Riv. Mat. Univ. Parma (2) **11** (1970), 133-157

CARLA MASSAZA (*)

Serie di potenze a coefficienti in un campo non archimedeo. (**)

Introduzione.

Scopo del presente lavoro è lo studio delle serie di potenze sulla chiusura algebrica Ω di un campo M ordinato massimale (¹), completo, non archimedeo (²), soddisfacente al 1° assioma della numerabilità (cfr. [5]). Dopo alcuni richiami e complementi a risultati esposti in lavori precedenti (n. **1**), si determina (n. **2**) il dominio di convergenza $D_{s(0)}$ di una generica serie di potenze $S^{(0)}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, a coefficienti in Ω e di centro l'origine. Si vede che è conveniente distinguere due casi, a seconda che esistano (caso A)) o non esistano (caso B)) elementi $y \in \Omega$ per i quali risulti $\lim_{n \to \infty} y^n = 0$.

Nel caso B), $D_{s(0)}$ si riduce al solo elemento zero, oppure coincide con l'intero campo, mentre nel caso A) può presentarsi una terza possibilità, e cioè che $D_{s(0)}$ sia formato da tutti gli elementi i cui moduli costituiscano una partizione non di DEDEKIND (³) di M^+. Il caso A) presenta dunque maggiore in-

---

(*) Indirizzo: Istituto di Geometria « Corrado Segre », Università, Via Principe Amedeo 8, 10123 Torino, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del C.N.R.. — Ricevuto: 30-VI-1970.

(¹) La chiusura ordinata $\overline{K}$ di un campo ordinato K è un'estensione di K algebrica, ordinata e massimale, ossia tale che ogni sua estensione algebrica propria non ammetta strutture di campo ordinato compatibili con quella di K. Il campo $\overline{K}$ è unico, a meno di isomorfismi che inducono l'identità su K e conservano l'ordinamento ([1], p. 38).

(²) Per l'esistenza di tali campi, e per l'immersione di un generico campo ordinato non archimedeo in uno di essi, cfr. [6].

(³) Cfr. [5], Def. I.

teresse, e notevoli analogie con la teoria delle serie di potenze sul campo complesso: i cerchi di convergenza vengono sostituiti da domini di convergenza, che hanno ancora le stesse proprietà di simmetria e di convessità dei cerchi. Inoltre la convergenza è uniforme non solo sui cerchi contenuti in $D_{S(0)}$ (come avviene nel campo complesso), ma addirittura sui sottoinsiemi:

$$C_y^* = \{z \in \Omega: \ \exists\, n \in N / \ |z| < n\,|y|\}, \qquad y \in D_{S(0)}.$$

Si prova inoltre che la serie $S^{(u)}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (X-u)^n$, di centro u e dominio $D_{S(u)}$, è una funzione sviluppabile in serie di potenze in ogni punto $v \in D_{S(u)}$, e che ha ivi come dominio di convergenza $D_{S(u)}$. In particolare, ne segue che una serie di potenze non è prolungabile analiticamente fuori del suo dominio di convergenza.

Nel n. **3** si studiano le principali proprietà dei domini di convergenza; più precisamente, si dimostra che i domini di convergenza di centro l'origine sono sottogruppi additivi di Ω, contemporaneamente aperti e chiusi, e che se due domini di convergenza hanno intersezione non vuota, uno di essi è contenuto nell'altro. Per i campi che rientrano nel caso A), si costruiscono serie di potenze con domini di convergenza a piacere piccoli, e si utilizza questa costruzione per provare che tali campi sono totalmente sconnessi.

Infine, esaminando le serie il cui dominio di convergenza contiene l'insieme $\eta(Q) = \{y \in \Omega: \ \exists\, r \in Q^+ / \ r > |y|\}$, si migliora la caratterizzazione dei domini di convergenza data precedentemente, e si verifica, con un esempio, che una generica partizione non di DEDEKIND di M^+ non è necessariamente la partizione di convergenza di una serie di potenze (a differenza di quanto succede nel caso complesso, in cui l'analogo della partizione di convergenza è il raggio di convergenza), mentre con lo studio delle serie i cui coefficienti sono compresi tra due elementi positivi (non nulli) si preparano esempi e risultati utilizzati nei nn. **4** e **5**.

Nel n. **4** si studiano le funzioni analitiche (ossia sviluppabili in serie di potenze) di Ω in Ω, mettendo in evidenza alcune differenze rispetto alle funzioni analitiche di C in C. In particolare, si costruiscono delle funzioni analitiche su tutto Ω, che in ogni punto hanno una stessa partizione di convergenza, scelta a piacere piccola, e si dimostra l'esistenza di funzioni analitiche su $\Omega \cup \{\infty\}$, e non costanti. Infine si prova che, come nel caso complesso, ogni serie di potenze è indefinitamente derivabile ed integrabile nel suo dominio di convergenza, e che due sue primitive differiscono per una costante: quest'ultima proprietà è particolarmente notevole, perchè non vale in generale, in quanto esistono funzioni con derivate nulle in tutto il loro dominio di definizione, e che tuttavia non sono costanti.

Nel n. 5 si definiscono le serie binomiale, esponenziale e logaritmica, la prima dandone lo sviluppo formale, le altre come funzioni analitiche soddisfacenti alle stesse relazioni funzionali che caratterizzano le serie omonime nel caso classico. Si determinano i rispettivi domini di convergenza e si dimostra che esponenziale e logaritmo sono isomorfismi (l'uno inverso dell'altro) tra i gruppi topologici (ξ, $+$) ed ($1+\xi$, $\cdot$), essendo $\xi = \{y \in \Omega: \lim_{n\to\infty} y^n = 0\}$.

1. - Richiami e complementi.

