h)$ sono delle costanti rispetto a ν [cfr. le analoghe affermazioni dei nn. **3.1** e **4.1**, A)]. Ne segue che la (55) è un'equazione ricorrente della forma (R_3), precisamente si passa da (R_3) a (55) ponendo

$$\gamma_\nu = u(\xi_\nu) \,, \qquad b_\nu = f(\xi_{\nu-3}) \,, \qquad (\nu \geqslant 3) \,.$$

Applicando la formula (21)′ risolutiva di (R_3) e tenendo conto di (22) [cioè che è $b_0 = \tilde{a}_0 \gamma_0 = \tilde{a}_0 u(\xi_0)$, $b_1 = \tilde{a}_0 \gamma_1 + \tilde{a}_1 \gamma_0 = \tilde{a}_0 u(\xi_1) + \tilde{a}_1 u(\xi_0)$, $b_2 = \tilde{a}_0 \gamma_2 + \tilde{a}_1 \gamma_1 + \tilde{a}_2 \gamma_0 = \tilde{a}_0 u(\xi_2) + \tilde{a}_1 u(\xi_1) + \tilde{a}_2 u(\xi_0)$], si trova che la soluzione generale di (55) è data da

$$\left\{ \begin{aligned} & u(\xi_\nu) = \sum_{0}^{\nu-3}{}_s A_s \, f(\xi_{\nu-s-3}) + \\ & + \{ \tilde{a}_0 u(\xi_0) A_\nu + [\tilde{a}_0 u(\xi_1) + \tilde{a}_1 u(\xi_0)] A_{\nu-1} + [\tilde{a}_0 u(\xi_2) + \tilde{a}_1 u(\xi_1) + \tilde{a}_2 u(\xi_0)] A_{\nu-2} \} , \end{aligned} \right. \tag{56}$$

dove: $\nu = \nu_{(x-x_0)/h} \geqslant 3$, $u(\xi_0)$, $u(\xi_1)$, $u(\xi_2)$ [che sono costanti rispetto a ν] *vanno prese ad arbitrio*, inoltre si ha

$$\left\{ \begin{aligned} & A_s = \sum_{0}^{s}{}_r \sum_{0}^{r}{}_\varrho (-1)^r \binom{r}{\varrho} \binom{\varrho}{s-r-\varrho} \tilde{a}_1^{r-\varrho} \tilde{a}_2^{r+2\varrho-s} \tilde{a}_3^{s-r-\varrho} / \tilde{a}_0^{r+1} \\ & (s = 0, 1, 2, \ldots, \nu) \,, \end{aligned} \right. \tag{57}$$

od anche

$$A_s = (-\tilde{a}_3/\tilde{a}_0)^s \, A_s^* \,, \tag{57$'$}$$

con

$$A_s^* = \sum_0^s{}_r \sum_0^r{}_\varrho (-1)^{s-r} \binom{r}{\varrho} \binom{\varrho}{s-r-\varrho} \tilde{a}_0^{s-r-1} \tilde{a}_1^{r-\varrho} \tilde{a}_2^{r+2\varrho-s} / \tilde{a}_3^{r+\varrho} \qquad (s=0, 1, 2, \ldots, \nu) .$$

B) Dalla (54) segue

$$(54)' \quad \begin{cases} \xi_0 = x_0 + \theta h , \qquad \xi_1 = x_0 + h + \theta h , \qquad \xi_2 = x_0 + 2h + \theta h , \ \ldots, \\ \qquad\qquad \xi_{\nu-s-3} = x - (s+3) h , \qquad \xi_\nu = x , \end{cases}$$

e quindi la (56) si può scrivere:

$$(58) \qquad u(x) = \sum_0^{\nu-3}{}_s A_s\, f(x - (s+3) h) + \{B_1 A_\nu + B_2 A_{\nu-1} + B_3 A_{\nu-2}\} \qquad (\nu \geqslant 3) ,$$

dove ho posto, per brevità,

$$(59) \quad \begin{cases} B_1 = \tilde{a}_0 u(x_0 + \theta h) \\ B_2 = \tilde{a}_0 u(x_0 + h + \theta h) + \tilde{a}_1 u(x_0 + \theta h) \\ B_3 = \tilde{a}_0 u(x_0 + 2h + \theta h) + \tilde{a}_1 u(x_0 + h + \theta h) + \tilde{a}_2 u(x_0 + \theta h) . \end{cases}$$

La (58) dà quindi la soluzione generale elementare [in forma *razionale*, com'è detto nel n. **1.3**, 2°)] di (52) e anche di $(E_3)'$.

