Riv. Mat. Univ. Parma (2) **11** (1970), 65-69

GIACOMINO BATTIONI (*)

I tre teoremi, del Calcolo alle differenze finite, analoghi ai teoremi di Rolle, di Cauchy, di Cavalieri-Lagrange. (**)

1. - Introduzione.

La presente breve Nota ha per oggetto tre teoremi che ritengo siano da considerarsi gli analoghi, nel Calcolo alle differenze finite, dei ben noti teoremi di ROLLE, di CAUCHY, di CAVALIERI-LAGRANGE nel Calcolo infinitesimale.

Essendo $f(x)$ una qualsiasi funzione, e Δx un incremento della variabile x, per il seguito pongo (in analogia con la notazione « accentata » di derivata)

$$f^{(1;\,\Delta x)}(x) = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\,; \tag{1}$$

seguendo poi una terminologia che è già stata introdotta (¹), chiamo il rapporto incrementale (1) « la prederivata della f nel punto x e col passo Δx ».

Si ha allora:

Teorema I (di ROLLE sulle prederivate).

Sia $f(x)$, $x\in[a\,...\,b]$ (²) con $a<b$, una data funzione (reale e univoca) continua, tale che $f^{(1;\,b-a)}(a)=0$. Allora, fissato un qualsiasi

$$h=(b-a)/n \qquad (n=1,2,3,...),$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Ricevuto: 10-XI-1970.

(¹) A. MAMBRIANI, *L'operazione inversa fondamentale del « Calcolo alle differenze finite » è un'operazione elementare.* Nota I: *Caso della variabile indipendente reale,* Riv. Mat. Univ. Parma (2) **10** (1969), 185-211.

(²) Il simbolo $[a\,...\,b]$ indica l'intervallo chiuso di estremi a e b, cioè l'insieme dei numeri (reali) x tali che $a\leqslant x\leqslant b$.

nell'intervallo $[a \dots b-h]$ *esiste sempre almeno un punto* ξ *tale che*

(2) $$f^{(1;\,h)}(\xi) = 0\,.$$

Teorema II (di CAUCHY sulle prederivate).

Siano $f(x)$, $g(x)$, $x \in [a \dots b]$ *con* $a < b$, *due date funzioni (reali e univoche) continue. Allora, fissato un qualsiasi*

$$h = (b-a)/n \qquad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

nell'intervallo $[a \dots b-h]$ *esiste sempre almeno un punto* ξ *tale che*

(3) $$\begin{vmatrix} f^{(1;\,b-a)}(a) & g^{(1;\,b-a)}(a) \\ f^{(1;\,h)}(\xi) & g^{(1;\,h)}(\xi) \end{vmatrix} = 0\,.$$

Teorema III (di CAVALIERI-LAGRANGE sulle prederivate).

Sia $f(x)$, $x \in [a \dots b]$ *con* $a < b$, *una data funzione (reale e univoca) continua. Allora, fissato un qualsiasi*

$$h = (b-a)/n \qquad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

nell'intervallo $[a \dots b-h]$ *esiste sempre almeno un punto* ξ *tale che*

(4) $$f^{(1;\,b-a)}(a) = f^{(1;\,h)}(\xi)\,.$$

Osservazioni.

1ª. L'ipotesi $f^{(1;\,b-a)}(a) = 0$ del Teorema I si può scrivere, manifestamente, $f(a) = f(b)$.

2ª. Sviluppando nella (3) il determinante, si ha

$$f^{(1;\,b-a)}(a)\,g^{(1;\,h)}(\xi) - g^{(1;\,b-a)}(a)\,f^{(1;\,h)}(\xi) = 0\,.$$

Quindi, *se si fa l'ulteriore ipotesi* $g^{(1;\,h)}(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in [a \dots b-h]$ (da cui consegue $g^{(1;\,b-a)}(a) \neq 0$), la (3) si può scrivere

$$\frac{f^{(1;\,b-a)}(a)}{g^{(1;\,b-a)}(a)} = \frac{f^{(1;\,h)}(\xi)}{g^{(1;\,h)}(\xi)}\,, \qquad \text{cioè} \qquad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f^{(1;\,h)}(\xi)}{g^{(1;\,h)}(\xi)}\,.$$

3ª. La (4) si può scrivere, manifestamente,

$$f(b) - f(a) = (b-a)\,f^{(1;\,h)}(\xi)\,.$$

Nel seguito della Nota espongo le dimostrazioni dei tre Teoremi precedenti, e faccio alcune osservazioni.

