Riv. Mat. Univ. Parma (2) **11** (1970), 117-122

GIULIANA BRIGNOLE (*)

Diffusione dei neutroni emessi da una sorgente anisotropa. (**)

1. - Introduzione .

Lo scopo di questo lavoro è studiare la diffusione dei neutroni emessi da una sorgente piana anisotropa in un mezzo M omogeneo, isotropo, occupante l'intero spazio. Tale problema è già stato trattato da CASE e ZWEIFEL [1] facendo uso del metodo della funzione di GREEN; i risultati ottenuti non sono però facilmente interpretabili da un punto di vista fisico.

Noi, invece, otterremo un'espressione del flusso neutronico $\Phi(x)$ i cui termini hanno un chiaro significato. Vedremo, infatti, come $\Phi(x)$ possa scomporsi nella forma $\Phi(x) = \underset{\text{As}}{\Phi}(x) + \underset{\text{Tr}}{\Phi}(x)$, cioè in una parte asintotica, che domina a partire da una certa distanza dalla sorgente, ed in una transitoria predominante vicino alla sorgente. Otterremo, per $x > 0$ e $\mu_0 > 0$, ove x, μ_0 e varie altre quantità saranno tra breve definiti,

$$\underset{\text{As}}{\Phi}(x) = 2\,\pi\, S_0\, K(\textstyle\sum^2 - K^2)\,[(\sum - K\mu_0)\,(K^2 - \sum \sum_a)]^{-1} \exp(-Kx)\,,$$

$$\underset{\text{Tr}}{\Phi}(x) = \frac{S_0}{\mu_0}\,\pi \exp\left(\frac{-\sum x}{\mu_0}\right) \cdot \left(2 + \frac{\sum_s \mu_0}{\sum} \ln \frac{1-\mu_0}{1+\mu_0}\right) \cdot$$

$$\cdot \left[\left(1 + \frac{\sum_s \mu_0}{2} \ln \frac{1-\mu_0}{1+\mu_0}\right)^2 + \left(\frac{\sum_s \mu_0}{2\sum}\right)^2\right]^{-1} + \pi\, S_0\, VP \int_0^\infty \frac{\exp[-\sum(1+\eta)\,x]}{1-(1+\eta)\,\mu_0} \cdot$$

$$\cdot\, 4 \textstyle\sum \sum_s (1+\eta) \left[\left(2 \sum (1+\eta) + \sum_s \ln \dfrac{\eta}{2+\eta}\right)^2 + (\pi \sum_s)^2\right]^{-1} d\eta\,.$$

(*) Indirizzo: Istituto Matematico « U. Dini », Viale Morgagni 67-A, 50134 Firenze, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del contratto di Ricerca N. 115.2210 del C.N.R. — Ricevuto: 28-IV-1970.

Ci serviremo del metodo della trasformata di FOURIER, generalizzando i risultati di WEINBERG e WIGNER [2] per il problema isotropo.

Sia L un sistema di coordinate cartesiane ortogonali solidale con M e supponiamo che lo « scattering » dei neutroni da parte dei nuclei di M sia isotropo in L, cioè $A \gg 1$, ove A è il numero di massa dei nuclei di M. Supponiamo, inoltre, che nel mezzo esista una sorgente di neutroni del tipo:

$$S(x,\ \mu) = S_0\, \delta(\mu - \mu_0)\, \delta(x)\ ,$$

ove μ è il coseno dell'angolo formato dalla velocità dei neutroni con il verso positivo dell'asse delle ascisse, $\mu_0 = \cos\vartheta_0$ e $\delta(\mu - \mu_0)$, $\delta(x)$ sono funzioni di DIRAC. Tale sorgente, posta nel piano $x=0$, emette neutroni solo nella direzione formante l'angolo ϑ_0 con l'asse delle ascisse e $2\pi S_0$ rappresenta il numero totale di neutroni emessi per secondo e per cm^2.

2. - Posizione del problema.

La densità dei neutroni, $F(x,\ \mu)$, soddisfa all'equazione

$$\mu\,\frac{\partial F(x,\ \mu)}{\partial x} + \sum F(x,\ \mu) = S_0\, \delta(x)\, \delta(\mu - \mu_0) + \frac{\sum_s}{2}\int_{-1}^{1} F(x,\ \mu)\, \mathrm{d}\mu\ , \tag{1}$$

ove $\sum = \sum_s + \sum_a$, $\sum_s$ essendo la sezione macroscopica d'urto di scattering elastico e $\sum_a$ quella di assorbimento. Ammettiamo anche che il mezzo non contenga nuclei fissionabili, cosicchè la sorgente $S = S(x,\ \mu)$ sia indipendente [2] dal valore di $F(x,\ \mu)$.