Ragionando ora sulla (58) in modo analogo a quanto ho fatto nei nn. **3.1** e **4.1**, B) sulle (31) e (44) ([13]), concludo:

La soluzione generale elementare dell'equazione alle differenze $(E_3)'$ *ha la forma*

$$u(x) = F(x; h) + U(x; h) ,$$

dove:

$$(60) \qquad F(x; h) = \begin{cases} 0 , & x \in (x_0 \ldots (x_0 + 3h) -) \\ \sum_0^{\nu-3}{}_s A_s\, f(x - (s+3) h), \quad \nu = \nu_{(x-x_0)/h} , & x \in (x_0 + 3h \ldots x_1 -) , \end{cases}$$

([13]) Qui, in particolare, si terrà presente la (57)′ per $s = \nu$, $s = \nu - 1$, $s = \nu - 2$, e si noterà che dalla (54) segue

$$\nu = (x/h) - (x_0 + \theta h)/h , \qquad \nu - 1 = \{(x-h)/h\} - (x_0 + \theta h)/h ,$$
$$\nu - 2 = \{(x - 2h)/h\} - (x_0 + \theta h)/h .$$

è (v. Introduzione, n. **1.3**) *la soluzione elementare dell'equazione* $(\mathrm{E}_3)'$ ([14]);

$$(61)\quad \begin{cases} U(x;h) = \tilde{c}_1\cdot(-\tilde{a}_3/\tilde{a}_0)^{x/h}A_\nu^* + \tilde{c}_2\cdot(-\tilde{a}_3/\tilde{a}_0)^{(x-h)/h}A_{\nu-1}^* + \\ \qquad\qquad + \tilde{c}_3\cdot(-\tilde{a}_3/\tilde{a}_0)^{(x-2h)/h}A_{\nu-2}^* \end{cases}$$

[*essendo* $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$, $\tilde{c}_3$ *arbitrarie costanti per l'incremento* h, $\nu=\nu_{(x-x_0)/h}$, $x\in(x_0\ldots+\infty)$ ([15])] *è* (v. Introduzione, n. **1.3**) *la soluzione generale elementare dell'equazione omogenea corrispondente ad* $(\mathrm{E}_3)'$ ([16]) [ora, però, a motivo di un passaggio simile a (31)' e (44)', la $U(x;h)$ non ha più forma *razionale* nei coefficienti].

5.2. - Caso del passo $h<0$.

Considero ora l'equazione

$$(\mathrm{E}_3)''\quad \tilde{a}_0u(x+3h)+\tilde{a}_1u(x+2h)+\tilde{a}_2u(x+h)+\tilde{a}_3u(x)=f(x)\qquad(h<0)\,,$$

dove su $f(x)$, $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_2$, $\tilde{a}_3$ valgono le stesse ipotesi fatte al n. **5.1**, A).

Essendo qui $h=-|h|$, la $(\mathrm{E}_3)''$ si può scrivere

$$\tilde{a}_0u(x-3|h|)+\tilde{a}_1u(x-2|h|)+\tilde{a}_2u(x-|h|)+\tilde{a}_3u(x)=f(x)\qquad(h<0)\,,$$

ossia

$$(62)\quad \tilde{a}_3u(x)+\tilde{a}_2u(x-|h|)+\tilde{a}_1u(x-2|h|)+\tilde{a}_0u(x-3|h|)=f(x)\qquad(h<0),$$

che è un'equazione del tipo (52). Precisamente (sempre ricordando che qui è $h<0$), da (52) si passa a (62) così:

1°) si scambiano fra loro i coefficienti $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_3$, e $\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_2$,
2°) si sostituisce h con $|h|$,
3°) si muta $f(x-3|h|)$ in $f(x)$.

Tenendo conto di ciò, concludo facilmente ([17]):

([14]) Cfr. annotazione ([5]).

([15]) Cfr. annotazione ([9]).

([16]) Ne discende che $(-\tilde{a}_3/\tilde{a}_0)^{x/h}A_\nu$, $(-\tilde{a}_3/\tilde{a}_0)^{(x-h)/h}A_{\nu-1}^*$, $(-\tilde{a}_3/\tilde{a}_0)^{(x-2h)/h}A_{\nu-2}$ costituiscono necessariamente un sistema fondamentale di soluzioni per l'equazione omogenea corrispondente ad $(\mathrm{E}_3)'$.