In un precedente lavoro [5] si sono caratterizzati i campi K, soddisfacenti al 1° assioma della numerabilità, nel modo seguente. Considerata una base di trascendenza $\{x_i\}$, $i \in \sum_\alpha$ (ove $\sum_\alpha$ è un segmento di numeri ordinali) di K sul sottocampo Q dei razionali, ed indicato con $J[Q(x_i),\ i \in \sum_\alpha]$ il sottoinsieme dei numeri ordinali $j \in \sum_\alpha$ tali che, rispetto a Q, x_j sia di tipo B.1 [ossia maggiore (o minore) di ogni elemento della chiusura ordinata $\overline{Q(x_i)}$, $i < j$], ovvero di tipo B.2 [ossia tale che esso operi su $\overline{Q(x_i)}$, $i < j$, una partizione o pseudopartizione definita da un elemento di $\overline{Q(x_i)}$, $i < j$], K soddisfa al primo assioma della numerabilità se e solo se è possibile estrarre da $J[Q(x_i),\ i \in \sum_\alpha]$ un sottoinsieme $\mathscr{S}$, *al più numerabile*, cofinale con $J[Q(x_i),\ i \in \sum_\alpha]$. Precisiamo meglio questo risultato, esaminando separatamente i due casi seguenti:

A) *Esiste un sottoinsieme* $\mathscr{S}$ *finito cofinale con* $J[Q(x_i),\ i \in \sum_\alpha]$.

È chiaro che, in questa ipotesi, $\mathscr{S}$ *si può pensare costituito da un solo elemento, che è anche l'ultimo elemento di* J.

B) *Esiste un sottoinsieme* $\mathscr{S}$ *numerabile cofinale con* $J[Q(x_i),\ i \in \sum_\alpha]$, *ma non esistono sottoinsiemi finiti con tale proprietà.*

La suddetta distinzione pare legata alla base di trascendenza scelta, ed al buon ordinamento fissato nell'insieme dei suoi elementi. La proposizione seguente mette in rilievo che tale dipendenza è solo apparente.

I. – *Condizione necessaria e sufficiente affinchè per* K *si verifichi il caso* A) *è che esista un elemento* $y \in K$, $y \neq 0$, *per il quale risulti:*

$$\lim_{n\to\infty} y^n = 0 .$$

D i m o s t r a z i o n e. Se per K si verifica il caso A), detto s l'ultimo elemento di $J[Q(x_i),\ i \in \sum_\alpha]$, può succedere (cfr. [5], Prop. III) che x_s sia maggiore o minore di ogni elemento di $Q(x_i)$, $i \in \sum_\alpha$, $i < s$, e allora $\lim_{n\to\infty} |x_s|^{-n} = 0$, oppure che x_s operi su $\overline{Q(x_i)}$, $i < s$, la partizione o pseudopartizione definita da un elemento $\alpha \in \overline{Q(x_i)}$, $i < s$, e allora $\lim_{n\to\infty} |x_s - \alpha|^n = 0$: pertanto, in ambedue i casi, esiste un elemento $z \in \overline{K}$, per il quale risulta $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$. Ogni elemento $y \in K$, con $0 < y < z$ (1), soddisfa alla condizione richiesta.

Viceversa, supponiamo che esista $y \in K$ per il quale si abbia: $\lim_{n\to\infty} y^n = 0$. Poichè $\{x_i\}$, $i \in \sum_\lambda$, è una base di trascendenza di K su Q, tale y è algebrico su $Q(x_i)$, $i \in \sum_\lambda$: sia $\sum_{h=0}^{m} a_h X^h$ il suo polinomio minimale. Ciascuno dei coefficienti a_h è una funzione razionale di un numero finito di x_i, a coefficienti in Q; esiste quindi un campo $Q(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$, estensione trascendente finita di Q, che contiene tutte le a_h, e quindi $y \in \overline{Q(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}$. L'insieme $J[Q(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})]$ è necessariamente finito, e inoltre non è vuoto, perchè altrimenti $Q(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ sarebbe archimedeo e quindi sarebbe tale anche $\overline{K}$ (perchè ammetterebbe una base di 0-intorni con raggi razionali): diciamo x_s il suo ultimo elemento. Il campo $\overline{Q(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})} = \overline{\overline{Q(x_{i_r})}(x_s)}$, $i_r \neq s$, ammette dunque ([5], Prop. III e II) una base di 0-intorni di raggi $\{|x_s|^{-n}\}$, $n \in N$, se x_s è di tipo B.1, oppure $\{|x_s - \alpha_s|^n\}$, $n \in N$, se x_s è di tipo B.2 ed opera su $\overline{Q(x_{i_r})}$, $i_r \neq s$, la partizione o pseudopartizione definita da α_s.

Poichè $y \in \overline{Q(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}$, si ha che per ogni n esiste n' tale che risulti: $|y|^n > |x_s|^{-n'}$ (risp.: $|y|^n > |x_s - \alpha_s|^{n'}$), e pertanto $\overline{K}$ ammette una base di 0-intorni di raggi $|x_s|^{-n}$ (risp.: $|x_s - \alpha_s|^n$); ne segue che s è l'ultimo elemento di $J[Q(x_i), i \in \sum_\lambda]$.

Proviamo inoltre che:

II. – *Se K rientra nel caso* B), *esiste una successione $\{y_h\}$, $h \in N$, di elementi di K^+, per i quali succede che y_h è minore di ogni elemento positivo di $\overline{Q(y_i)}$, $i < h$, e che i cerchi di raggio $\{y_h\}$, $h \in N$, costituiscono una base di 0-intorni di K.*

Infatti sia $\{r_m\}$, $m \in N$, un sistema numerabile, ordinato, decrescente di raggi per una base di 0-intorni di K. Consideriamo gli r_{m_h} tali che $Q(r_m)$, $m \leqslant m_h$, non induca su $Q(r_m)$, $m < m_h$, la topologia naturale: il loro insieme non è vuoto, perchè altrimenti K sarebbe archimedeo. Il campo $Q(r_m)$, $m \leqslant m_h$, contiene dunque un elemento positivo y_h, minore di ogni elemento positivo di $Q(r_m)$, $m < m_h$, tale che $\{y_h^n\}$, $n \in N$, definisce una base di 0-intorni in $Q(r_m)$, $m \leqslant m_h$ (cfr. [5], Prop. III). L'insieme degli y_h è infinito, in quanto non ammette un ultimo elemento: infatti, se esistesse un ultimo elemento y_μ risulterebbe $\lim_{n\to\infty} y_\mu^n = 0$ in K, contrariamente all'ipotesi; ne segue che anche l'insieme $\{r_{m_h}\}$ è infinito, e quindi è cofinale con $\{r_m\}$, essendo $\{r_m\}$ numerabile; pertanto, per ogni m, esiste un h per cui si ha: $r_m \geqslant r_{m_h} > y_h$, e quindi la successione $\{y_h\}$, $h \in N$, soddisfa alle condizioni richieste.