Poichè le sorgenti neutroniche sono rappresentate mediante funzioni « delta di DIRAC », è necessario interpretare la (1) come un'equazione tra distribuzioni e ne cercheremo la soluzione con le condizioni:

$$\lim_{x\to\pm\infty} F(x,\ \mu) = 0\ .$$

Studiamo ora il caso di $\mu_0 > 0$. Sappiamo che ogni distribuzione ammette trasformata di FOURIER [precisamente, se $\varphi(p, \mu)$ è la trasformata della distribuzione $F(x,\ \mu)$, si ha:

$$\varphi(p,\ \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x,\ \mu)\exp(-ipx)\, \mathrm{d}x\ ];$$

inoltre vale il teorema inverso, cioè, l'antitrasformata coincide con la distribuzione stessa.

Moltiplichiamo ambo i membri della (1) per $\exp(-ipx)$ ed integriamo, rispetto ad x, tra -1 e $+1$; si ottiene:

$$(ip\mu + \Sigma)\,\varphi(p,\,\mu) = \frac{\Sigma_s}{2}\int_{-1}^{1}\varphi(p,\,\mu)\,\mathrm{d}\mu + S_0\,\delta(\mu-\mu_0)\,. \tag{2}$$

Posto

$$\varphi_0(p) = \frac{\Sigma_s}{2}\int_{-1}^{1}\varphi(p,\,\mu)\,\mathrm{d}\mu\,, \tag{3}$$

integrando la (2) si ottiene:

$$\varphi_0(p) = S_0\frac{\Sigma_s}{2}\left[(\Sigma + i\,p\,\mu_0)\left(1-\frac{\Sigma_s}{2\,i\,p}\ln\frac{\Sigma+ip}{\Sigma-ip}\right)\right]^{-1}. \tag{4}$$

Il flusso dei neutroni è dato da:

$$\Phi(x) = 2\pi\int_{-1}^{1}F(x,\,\mu)\,\mathrm{d}\mu$$

ed anche

$$\Phi(x) = S_0\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(i\,p\,x)}{\Sigma + i\,p\,\mu_0}\left[1-\frac{\Sigma_s}{2\,i\,p}\ln\frac{\Sigma+i\,p}{\Sigma-i\,p}\right]^{-1}\mathrm{d}p\,. \tag{5}$$

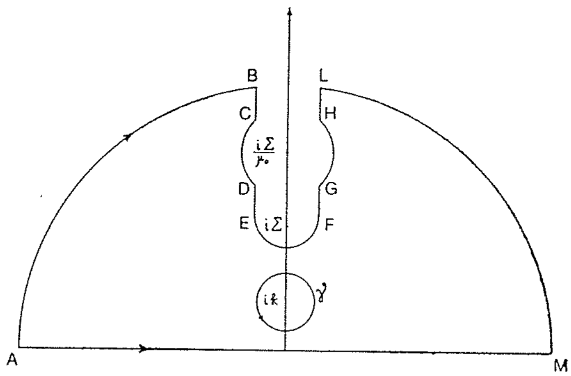
3. - Parti asintotica e transitoria di $\Phi(x)$.

Il comportamento del flusso in funzione di x si visualizza bene mediante un cambiamento del cammino di integrazione; tale cambiamento, tuttavia, non può essere effettuato arbitrariamente perchè la funzione integranda $f(p,\,x)$ ha poli del primo ordine in $p=(i\,\Sigma)/\mu_0$ e $p=\pm\,iK$ e punti di diramazione in $p=\pm\,i\,\Sigma$, ove K è la soluzione dell'equazione $\big(\Sigma_s/(2K)\big)\ \ln[(\Sigma+K)(\Sigma-K)^{-1}]=1$.

Il nuovo cammino di integrazione, Γ, è rappresentato in Figura, ove $\Gamma = \widehat{ABLM}\cup\gamma$. Il residuo dovuto al polo iK dà all'integrale un contributo finito che diremo parte asintotica di $\Phi(x)$ e indicheremo con $\underset{\mathrm{As}}{\Phi}(x)$. All'interno e sull'intero cammino Γ la funzione $f(p,\,x)$ è analitica, possiamo allora applicare il teorema di CAUCHY:

$$\underset{\mathrm{As}}{\Phi}(x) = S_0 \int_{\Gamma} f(p,\ x)\,\mathrm{d}p = 2\,\pi\, S_0\, i \operatorname{res}(iK) =$$

$$= 2\pi\, S_0\, K(\sum{}^2 - K^2)[(\sum - K\mu_0)\,(K^2 - \sum \sum{}_a)]^{-1} \exp(-Kx).$$



Tale termine decresce, per $x \to +\infty$, come $\exp(-Kx)$ e si annulla all'infinito come richiesto dalla condizione al contorno del problema.