([17]) Si tenga presente che, essendo $h<0$, risulta:

$$|h|=-h\,,\qquad (-\tilde{a}_0/\tilde{a}_3)^{x/|h|}=(-\tilde{a}_3/\tilde{a}_0)^{x/h},\qquad (-\tilde{a}_0/\tilde{a}_3)^{(x-|h|)/|h|}=(-\tilde{a}_3/\tilde{a}_0)^{(x+h)/h},$$

$$(-\tilde{a}_0/\tilde{a}_3)^{(x-2|h|)/|h|}=(-\tilde{a}_3/\tilde{a}_0)^{(x+2h)/h},\qquad f(x-s|h|)=f(x+sh)\,.$$

La soluzione generale elementare dell'equazione alle differenze $(E_3)''$ *ha la forma*

$$u(x) = \overline{F}(x; h) + \overline{U}(x; h) ,$$

dove:

$$(63)\quad \overline{F}(x; h) = \begin{cases} 0 , & x \in (x_0 \dots (x_0 - 3h) -) \\ \sum_{0}^{\nu-3}{}_s \overline{A}_s\, f(x + sh) , \quad \nu = \nu_{(x-x_0)/(-h)} , & x \in (x_0 - 3h \dots x_1 -) , \end{cases}$$

è (v. Introduzione, n. **1.3**) *la soluzione elementare dell'equazione* $(E_3)''$, *con*

$$\overline{A}_s = \sum_{0}^{s}{}_r \sum_{0}^{r}{}_\varrho (-1)^r \binom{r}{\varrho} \binom{\varrho}{s - r - \varrho} \tilde{a}_0^{s-r-\varrho}\, \tilde{a}_1^{r+2\varrho-s}\, \tilde{a}_2^{r-\varrho} / \tilde{a}_3^{r+1} ;$$

$$(64)\ \overline{U}(x;h) = \tilde{c}_1 \cdot (-\tilde{a}_3/\tilde{a}_0)^{x/h} \cdot \overline{A}_\nu^* + \tilde{c}_2 \cdot (-\tilde{a}_3/\tilde{a}_0)^{(x+h)/h} \cdot \overline{A}_{\nu-1}^* + \tilde{c}_3 \cdot (-\tilde{a}_3/\tilde{a}_0)^{(x+2h)/h} \cdot \overline{A}_{\nu-2}^*$$

[*essendo* $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$, $\tilde{c}_3$ *arbitrarie costanti per l'incremento* h, $\nu = \nu_{(x-x_0)/(-h)}$, $x \in \in (x_0 \dots + \infty)$;

$$\overline{A}_s^* = \sum_{0}^{s}{}_r \sum_{0}^{r}{}_\varrho (-1)^{s-r} \binom{r}{\varrho} \binom{\varrho}{s - r - \varrho} \tilde{a}_1^{r+2\varrho-s}\, \tilde{a}_2^{r-\varrho}\, \tilde{a}_3^{s-r-1} / \tilde{a}_0^{r+\varrho} \qquad (s = \nu - 2,\ \nu - 1,\ \nu)$$

è (v. Introduzione, n. **1.3**) *la soluzione generale elementare dell'equazione omogenea corrispondente ad* $(E_3)''$.

§ 6. - Esempi .

6.1. - Equazioni del tipo (E_1) [18].

I. — *Risolvere l'equazione*

$$2\pi \cdot u(x + 1) - \cos 2\pi x \cdot u(x) = 2\pi \qquad (x \geqslant 0) .$$

1°) Calcolo la soluzione elementare $F(x; 1)$ che si ottiene applicando la (33). Si ha ora, in virtù di (30),

$$A_s = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\cos 2\pi x}{2\pi}\right)^s ,$$

---

[18] Per esempi di equazioni del tipo (E_1) con $\tilde{a}_0 = 1/h$, $\tilde{a}_1 = -1/h$, cfr. [**3**], § **5**.