---

(1) L'esistenza di un tale y è assicurata dalla Prop. II di [5].

Ricordiamo infine che, nel caso non archimedeo, la condizione di CAUCHY prende la forma seguente ([6], Prop. XII):

III. – *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie* $\sum_{n \in N} a_n$, *ad elementi in un campo* K *non archimedeo, sia di* Cauchy, *è che risulti:* $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Utilizzando questa proposizione, si dimostra che anche in questi campi non archimedei valgono le proprietà associativa e commutativa delle serie convergenti.

2. - Domini di convergenza delle serie di potenze.

Nel seguito indicheremo con M un campo *ordinato massimale, non archimedeo, completo* (rispetto alla topologia naturale) (²), *soddisfacente al* 1° *assioma della numerabilità,* e con $\Omega = M(i)$ la sua chiusura algebrica (cfr. teorema di EULER-LAGRANGE, [1], p. 39), dotata della topologia prodotto. Diremo che Ω rientra nel caso A) (rispett. B)), di cui al n. precedente, se vi rientra M.

Ci proponiamo ora di studiare le serie di potenze a coefficienti in Ω, determinandone anzitutto il dominio di convergenza. Considerata la serie $S^{(u)}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (X-u)^n$, indichiamo con $D_{S(u)}$ il suo dominio di convergenza, e con σ la successione $\sqrt[n]{|a_n|}$ (dove $\sqrt[n]{|a_n|}$ rappresenta la radice n-esima positiva di a_n, esistente in M).

Vale la proposizione seguente:

IV. – *Se la successione* σ *tende a zero, risulta* $D_{S(0)} = \Omega$. *Se* σ *non tende a zero, occorre distinguere i due casi* A) *e* B):

nel caso B), *risulta* $D_{S(0)} = \{0\}$;

nel caso A), *se* σ *non è limitata, si ha* $D_{S(0)} = \{0\}$, *mentre se* σ *è limitata l'insieme* $\eta = D_{S(0)} \cap M^+$ *è una partizione non di* Dedekind *di* M^+ (*ossia una partizione non definita da alcun elemento di* M^+) (³), *che diremo partizione di convergenza di* $S(X)$.

La convergenza è uniforme in ogni dominio del tipo:

$$C_y^* = \{z: \exists n \in N / \ |z| < |ny|, \text{ dove } y \in D_{S(0)}\}.$$

(²) Cfr. [5], n. 1.

(³) Ricordiamo che ([6], Prop. X) il completamento di un campo ordinato è, a meno di isomorfismi, il sopracampo delle sue partizioni di DEDEKIND, e che pertanto un campo è completo se e solo se le sue partizioni di DEDEKIND sono tutte e sole quelle definite dai suoi elementi.

Dimostrazione. Nella dimostrazione, conviene considerare separatamente i casi A) e B).

Caso A). Supponiamo che σ tenda a zero, e sia $p \in M^+$ un elemento per il quale risulti: $\lim\limits_{n\to\infty} p^n = 0$. Fissato comunque $X_0 \in \Omega$, esiste un $n_0 \in N$ per il quale si ha:

$$n > n_0 \implies \sqrt[n]{|a_n|} < p\,|X_0|^{-1}, \quad \text{ossia} \quad n > n_0 \implies \sqrt[n]{|a_n|}\,|X_0| < p\,.$$

Ne segue che: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n X_0^n) = 0$, e pertanto $S(X_0)$ converge, per la Prop. III.

Se σ non è limitata, detto q un elemento di M^+ per il quale si abbia: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n \neq 0$, e fissato comunque $X_0 \in \Omega$, $X_0 \neq 0$, esistono degli indici n, a piacere grandi, per i quali risulta: $\sqrt[n]{|a_n|} > q\,|X_0|^{-1}$, ossia $\sqrt[n]{|a_n|}\,|X_0| > q$. Ne segue: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n X_0^n) \neq 0$, e pertanto $S(X_0)$ non è convergente. Supponiamo ora che σ sia limitata, ma non tenda a zero: verifichiamo che il sottoinsieme η di M^+ sul quale $S(X)$ converge è una partizione non di Dedekind di M^+. A tale scopo, detti p un elemento di M^+ per il quale risulti $\lim\limits_{n\to\infty} p^n = 0$, ed a un elemento di M^+ maggiore di ogni $\sqrt[n]{|a_n|}$, proviamo che:

$$X_0 \in \eta \implies X_0 + p\,a^{-1} \in \eta\,. \tag{2.1}$$

Infatti, se indichiamo con ϱ un elemento maggiore di ogni razionale, si ha:

$$\left(\sqrt[n]{|a_n|}\,(X_0 + p\,a^{-1})\right)^n \leqslant \varrho\cdot\max\left(\sqrt[n]{|a_n|}\,X_0\,,\ \sqrt[n]{|a_n|}\,p\,a^{-1}\right)^n$$

$$\leqslant \varrho\cdot\max\left(|a_n|\,X_0^n,\ p^n\right),$$

e quest'ultimo membro della diseguaglianza tende a zero, perchè, per la Prop. III: $X_0 \in \eta \implies \lim\limits_{n\to\infty}(a_n X_0^n) = 0$. Ne segue, sempre per la Prop. III, che $X_0 + p\,a^{-1} \in \eta$. In particolare, se ne deduce che η non è ridotto al solo zero.

Utilizzando ancora la Prop. III, si vede che

$$a \in \eta\,, \qquad 0 \leqslant b < a \implies b \in \eta\,. \tag{2.2}$$

Infine osserviamo che, siccome σ non tende a zero, esiste $b \in M^+$ tale che sia possibile estrarre da σ una sottosuccessione infinita $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}$, soddisfacente alla condizione $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > b$; se q è un qualunque elemento per cui si ha:

$\lim_{n\to\infty} q^n \neq 0$, $S(q\, b^{-1})$ non converge, in quanto risulta: $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\, q\, b^{-1} > q$, e quindi $\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\, q\, b^{-1})^n \neq 0$. Pertanto si ha:

$$q\, b^{-1} \notin \eta\,. \tag{2.3}$$

Le relazioni (2.1), (2.2), (2.3) provano che η è una partizione non di DEDEKIND di M^+.

Dalla Prop. III segue inoltre che

$$x \in S_{s(0)} \iff |x| \in \eta \tag{2.4}$$

e pertanto $D_{s(0)}$ è completamente caratterizzato da η.