$\underset{\mathrm{Tr}}{\Phi}(x)$ si ottiene calcolando l'integrale (5) lungo $\widehat{BL}$. Operata la trasformazione $p = i \sum (1 + \eta)$ e, posto

$$\ln \frac{-\eta}{2+\eta} = \ln \frac{\eta}{2+\eta} + i\pi, \quad \text{nel semipiano } \operatorname{Im} \eta < 0,$$

$$\ln \frac{-\eta}{2+\eta} = \ln \frac{\eta}{2+\eta} - i\pi, \quad \text{nel semipiano } \operatorname{Im} \eta > 0,$$

abbiamo:

$$\underset{\mathrm{Tr}}{\Phi}(x) = \int_{BC} f(\eta,\ x)\,\mathrm{d}\eta + \int_{DE} f(\eta,\ x)\,\mathrm{d}\eta + \int_{FG} f(\eta,\ x)\,\mathrm{d}\eta + \int_{HL} f(\eta,\ x)\,\mathrm{d}\eta +$$

$$+ \int_{CD} f(\eta,\ x)\,\mathrm{d}\eta + \int_{GH} f(\eta,\ x)\,\mathrm{d}\eta\,,$$

poichè è nullo il contributo dell'integrale esteso al semicerchio di centro $\eta = 0$ quando si fa tendere a zero il raggio.

Eseguendo i calcoli abbiamo per $\underset{\mathrm{Tr}}{\Phi(x)}$ esattamente l'espressione indicata nella Introduzione, dove con VP indichiamo il valore principale dell'integrale di variabile complessa [4].

4. - Conclusione.

Il flusso totale dei neutroni emessi da una sorgente anisotropa, se $x > 0$ e $\mu_0 > 0$, è dunque:

$$\Phi(x) = 2\pi\, S_0\, K(\textstyle\sum^2 - K^2)\,[(\sum - K\mu_0)\,(K^2 - \sum \sum_a)]^{-1} \exp(-Kx) +$$

$$+ \frac{S_0}{\mu_0}\,\pi\, \exp\left(\frac{-\sum x}{\mu_0}\right)\left(2 + \frac{\sum_s \mu_0}{\sum} \ln \frac{1-\mu_0}{1+\mu_0}\right) \cdot$$

$$\cdot \left[\left(1 + \frac{\sum_s \mu_0}{2} \ln \frac{1-\mu_0}{1+\mu_0}\right)^2 + \left(\frac{\sum_s \mu_0}{2\sum}\right)^2\right]^{-1} + \pi\, S_0\, VP \int_0^\infty \frac{\exp\,[-\sum(1+\eta)\,x]}{1-(1+\eta)\,\mu_0} \cdot$$

$$\cdot\, 4 \textstyle\sum \sum_s (1+\eta) \left[\left(2 \sum (1+\eta) + \sum_s \ln \dfrac{\eta}{2+\eta}\right)^2 + (\pi \sum_s)^2\right]^{-1} \mathrm{d}\eta\,.$$

Per $x < 0$ e $\mu_0 > 0$, restando il contributo del polo $p = -iK$ e del punto di diramazione $p = -i\sum$, il flusso si riduce alla forma:

$$\Phi(x) = 2\,\pi\, S_0\, K(\textstyle\sum^2 - K^2)\,[(\sum - K\,\mu_0)\,(K^2 - \sum \sum_a)]^{-1} \exp(-Kx) +$$

$$+ \pi\, S_0\, VP \int_0^\infty \frac{\exp\,[-\sum(1+\eta)\,x]}{1-(1+\eta)\,\mu_0}\, 4 \textstyle\sum \sum_s (1+\eta) \cdot$$

$$\cdot \left[\left(2 \textstyle\sum (1+\eta) + \sum_s \ln \dfrac{\eta}{2+\eta}\right)^2 + (\pi \sum_s)^2\right]^{-1} \mathrm{d}\eta\,.$$

È importante ossevare che, valendo per le soluzioni della (1) la relazione di reciprocità $F(x, \mu, \mu_0) = F(-x, -\mu, -\mu_0)$, $\Phi(x)$ per $x < 0$ e $\mu_0 < 0$ è uguale a $\Phi(x)$ per $x > 0$ e $\mu_0 > 0$ quando al posto di x si sostituisca $|x|$.

Bibliografia.

[1] K. M. Case and P. F. Zweifel, *Linear Transport Theory*, Addison Wesley, London 1967.

[2] A. Weinberg and E. Wigner, *The Physical Theory of Neutron Chain Reactors*, The University Press, Chicago 1958.

[3] B. Davison and J. B. Sykes, *Neutron Transport Theory*, Clarendon Press, Oxford 1957.

[4] P. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York 1953.

Riassunto.

Si studia la diffusione dei neutroni emessi da una sorgente piana anisotropa e se ne interpretano i risultati da un punto di vista fisico.

Summary.

We study a neutron diffusion problem in an infinite medium with a plane anisotropic source and we discuss the results from a physical viewpoint.

* * *