onde, applicando la (33) e per $x \in (1 \dots +\infty)$, la soluzione elementare è

$$F(x;\,1) = \sum_0^{\nu-1}{}_s \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos 2\pi x}{2\pi}\right)^s 2\pi = \sum_0^{\nu-1}{}_s \left(\frac{\cos 2\pi x}{2\pi}\right)^s,$$

e quindi:

$$F(x;\,1) = \begin{cases} 0\,, & x \in (0 \dots 1-) \\ (2\pi)^{1-\nu}\,\dfrac{(2\pi)^\nu - (\cos 2\pi x)^\nu}{2\pi - \cos 2\pi x}\,, \quad \nu = [x]\,, & x \in (1 \dots +\infty)\,. \end{cases}$$

Per la verifica, essendo ora $h = 1 > 0$, va notato che il mutamento di x in $x + 1$ muta ν in $\nu + 1$.

2°) Calcolo la soluzione generale elementare $U(x;\,1)$ dell'equazione omogenea corrispondente alla data equazione, soluzione che s'ottiene applicando la (34). Si ha:

$$U(x;\,1) = \tilde{c}(x;\,1)\cdot\left(\frac{\cos 2\pi x}{2\pi}\right)^x,$$

e la verifica è immediata.

II. — *Risolvere l'equazione*

$$2\,u(x+h) - e^h u(x) = e^x \qquad (x \geqslant 0,\ h < 0)\,.$$

1°) Calcolo la soluzione elementare $\overline{F}(x;\,h)$ che s'ottiene applicando la (36). Si ha ora:

$$\overline{A}_s = -\,e^{-h}\cdot(2\,e^{-h})^s = -\,2^s e^{-sh-h}\,,$$

onde, applicando la (36) e per $x \in (-h \dots +\infty)$, la soluzione elementare è

$$\overline{F}(x;\,h) = -\sum_0^{\nu-1}{}_s 2^s e^{-sh-h} e^{x+sh} = -\sum_0^{\nu-1}{}_s 2^s e^{x-h}\,,$$

e quindi

$$\overline{F}(x;\,h) = \begin{cases} 0\,, & x \in (0 \dots -h-) \\ (1-2^\nu)\,e^{x-h}\,, \quad \nu = [x/(-h)]\,, & x \in (-h \dots +\infty)\,. \end{cases}$$

Per la verifica, essendo ora $h < 0$, va notato che il mutamento di x in $x + h$ muta ν in $\nu - 1$.

2º) Calcolo la soluzione generale elementare $\overline{U}(x;\,h)$ dell'equazione omogenea corrispondente alla data equazione, soluzione che s'ottiene applicando la (37). Si ha:

$$\overline{U}(x;\,h) = \tilde{c}(x;\,h)\cdot\left(\frac{e^h}{2}\right)^{x/h},$$

e la verifica è immediata. La forma di questa soluzione coincide già, manifestamente, con quella che si può dare con i procedimenti usuali.

6.2. - Un'equazione del tipo (E_2).

Risolvere l'equazione

$$u(x+2\,h) + u(x) = x \qquad (x \geqslant 0, \quad h > 0)\,.$$

1º) Calcolo la soluzione elementare $F(x;\,h)$ che s'ottiene applicando la (47). Si ha ora (tenendo presente la (43) e la convenzione alla fine del n. **2.2**)

$$A_s = \sum_0^s{}_r\,(-1)^r\binom{r}{s-r}\varepsilon_{2r-s} \qquad (s = 0,\,1,\,2,\,\ldots,\,\nu-2)\,,$$

somme in ciascuna delle quali tutti i termini sono nulli tranne quello (quando esiste) pel quale $2r - s = 0$, cioè quello corrispondente ad $r = s/2$ con s pari, ossia ad $s = 2s'$ (s' intero), onde si ha:

$$A_{2s'} = \sum_0^{2s'}{}_r\,(-1)^r\binom{r}{2s'-r}\varepsilon_{2(r-s')} = (-1)^{s'}\binom{s'}{2s'-s'}\cdot 1 = (-1)^{s'}, \qquad A_{2s'+1} = 0\,,$$

$$\bigl(s' = 0,\,1,\,2,\,\ldots,\,\nu';\;\; \nu' = [(\nu-2)/2] = [\nu/2]-1,\;\; \nu = [x/h]\bigr)\,.$$