Caso B). Se σ non tende a zero, esistono $b \in M$, $b > 0$ ed una sottosuccessione infinita $\sigma' = \{\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\}$ per cui risulta: $0 < b < \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}$, e pertanto: $|a_{n_k}|\, |X|^{n_k} = (\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\, |X|)^{n_k} > |b\, X|^{n_k}$. Se, per $X = X_0$, la serie $S(X_0)$ converge, il suo termine generale tende a zero, e quindi, in particolare, si ha: $\lim_{n_k\to\infty} (\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\, |X_0|)^{n_k} = 0$. A maggior ragione, ne segue: $\lim_{n_k\to\infty} |b\, X_0|^{n_k} = 0$, il che, per la Prop. I, può avvenire solo per $X_0 = 0$.

Se σ tende a zero, in base alla Prop. II, è possibile costruire una successione del tipo:

$$\underbrace{y_1, \dots, y_1,}_{u_1 \text{ volte}} \quad \underbrace{y_2, \dots, y_2,}_{u_2 \text{ volte}} \quad \dots, \quad \underbrace{y_h, \dots, y_h,}_{u_h \text{ volte}} \quad \dots,$$

che risulti maggiorante della σ, privata al più di un numero finito di elementi. Ne segue che la serie:

$$T(X) = y_1 + y_1 |X| + \dots + (y_1 |X|)^{u_1} + (y_2 |X|)^{n_2} + \dots$$

$$\dots + (y_2 |X|)^{n_2+u_2} + \dots + (y_h |X|)^{n_h} + \dots + (y_h |X|)^{n_h+u_h} + \dots$$

(dove $n_r = n_{r-1} + u_{r-1} + 1$) è una maggiorante di $\sum |a_n X^n|$, privata al più di un numero finito di elementi. Verifichiamo ora che $T(X)$ soddisfa alla condizione di CAUCHY: ne verrà che anche $S(X)$ vi soddisfa, e quindi converge.

Per la Prop. III, è sufficiente dimostrare che il termine generale di $T(X)$ tende a zero, per ogni valore X_0 di X. A tale scopo, osserviamo che, fissato

$\varepsilon > 0$, esiste r tale che sia $y_r < \varepsilon$; basterà dunque dimostrare che:

$$(2.5) \qquad \forall X_0 \in \Omega,\ \forall y_r,\ \exists s_0/s > s_0 \implies (y_s \mid X_0 \mid)^{n_s+h} < y_r \qquad (0 \leqslant h \leqslant u_s),$$

dove il secondo membro dell'implicazione equivale a: $y_s \leqslant \mid X_0 \mid^{-1} y_r^{1/(n_s+h)}$ $(0 \leqslant h \leqslant u_s)$. Per la Prop. II, esiste y_t tale che risulti: $y_t < \mid X_0 \mid^{-1}$, e inoltre si ha che: $y_{r+1} < y_r^v$, $\forall v \in Q$; è dunque sufficiente provare che: $\forall y_r$, $\exists s_0/s > s_0$ $\implies$ $y_s < y_t\, y_{r+1}$, e questo è vero, perchè gli y_s sono raggi decrescenti di una base di 0-intorni.

Infine, fissati $\varepsilon > 0$, $y \in D_{S(0)}$ e scelto ϱ maggiore di ogni razionale, esiste n_0 tale che si abbia:

$$n > n_0 \implies \mid a_n y^n \mid < \varepsilon/\varrho,$$

e quindi:

$$n > n_0,\ \mid z \mid \leqslant \mid my \mid \implies \mid a_n z \mid^n \leqslant \mid a_n my \mid^n \leqslant \varrho \mid a_n y \mid^n < \varepsilon,$$

in altre parole, la convergenza su C_y^* è uniforme.

Osserviamo infine che:

V. – *Considerata la serie* $S^u(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (X - u)^n$, *di centro* u, *vale l'eguaglianza*:

$$(2.6) \qquad D_{S(u)} = u + D_{S(0)}.$$

Infatti, per la Prop. III si ha

$$x \in D_{S(0)} \iff \lim_{n\to\infty} (a_n x^n) = 0 \iff$$

$$\lim_{n\to\infty} \{a_n \cdot (x + u - u)^n\} = 0 \iff x + u \in D_{S(u)}.$$

Le proposizioni IV e V permettono dunque di caratterizzare il dominio di convergenza di una serie di potenze avente centro in un punto qualunque di Ω.

Le proposizioni seguenti mettono in evidenza un comportamento delle serie di potenze a coefficienti in Ω, profondamente diverso da quello delle serie di potenze a coefficienti complessi.

VI. - *La funzione* $S^{(u)}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (X - u)^n$ *è sviluppabile in serie di potenze in ogni punto* $v \in D_{S(u)}$; *detta* $T^{(v)}(X)$ *tale serie, risulta*: $D_{T(v)} = D_{S(u)}$.

Dimostrazione. L'eguaglianza: $S^{(u)}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (X - v + v - u)^n$ suggerisce di considerare la serie $T^{(v)}(X)$, di elemento generico $c_{n,h}(X) = \binom{n}{h} a_n \cdot (v-u)^{n-h} (X-v)^h$, $h \leqslant n$, ordinata per n ed h crescenti. Dimostriamo che $D_{T(v)} \supseteq D_{S(u)}$. Infatti risulta: $v - u \in D_{S(0)}$, e per $x \in D_{S(u)}$: $(x - v) \in D_{S(0)}$ (cfr. IX); pertanto, posto $z = \max(|v-u|, |x-v|)$, detto ϱ un elemento maggiore di ogni razionale, si ottiene che: $|c_{n,h}(x)| \leqslant \binom{n}{h} |a_n| z^n < \varrho |a_n| z^n$. Dalla relazione $z \in D_{S(0)}$ segue, per la Prop. III, che $\lim_{n\to\infty} (a_n z^n) = 0$, e quindi, a maggior ragione, $\lim_{n\to\infty} c_{n,h}(x) = 0$; ancora per la Prop. III, se ne conclude che la serie $T^{(v)}(x)$ converge.

Dalle proprietà associativa e commutativa delle serie convergenti, ne segue l'eguaglianza: $T^{(v)}(x) = S^{(u)}(x)$, per $x \in D_{S(u)}$.