2. - Dimostrazioni dei Teoremi.

Dimostrazione del Teorema I.

Per le ipotesi del Teorema la funzione

$$f^{(1;\,h)}(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \qquad x \in [a \dots b-h],$$

è continua. Nel suo intervallo di definizione $[a \dots b-h]$ considero poi i punti

$$(5) \qquad a = x_0, \quad a+h = x_1, \quad a+2h = x_2, \quad \dots, \quad a+(n-1)h = x_{n-1} = b-h,$$

e distinguo due casi.

Caso 1°: la $f^{(1;\,h)}$ risulta $= 0$ in uno almeno x_r dei punti (5). Allora sussiste la (2) con $\xi = x_r$:

Caso 2°: la $f^{(1;\,h)}$ risulta $\neq 0$ in tutti i punti (5). Allora la $f^{(1;\,h)}$ non può essere in tali punti sempre > 0 oppure sempre < 0. Infatti, posto per uniformità $a + nh = x_n = b$, si ha

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{h} + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{h} + \frac{f(x_3)-f(x_2)}{h} + \dots + \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{h} =$$

$$= \frac{f(x_n)-f(x_0)}{h} = n\,\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

cioè

$$\sum_{0}^{n-1}{}_{\nu}\, f^{(1;\,h)}(x_\nu) = n\, f^{(1;\,b-a)}(a);$$

quindi, se ad esempio fosse sempre $f^{(1;\,h)}(x_\nu) > 0$, si avrebbe pure $f^{(1;\,b-a)}(a) > 0$, mentre per ipotesi è $f^{(1;\,b-a)}(a) = 0$. Pertanto, la $f^{(1;\,h)}$ assumerà valori di segno opposto in almeno una coppia x_r, x_s dei punti (5), e, poichè essa è continua, si annullerà almeno in un punto ξ compreso fra x_r e x_s: perciò anche in questo Caso 2° sussiste la (2).

Dimostrazione del Teorema II.

Considero la funzione ausiliaria

$$\varphi(x) = \begin{vmatrix} f^{(1;\, b-a)}(a) & g^{(1;\, b-a)}(a) \\ f(x) & g(x) \end{vmatrix}, \qquad x \in [a \dots b].$$

Per le ipotesi del Teorema tale funzione è continua, e inoltre, essendo

$$\varphi^{(1;\, \Delta x)}(x) = \begin{vmatrix} f^{(1;\, b-a)}(a) & g^{(1;\, b-a)}(a) \\ f^{(1;\, \Delta x)}(x) & g^{(1;\, \Delta x)}(x) \end{vmatrix}, \tag{6}$$

si ha, manifestamente, $\varphi^{(1;\, b-a)}(a) = 0$. Pertanto, per il Teorema I, nell'intervallo $[a \dots b-h]$ esiste almeno un punto ξ tale che $\varphi^{(1;\, h)}(\xi) = 0$, cioè, per la (6), proprio la (3) da dimostrare.

Dimostrazione del Teorema III.

Il Teorema si può riguardare come caso particolare del Teorema II: infatti, se nella (3) si pone $g(x) = x$ si ottiene

$$\begin{vmatrix} f^{(1;\, b-a)}(a) & 1 \\ f^{(1;\, h)}(\xi) & 1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

cioè proprio la (4).

3. - Alcune osservazioni.

I teoremi precedenti sussistono, manifestamente, anche per $h = -(b-a)/n$, nel qual caso però ξ appartiene all'intervallo $[a-h \dots b]$.

La condizione che h sia della forma $\pm\,(b-a)/n$ è essenziale per la validità dei teoremi stessi, in quanto per altri valori di h tale validità non è affatto assicurata. Ad esempio, se si ha

$$f(x) = 2x + 5\pi \cos x\,, \qquad x \in [0 \dots 5\pi],$$

risulta

$$f^{(1;\, 5\pi)}(0) = 0\,,$$

mentre è sempre

$$f^{(1;\, 2\pi)}(x) = 2\,, \qquad x \in [0 \dots 3\pi].$$

Summary.

The subject of the paper are three theorems that the author thinks have to be considered, in the finite difference Calculus, as the analogous of the well-known theorems of Rolle, of Cauchy, of Cavalieri-Lagrange in the infinitesimal Calculus.

* * *