La soluzione elementare, applicando la (47) e per $x \in (2h \ldots +\infty)$, è quindi:

$$F(x;\,h) = \sum_0^{\nu'}{}_{s'}\,A_{2s'}\cdot\bigl\{x-(2s'+2)h\bigr\} = \sum_0^{\nu'}{}_{s'}\,(-1)^{s'}\bigl\{x-(s'+1)\cdot 2h\bigr\};$$

ma essendo

$$\sum_0^{\nu'}{}_{s'}\,(-1)^{s'} = \frac{1^{\nu'}+(-1)^{\nu'}}{2}\,, \qquad \sum_0^{\nu'}{}_{s'}\,(-1)^{s'}(s'+1) = \frac{1}{4} + (-1)^{\nu'}\,\frac{2\nu'+3}{4}\,,$$

concludo che la soluzione elementare è, per $x \in (2h \dots + \infty)$,

$$F(x;\, h) = \frac{1^{\nu'} + (-1)^{\nu'}}{2}\, x - \left\{\frac{1}{2} + (-1)^{\nu'} \frac{2\nu' + 3}{2}\right\} h = \frac{x-h}{2} + \frac{(-1)^{\nu'}}{2}\, \{x - (3 + 2\nu')h\}.$$

Si ha dunque (essendo $\nu' = [\nu/2] - 1$, $\nu = [x/h]$):

$$F(x;\, h) = \begin{cases} 0\,, & x \in (0 \dots 2h -) \\ \dfrac{x-h}{2} + \dfrac{(-1)^{\nu'}}{2}\{x - (3 + 2\nu')h\}\,, & x \in (2h \dots + \infty)\,. \end{cases}$$

Osservo che nell'espressione precedente di $F(x;\, h)$ la funzione continua $(x - h)/2$ è pure soluzione della data equazione, mentre la rimanente parte $\frac{1}{2}(-1)^{\nu'}\{x - (3 + 2\nu')h\}$ è una particolare soluzione dell'equazione omogenea corrispondente alla data equazione. Per eseguire le verifiche occorre tenere presente che mutando x in $x + 2h$ la ν si muta in $\nu + 2$ e la ν' si muta in $\nu' + 1$.

2°) Calcolo la soluzione generale elementare $U(x;\, h)$ dell'equazione omogenea corrispondente all'equazione data, soluzione che s'ottiene applicando la (48). Tenendo presente che ora è $(\tilde{a}_2/\tilde{a}_0)^{x/h} = 1^{x/h} = 1^{(\nu h + \theta h)/h} = 1^{\nu+\theta} = 1^{\theta}$ (dove θ, e quindi 1^{θ}, è una funzione periodica di periodo h), e che è anche $A_\nu^* = A_\nu$ (in virtù della (43)'), la (48) dà

$$U(x;\, h) = \tilde{c}_1(x;\, h)\, A_\nu + \tilde{c}_2(x;\, h) A_{\nu-1}\,,$$

con $\nu = [x/h]$, $x \in (0 \dots + \infty)$ e $\tilde{c}_1(x;\, h)$, $\tilde{c}_2(x;\, h)$ arbitrarie costanti per l'incremento h.

Poichè nel nostro esempio si sa risolvere l'equazione caratteristica dell'equazione omogenea corrispondente (le radici sono $\pm i$), dalla forma elementare di $U(x;\, h)$ possiamo ricavare l'espressione usuale della soluzione generale dell'equazione omogenea corrispondente. Infatti, essendo, per quanto già detto a 1°),

$$A_\nu = (-1)^{\nu'} = (i^2)^{\nu'} = i^{2\nu'} = i^\nu \text{ per } \nu = 2\nu'\,, \qquad A_\nu = 0 \text{ per } \nu = 2\nu' + 1\,,$$

risulta che A_ν ha l'espressione:

$$A_\nu = \frac{i^\nu + (-i)^\nu}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{\pi}{2}\nu} + e^{-i\frac{\pi}{2}\nu}\right) = \frac{1}{2}\left\{e^{i\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{h} - \theta\right)} + e^{-i\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{h} - \theta\right)}\right\}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi x}{2h} - \frac{\pi\theta}{2}\right) = \cos\frac{\pi\theta}{2} \cdot \cos\frac{\pi x}{2h} + \operatorname{sen}\frac{\pi\theta}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2h}\,,$$

e analogamente

$$A_{\nu-1} = \cos\frac{\pi(\theta-1)}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2h} + \operatorname{sen}\frac{\pi(\theta-1)}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2h}\,.$$