Scambiando tra loro il ruolo di $S^{(u)}(X)$ e di $T^{(v)}(X)$, si vede che $D_{S(u)} = D_{T(v)}$.

In particolare, ne segue che:

VII. - *Una serie di potenze non è prolungabile analiticamente fuori del suo dominio di convergenza.*

3. - Proprietà dei domini di convergenza.

Le proposizioni seguenti sono valide per tutti i campi finora considerati, tuttavia la maggior parte di esse ha interesse solo per i campi che rientrano nel caso A), perchè per gli altri diventa banale.

VIII. - *Il dominio di convergenza* $D_{S(0)}$ *di una serie di potenze* $S(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, *se non è ridotto al solo zero, è aperto e chiuso.*

Dimostrazione. Nel caso B) la proprietà è banale, perchè il dominio di convergenza coincide con l'intero campo Ω. Nel caso A), se $D_{S(0)}$ non è l'intero campo Ω, $\eta = D_{S(0)} \cap M^+$ è una partizione non di DEDEKIND di M^+ (cfr. Prop. IV), e perciò:

$$\exists\, \varepsilon > 0 / \ |\theta| < \varepsilon, \ |x| \in \eta \implies |\theta| + |x| \in \eta;$$

ricordando la (2.4), la diseguaglianza $|\theta + x| \leqslant |\theta| + |x|$ e la (2.2), ne segue:

$$(3.1) \qquad \exists\, \varepsilon > 0 / \ |\theta| < \varepsilon, \ x \in D_{S(0)} \implies x + \theta \in D_{S(0)};$$

in altre parole, l'intorno di raggio ε di un qualunque elemento di $D_{S(0)}$ è tutto contenuto in $D_{S(0)}$, che pertanto è aperto. Viceversa, se y è un punto di accumulazione per l'insieme $D_{S(0)}$, nell'intorno di y di raggio ε cade qualche $x \in D_{S(0)}$; allora y appartiene all'intorno di x di raggio ε, e quindi a $D_{S(0)}$, che risulta chiuso.

IX. – *Il dominio di convergenza $D_{S(0)}$ di una serie di potenze $S(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n X^n$ è un sottogruppo del gruppo additivo $M(i)$.*

Dimostrazione. Per la Prop. III si ha che:

$$(3.2) \qquad x \in D_{S(0)}, \ y \in D_{S(0)} \iff \lim_{n \to \infty} (a_n x^n) = \lim_{n \to \infty} (a_n y^n) = 0 \ .$$

Posto $z = \max\{|x|, |y|\}$, ed indicato con ϱ un elemento maggiore di ogni razionale, ne viene:

$$|a_n \cdot (x-y)^n| \leqslant 2^n |a_n| z^n < \varrho |a_n| z^n \, .$$

Dall'uguaglianza $\lim_{n \to \infty} (a_n z^n) = 0$ segue, a maggior ragione,

$$(3.3) \qquad \lim_{n \to \infty} \{a_n \cdot (x-y)^n\} = 0 \, ,$$

ossia, per la Prop. III, $x - y \in D_{S(0)}$.

X. – *Se $D_{S(u)}$, $D_{T(v)}$ hanno intersezione non vuota, uno di essi è contenuto nell'altro; più precisamente:*

$$(3.4) \qquad D_{S(0)} \subseteq\!\!\supseteq D_{T(0)}, \ D_{S(v)} \cap D_{T(v)} \neq \Phi \implies D_{S(u)} \subseteq\!\!\supseteq D_{T(v)} \, .$$

Dimostrazione. Proviamo innanzitutto che

$$(3.5) \qquad D_{T(0)} \cap D_{T(v)} \neq \Phi \implies D_{T(0)} = D_{T(v)} \, ;$$

infatti, se a è un elemento di $D_{T(0)} \cap D_{T(v)}$, per la Prop. V, esiste $b \in D_{T(0)}$ tale che risulti $a = v + b$. Per la Prop. IX, ne segue $v \in D_{T(0)}$, e quindi, ancora per le Proposizioni V e IX, $D_{T(v)} = D_{T(0)}$.

Più generalmente, vale l'implicazione:

$$(3.6) \qquad D_{S(0)} \supseteqq\subseteqq D_{T(0)}, \quad D_{S(0)} \cap D_{T(v)} \neq \Phi \implies D_{S(0)} \supseteqq\subseteqq D_{T(v)};$$

infatti, nell'ipotesi $D_{S(0)} \subseteq D_{T(0)}$, l'implicazione segue dalla (3.5); nell'ipotesi $D_{S(0)} \supset D_{T(0)}$, sia a un elemento di $D_{S(0)} \cap D_{T(v)}$. Per la Prop. V, esiste $b \in D_{T(0)}$ per cui risulta $a = v + b$, e quindi, per la Prop. IX, $v = a - b \in D_{S(0)}$; ancora per la Prop. IX, si ottiene infine che $D_{T(v)} = D_{T(0)} + v \subseteq D_{S(0)}$.

Poichè, per la Prop. V, si ha: $D_{S(u)} \cap D_{T(v)} \neq \Phi \implies D_{S(0)} \cap D_{T(v-u)} \neq \Phi$, dalla (3.6) segue che: $D_{S(0)} \subseteq D_{T(v-u)}$ se $D_{S(0)} \subseteq D_{T(0)}$, oppure: $D_{S(0)} \supseteq D_{T(v-u)}$ se $D_{S(0)} \supseteq D_{T(0)}$. Di qui e dalla Prop. V segue la (3.4).

L'enunciato seguente, a differenza di quelli che precedono, si riferisce solo al caso A).

XI. – *In un campo Ω, che rientra nel caso* A), *esistono domini di convergenza di serie di potenze, diversi dall'insieme $\{0\}$, a piacere piccoli*; *ossia*:

$$(3.7) \qquad \forall \varepsilon \in M^+, \quad \exists S^{(0)}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n / \quad D_{S(0)} \subseteq V(0, \varepsilon), \quad D_{S(0)} \neq \{0\},$$

dove $V(0, \varepsilon)$ indica lo 0-intorno di raggio ε.