Ne segue, essendo $\cos\frac{\pi\theta}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi\theta}{2}$, $\cos\frac{\pi(\theta-1)}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi(\theta-1)}{2}$ delle funzioni periodiche di periodo h, che $U(x;\,h)$ si può scrivere nella forma:

$$U(x;\,h) = \tilde{\omega}_1(x;\,h)\cdot\cos\frac{\pi x}{2h} + \tilde{\omega}_2(x;\,h)\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2h}\,,\qquad x\in(0\,\ldots\,+\infty)\,,$$

dove $\tilde{\omega}_1(x;\,h)$, $\tilde{\omega}_2(x;\,h)$ sono arbitrarie costanti per l'incremento h; quest'ultima forma di $U(x;\,h)$ è quella deducibile coi procedimenti usuali.

6.3. - Un'equazione del tipo (E_3).

Risolvere l'equazione

$$u(x+3h) - u(x) = x \qquad (x\geqslant 0,\quad h>0)\,.$$

1°) Calcolo la soluzione elementare $F(x;\,h)$ che s'ottiene applicando la (60). Si ha ora (tenendo presente la (57) e la convenzione alla fine del n. **2.2**)

$$A_s = \sum_0^s{}_r\sum_0^r{}_\varrho(-1)^{s-\varrho}\binom{r}{\varrho}\binom{\varrho}{s-r-\varrho}\varepsilon_{r-\varrho}\,\varepsilon_{r+2\varrho-s} = \sum_0^s{}_r(-1)^{s-r}\binom{r}{s-2r}\varepsilon_{3r-s}$$

$$(s=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,\nu-3)\,,$$

somme in ciascuna delle quali tutti i termini sono nulli tranne quello (quando esiste) pel quale $3r-s=0$: ciò richiede che s sia multiplo di 3, cioè $s=3s'$ (s' intero), onde si ha

$$A_{3s'} = \sum_0^{3s'}{}_r(-1)^{3s'-r}\binom{r}{3s'-2r}\varepsilon_{3(r-s')} = (-1)^{2s'}\binom{s'}{s'}\cdot 1 = 1\,,\quad A_{3s'+1} = A_{3s'+2} = 0\,,$$

$$(s'=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,\nu';\quad \nu'=[(\nu-3)/3]=[\nu/3]-1,\quad \nu=[x/h])\,.$$

La soluzione elementare, applicando la (60) e per $x\in(3h\,\ldots\,+\infty)$, è quindi:

$$F(x;\,h) = \sum_0^{\nu'}{}_{s'}1\cdot\{x-(3s'+3)h\} = \sum_0^{\nu'}{}_{s'}\{x-(s'+1)\cdot 3h\} =$$
$$= (\nu'+1)x - (3/2)(\nu'+1)(\nu'+2)h\,,$$

ossia

$$F(x;\,h) = \begin{cases} 0\,, & x \in (0\,...\,3h\,-) \\ (\nu'+1)\{x-(3/2)(\nu'+2)h\}\,, \quad \nu'=[\nu/3]-1\,, & \nu=[x/h]\,, \\ & x\in(3h\,...\,+\infty)\,. \end{cases}$$

Per la verifica occorre tener presente che mutando x in $x+3h$ la ν si muta in $\nu+3$ e la ν' si muta in $\nu'+1$.

2°) Calcolo la soluzione generale elementare $U(x;\,h)$ dell'equazione omogenea corrispondente all'equazione data, soluzione che s'ottiene applicando la (61). Tenendo presente che ora è $(-\tilde{a}_3/\tilde{a}_0)^{x/h} = 1^{x/h} = 1^{(\nu h+\theta h)/h} = 1^{\nu+\theta} = 1^\theta$ (dove θ e quindi 1^θ è una funzione periodica di periodo h), e che è anche $A_\nu^* = A_\nu$ (in virtù della (57)′), la (61) dà:

$$U(x;\,h) = \tilde{c}_1(x;\,h)\cdot A_\nu + \tilde{c}_2(x;\,h)\cdot A_{\nu-1} + \tilde{c}_3(x;\,h)\cdot A_{\nu-2}\,,$$

con $\nu=[x/h]$, $x\in(0\,...\,+\infty)$ e $\tilde{c}_1(x;\,h)$, $\tilde{c}_2(x;\,h)$, $\tilde{c}_3(x;\,h)$ arbitrarie costanti per l'incremento h.