Dimostrazione. Posto: $S(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{-n} X^n$, $D_{S(0)}$ risulta formato dai punti x per i quali si ha (Prop. III):

$$(3.8) \qquad \lim_{n \to \infty} (\varepsilon^{-1} x)^n = 0 .$$

Dalla (3.8) segue: $|x| < \varepsilon$, ossia $D_{S(0)} \subseteq V(0, \varepsilon)$. Inoltre, se y è un elemento non nullo per cui risulta $\lim_{n \to \infty} y^n = 0$, $x = \varepsilon y$ appartiene a $D_{S(0)}$, che pertanto non è ridotto al solo elemento nullo.

Poichè ogni dominio di convergenza è aperto e chiuso, ne segue che ogni 0-intorno è sconnesso. Ricordando che le traslazioni sono omeomorfismi di Ω su sè stesso, si ottiene come corollario che:

XII. – *Un campo Ω, che rientra nel caso* A) ([4]), *è totalmente sconnesso.*

Consideriamo ora, più in particolare, quelle serie tali che gli elementi del loro dominio di convergenza siano dell'ordine di grandezza dei razionali. Il loro esame permetterà di migliorare la Prop. IV e metterà in rilievo un'altra differenza tra il comportamento delle serie a coefficienti complessi e quello delle serie a coefficienti in Ω.

Indicato con $\eta(Q)$ l'insieme così definito:

$$\eta(Q) = \{y \in \Omega: \ \exists r \in Q^+ / \quad r > |y|\} \tag{3.9}$$

(dove Q^+ indica l'insieme dei razionali non negativi), dimostriamo che:

XIII. – *Il dominio $D_{S^{(0)}}$ della serie $S^{(0)}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ contiene $\eta(Q)$ se e solo se risulta* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

D i m o s t r a z i o n e. Se vale l'eguaglianza $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, detto ϱ un elemento maggiore di ogni razionale, si ha che: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \varrho) = 0$, e pertanto, per ogni $y \in \eta(Q)$, risulta: $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n y^n| \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| \varrho = 0$: per la Prop. III, ne segue che $y \in D_{S^{(0)}}$. Viceversa, se $D_{S^{(0)}} \supseteq \eta(Q)$, $S^{(0)}(X)$ converge, in particolare, per $X = 1$, e quindi, ancora per la Prop. III, si ha: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

([4]) Osserviamo che *la Prop.* XII *vale, più generalmente, per un qualunque campo non archimedeo* $K(i)$. Infatti, se ξ è una partizione non di DEDEKIND di K^+, esiste $\varepsilon^* \in K^+$ tale che risulti: $a \in \xi \Longrightarrow a + \varepsilon^* \in \xi$, ed esistono $b \in \xi$, $h \in K^+$ tali che sia: $b + h \notin \xi$. Scelto un arbitrario $\varepsilon \in K^+$, esiste $\varrho \in K^+$ per cui si ha: $h\varrho^{-1} < \varepsilon$. L'insieme $\xi\varrho^{-1} = \{x: \varrho x \in \xi\}$ è ancora una partizione non di DEDEKIND di K^+, in quanto risulta:

$$a' \in \xi\varrho^{-1} \Rightarrow a' + \varepsilon^*\varrho^{-1} \in \xi\varrho^{-1},$$

$$b' = b\varrho^{-1} \in \xi\varrho^{-1}, \qquad b' + h\varrho^{-1} \notin \xi\varrho^{-1}.$$

Pertanto l'insieme $\mathcal{C} = (\xi\varrho^{-1} - b') \cap K^+ = \{y \in K^+: \ y + b' \in \xi\varrho^{-1}\}$ è una partizione non di DEDEKIND di K^+ contenuta nel segmento $[0, \varepsilon]$. L'insieme $\mathscr{A}$ degli elementi $x \in \Omega$ per i quali risulta $|x| \in \mathcal{C}$ è dunque contenuto nel cerchio $V(0, \varepsilon)$; con un ragionamento analogo a quello fatto nella Prop. VIII, si vede che $\mathscr{A}$ è aperto e chiuso.

Poichè, per i campi Ω che rientrano nel caso B), $D_{s(0)}$, se non si riduce al solo zero, coincide con tutto Ω, la Prop. XIII mostra che *la parte della Prop.* IV *relativa al caso* B) *può anche essere enunciata sostituendo alla successione* $\sigma = \sqrt[n]{|a_n|}$ *la stessa successione* $\{a_n\}$; in altre parole, in questi campi vale l'equivalenza:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 . \tag{3.10}$$

La Prop. XIII ci permette inoltre di verificare che, mentre nel campo complesso un qualunque numero reale positivo è raggio di convergenza di qualche serie di potenze, in questi campi non archimedei, nei quali il raggio di convergenza viene sostituito dalla partizione di convergenza, vale la proposizione seguente:

XIV. – *Una partizione non di* D e d e k i n d *di* M^+ *non è necessariamente la partizione di convergenza di qualche serie di potenze.*

D i m o s t r a z i o n e. Proviamo che: *se* M *ammette una base* $\{x_i\}$, $i \in \sum_\alpha$, *di trascendenza su* Q, *per la quale* $J[Q(x_i),\ i \in \sum_\alpha]$ *possiede almeno due elementi, l'inclusione* $D_{s(0)} \supseteq \eta(Q)$ *non può ridursi all'eguaglianza.* Infatti, in queste condizioni, esistono ([5], Prop. III) due elementi positivi, y e z di M, per i quali risulta:

$$\forall n \in N,\ \forall r \in \eta(Q):\ r < y^n < z , \tag{3.11}$$

e pertanto, se $S(X) = \sum a_n X^n \in \eta(Q)$, si ha: $\lim_{n\to\infty} |a_n y^n| \leqslant z \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$; per la Prop. III ne segue che $S(y)$ è convergente, e dalla (3.11) vediamo che $y \notin \eta(Q)$.

È immediato verificare che:

XV. – *Se* $D_{s(0)}$ *contiene un razionale non nullo, allora contiene tutto* $\eta(Q)$.

Infatti, se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$, $r \in Q$, converge, risulta: $\lim_{n\to\infty} (a_n r^n) = 0$, e quindi, detto θ un elemento positivo di M, minore di ogni razionale positivo, si ha: $|a_n|\, \theta < |a_n|\, r^n$, da cui segue: $\lim_{n\to\infty} (a_n \theta) = \theta \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = 0$, e quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. La Prop. XV segue allora dalla XIII.

La Prop. XIII dà qualche informazione sul dominio di convergenza delle serie il cui termine generale tende a zero; nel seguito (nn. **4** e **5**); ci sarà utile avere caratterizzato il dominio di convergenza delle serie a coefficienti limitati e non tendenti a zero.

Posto

$$\xi = \{y \in \Omega / \lim_{n \to \infty} y^n = 0\}, \tag{3.12}$$

dimostriamo che:

XVI. – *Le serie di potenze a coefficienti con modulo compreso tra due elementi positivi e non nulli hanno come dominio di convergenza l'insieme* ξ.

Dimostrazione. Sia $S(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ una serie del tipo suddetto, e sia $y \in D_{S(0)}$. Detto b un elemento positivo di M, minore di ogni a_n, risulta (Prop. III):

$$0 = \lim_{n \to \infty} | a_n y^n | \geqslant b \cdot \lim_{n \to \infty} | y^n | ,$$

e quindi: $\lim_{n \to \infty} y^n = 0$.

Viceversa, se risulta $\lim_{n \to \infty} y^n = 0$, detto c un elemento positivo di M, maggiore di ogni $| a_n |$, ne viene: $\lim_{n \to \infty} | a_n y^n | \leqslant \lim_{n \to \infty} (c \, | y^n |) = 0$, e quindi (Prop. III) $S(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ converge.

Osserviamo che l'insieme ξ è formato da elementi il cui modulo è minore di ogni razionale positivo, ma, in generale, *non* contiene *tutti* questi elementi.

Infatti, nell'esempio usato per dimostrare la Prop. XIV, risulta: y^{-1} minore di ogni razionale positivo, $\lim_{n \to \infty} y^{-n} \neq 0$.

Verifichiamo infine che:

XVII. – *Un dominio di convergenza contenente* ξ *propriamente contiene necessariamente* $\eta(Q)$.

Dimostrazione. Se y è un elemento, non appartenente a ξ, per il quale $S(X)$ converge, risulta:

$$\exists \alpha \in M^+ / \quad 0 < \alpha < | y |^n , \ \forall n \in N ,$$

ed inoltre: $\lim_{n \to \infty} (a_n y^n) = 0$. Ne segue, a maggior ragione, $\lim_{n \to \infty} (a_n \alpha) = 0$, ossia $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, e pertanto $S(X)$ converge su $\eta(Q)$.

4. - Sulle funzioni f: $\Omega \to \Omega$, sviluppabili in serie di potenze.

I campi Ω considerati in questo numero rientrano tutti nel caso A).

In accordo con la nomenclatura usata per le funzioni definite sul campo complesso, diremo che *una funzione* f: $\Omega \to \Omega$ è analitica in un punto $u \in \Omega$, se essa è sviluppabile in serie di potenze di centro u, con dominio $D_f^{(u)} \neq \{u\}$.

Ad esempio, analogamente a quanto avviene nel campo complesso, la funzione $f(z) = 1/z$ è analitica in ogni punto diverso da zero, in quanto risulta:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_0} \frac{1}{1 - \dfrac{z_0 - z}{z_0}} = \frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_0 - z}{z_0}\right)^n ,$$

per tutti gli z per i quali si ha: $\lim\limits_{n \to \infty} ((z_0 - z)/z_0)^n = 0$; in altre parole, vale l'eguaglianza: $D_{1/z}^{(z_0)} = z_0 + z_0 \xi$. Anche in questo caso, dunque, il dominio di convergenza diventa a piacere piccolo quando $z_0 \to 0$, però, a differenza di quanto accade nel campo complesso, si ha che (Prop. X):

$$|z_2| < |z_1|, \quad z_2 \notin D_{1/z}^{(z_1)} \quad \Longrightarrow \quad D_{1/z}^{(z_1)} \cap D_{1/z}^{(z_2)} = \Phi .$$

Metteremo ora in evidenza alcuni fatti, che *non* si presentano nel caso complesso.

XVIII. – *Esistono funzioni analitiche su tutto Ω, aventi in ogni punto una stessa partizione di convergenza, a piacere piccola.*

Dimostrazione. Fissiamo in Ω un buon ordinamento ([**8**], p. 441) nel quale 0 sia il primo elemento: $\Omega = \{x_\mu\}$, $\mu \in \sum_\beta$. Costruiremo una funzione $S(X)$ soddisfacente alle condizioni volute, procedendo per induzione transfinita. Poniamo:

$$S^{(0)}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n , \qquad \text{dove} \qquad D_S^{(0)} \subseteq V(0, \varepsilon) ,$$

(cfr. Prop. XI).

Supponiamo di aver costruito, per ogni $\nu < \mu$, una serie $S^{(x_\nu)}(X)$, avente la stessa partizione di convergenza di $S^{(0)}(X)$, in modo che risulti:

$$y \in D_{S(x_{\nu_1})} \cap D_{S(x_{\nu_2})} \Longrightarrow S^{x_{\nu_1}}(y) = S^{x_{\nu_2}}(y) \qquad (\nu_1, \ \nu_2 < \mu) . \tag{4.1}$$

Definiamo:

$$S^{(x_\mu)}(X) = \begin{cases} S^{(x_\nu)}(X) & \text{se } \exists \nu < \mu / x_\mu \in D_s(x_\nu) \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (X - x_\mu)^n & \text{se } \forall \nu < \mu,\ x_\mu \notin D_{s(x_\nu)}\,. \end{cases}$$

La definizione è ben posta, in quanto, se $x_\mu \in D_{s(x_{\nu_1})} \cap D_{s(x_{\nu_2})}$, per la Prop. X, risulta $D_{s(x_{\nu_1})} = D_{s(x_{\nu_2})}$ e quindi, per l'ipotesi (4.1), $S^{x_{\nu_1}}(X) = S^{x_{\nu_2}}(X)$. Inoltre, per ν_1, $\nu_2 \leqslant \mu$, vale ancora la relazione (4.1): infatti, se $x_\mu \in D_{s(x_\nu)}$, questo è ovvio, se invece $\forall \nu < \mu$, $x_\mu \notin D_{s(x_\nu)}$, per la Prop. X, risulta:

$$D_{s(x_\mu)} \cap D_{s(x_\nu)} = \Phi, \qquad \forall \nu < \mu\,, \tag{4.2}$$

e quindi $y \in D_{s(x_{\nu_1})} \cap D_{s(x_{\nu_2})} \implies \nu_1 \neq \mu$, $\nu_2 \neq \mu$, oppure $\nu_1 = \nu_2 = \mu$. La funzione $S(X)$ così definita:

$$S(x_\mu) = S^{(x_\mu)}(x_\mu) \tag{4.3}$$

soddisfa alle condizioni volute, in quanto risulta:

$$S(X)/D_{s(x_\mu)} = S^{(x_\mu)}(X)\,.$$

Come nel caso complesso, diremo che *una funzione è analitica all'infinito, se essa è sviluppabile in serie di potenze di* $1/x$, *in un intorno dell'*∞.