Poichè nel nostro esempio si sa risolvere l'equazione caratteristica dell'equazione omogenea corrispondente $\left(\text{le radici sono } 1,\quad -\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2},\quad -\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, dalla forma elementare di $U(x;\,h)$ possiamo ricavare l'espressione usuale della soluzione generale dell'equazione omogenea corrispondente. Infatti, essendo, per quanto già detto a 1°),

$$A_\nu = 1 \text{ per } \nu = 3\nu'\,, \qquad A_\nu = 0 \text{ per } \nu = 3\nu'+1 \text{ e per } \nu = 3\nu'+2\,,$$

risulta che (posto, per le tre radici cubiche di 1,

$$1_{3,0}=1\,,\quad 1_{3,1} = -\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad 1_{3,2} = -\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\;)$$

si ha:

$$A_\nu = \frac{1}{3}\,(1_{3,0}^\nu + 1_{3,1}^\nu + 1_{3,2}^\nu) \qquad (\nu = 0,\,1,\,2,\,...)\,,$$

com'è facile provare. Ne segue:

$$\begin{aligned} A_\nu &= \frac{1}{3}\,(1^\nu + e^{i2\pi\nu/3} + e^{-i2\pi\nu/3}) = \\ &= \frac{1}{3}\,[1 + \{\cos(2\pi\nu/3) + i\,\mathrm{sen}\,(2\pi\nu/3)\} + \{\cos(2\pi\nu/3) - i\,\mathrm{sen}\,(2\pi\nu/3)\}] = \\ &= \frac{1}{3}\left[1+2\cos\frac{2\pi\nu}{3}\right] = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\left\{\frac{2\pi}{3}\left(\frac{x}{h}-\theta\right)\right\}. \end{aligned}$$

E quindi, procedendo in modo completamente analogo a quanto s'è fatto al n. **6.2**, 2°), si conclude che $U(x;\, h)$ si può scrivere nella forma

$$U(x;\, h) = \tilde{\omega}_1\,(x;\, h) + \tilde{\omega}_2(x;\, h)\cdot\cos\frac{2\pi x}{3h} + \tilde{\omega}_3(x;\, h)\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{3h}\,, \qquad x \in (0 \ldots + \infty)\,,$$

dove $\tilde{\omega}_1(x;\, h)$, $\tilde{\omega}_2(x;\, h)$, $\tilde{\omega}_3(x;\, h)$ sono arbitrarie costanti per l'incremento h; e quest'ultima forma di $U(x;\, h)$ è quella deducibile coi procedimenti usuali.

Bibliografia.

[1] N.-E. NÖRLUND, *Leçons sur les équations linéaires aux différences finies*, Gauthier-Villars, Paris 1929.

[2] A. MAMBRIANI, *Sulla risoluzione delle equazioni ricorrenti lineari, d'ordine finito e a coefficienti costanti*, Accad. Naz. Lincei, Rend. Sci. Fis. Mat. Nat. (1) **19** (1934), 16-21.

[3] A. MAMBRIANI, *L'operazione inversa fondamentale del « Calcolo alle differenze finite » è un'operazione elementare* (I), Riv. Mat. Univ. Parma (2) **10** (1969), 185-211.

[4] L. M. MILNE-THOMSON, *The Calculus of Finite Differences*, Macmillan, London 1931.

[5] C. SCARAVELLI, *Polinomi di Appell nel senso del Calcolo delle differenze finite*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **8** (1967), 355-366.

Sommario.

Si propone un certo metodo di risoluzione effettiva delle equazioni alle differenze [in una variabile indipendente e con un passo h ($\neq 0$)] lineari e a coefficienti periodici di periodo h. Tale metodo è sempre possibile e del tutto elementare: la soluzione generale si esprime in termini finiti e razionalmente mediante i coefficienti della equazione, la funzione data $f(x)$ e le funzioni arbitrarie. In questa Parte I si suppone che la variabile indipendente sia reale e si studiano le equazioni dei primi tre ordini.

Summary.

We propose a method for solving in an effective way linear difference equations [of an indipendent variable and with a step h ($\neq 0$)] having periodical coefficients with period h. Such a method is always possible and completely elementary: the general solution of an equation can be expressed as a rational function (with a finitenumber of terms) of the coefficients , of the given function $f(x)$ and of arbitrary functions. In this first paper we suppose the indipendent variable is real and we study equations of the first three orders.

* * *