Proviamo che:

XIX. – *Esistono delle funzioni, analitiche in tutti i punti di* Ω *e all'*∞, *che non sono costanti.*

D i m o s t r a z i o n e. L'insieme

$$\mathfrak{T} = M^+ - \frac{1}{\xi} = \left\{ y \in M^+ \colon \lim_{n \to \infty} \frac{1}{y^n} \neq 0 \right\}, \tag{4.4}$$

risulta una partizione non di DEDEKIND di M^+ in quanto:

$$y \in \mathfrak{T},\ \mu < y \implies \frac{1}{\mu} > \frac{1}{y}, \quad y \in \mathfrak{T} \implies \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\mu}\right)^n \neq 0 \implies \mu \in \mathfrak{T}$$

e inoltre:

$$y \in \mathfrak{T},\ h \in \mathfrak{T} \implies (y + h) \in \mathfrak{T}\,,$$

poichè

$$(y+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k h^{n-k} \leqslant \varrho \cdot \max\{y, h\}^n ,$$

e quindi $(y+h)^{-n} \geqslant \dfrac{1}{\varrho} \dfrac{1}{\max\{y, h\}^n} \not\to 0$.

Consideriamo il dominio:

$$D = \{x \in \Omega : |x| \in \mathcal{C}\}.$$

Con lo stesso procedimento seguito nella Prop. XVIII per costruire una funzione analitica su tutto Ω, possiamo ora costruire una funzione analitica su D, basta avere l'avvertenza di scegliere una serie iniziale $S^{(0)}(X)$ avente dominio di convergenza contenuto in D (cfr. Prop. XI). Consideriamo dunque una funzione analitica $S(X)$ definita su D ed una funzione analitica $T(X)$ con $D_{T^{(0)}} = \xi$ (cfr. Prop. XVI), e definiamo:

$$U(X) = \begin{cases} S(X) & \text{per } X \in D \\ T(1/X) & \text{per } X \in \Omega - D . \end{cases}$$

$U(X)$ è analitica su $\Omega \cup \{\infty\}$, e non è costante: per dimostrarlo è sufficiente verificare che $T(1/X)$ è una funzione analitica di $X - X_0$, per ogni $X_0 \in \Omega - D$, e che $D_{T(X_0)(1/X)} \subseteq \Omega - D$. Posto $T(1/X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (1/X)^n$, per $X_0 \in 1/\xi$, $X \in X_0 + X_0\,\xi$, vale l'eguaglianza:

$$T(1/X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \left(\frac{1}{X - X_0 + X_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \left(\sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{(X-X_0)^h}{X_0^{h+1}}\right)^n .$$

Consideriamo la serie $U(X - X_0)$ di elemento generico

$$C_{n,h}(X) = \frac{a_n}{X_0^n} \left(\frac{X - X_0}{X_0}\right)^{h_1 + h_2 + \ldots + h_n}, \qquad \text{dove} \quad h = (h_1, \ldots, h_n),\ h_i \in N .$$

Essa, ordinata in un modo qualsiasi, ha dominio di convergenza che contiene $X_0 + X_0\,\xi$, in quanto per $X \in X_0 + X_0\,\xi$, fissato $\varepsilon > 0$, tutti i $|c_{n,h}(X)|$, tranne al più un numero finito, sono minori di ε. Infatti risulta:

$$|(X - X_0)/X_0|^{h_1+h_2+\ldots+h_n} < 1,$$

$$\exists\, K \in M^+ /\ |a_n/X_0^n| < K, \qquad \forall n \in N,$$

$$\exists\, n_0 \in N /\ n > n_0 \implies |a_n/X_0^n| > \varepsilon,$$

$$\exists\, K_0 \in N /\ h_1 + h_2 + \ldots + h_n > k_0 \implies |(X - X_0)/X_0|^{h_1+\ldots+h_n} < \varepsilon/k,$$

e quindi tutti i $|c_{n,h}(X)|$ tranne al più quelli per cui si ha contemporaneamente $n \leqslant n_0$ ed $h_1 + \ldots + h_n \leqslant k_0$, soddisfano alla $|c_{n,h}(X)| < \varepsilon$. Pertanto $U(X - X_0)$ ha dominio di convergenza non ridotto al solo X_0; per le proprietà associativa e commutativa delle serie convergenti, ne segue che, su tutto il dominio di convergenza di $U(X - X_0)$, vale l'eguaglianza: $T(1/X) = U(X - X_0)$; $T(1/X)$ è dunque analitica in ogni punto $X_0 \in 1/\xi$, e vale l'inclusione: $D_{T^{(X_0)}(1/X)} \subseteq \subseteq \Omega - D$.

Nel dimostrare la Prop. XVIII, abbiamo ricoperto Ω con domini di convergenza D_i, $i \in I$, a due a due disgiunti, ed abbiamo notato che tali domini si possono scegliere a piacere piccoli. Tutte le *funzioni* che sono costanti sui singoli D_i *hanno derivata identicamente nulla, pur non essendo globalmente costanti.* Più generalmente, se η è una partizione non di DEDEKIND di M^+, è possibile ricoprire l'insieme $D = \{x: |x| < \eta\}$ con dei domini di convergenza D_i, a due a due disgiunti, e quindi costruire delle funzioni, costanti sui singoli D_i, ma non globalmente su D, aventi su D derivata identicamente nulla. Proveremo tra poco (Prop. XXII) che questo fatto non si presenta per le serie di potenze, quando si prende come dominio D il loro dominio di convergenza. A tale scopo, osserviamo intanto che:

XX. – *Una serie di potenze è una funzione continua, in tutto il suo dominio di convergenza.*

Infatti essa è una serie uniformemente convergente (Prop. IV) di funzioni continue.

Tale proprietà permette di dimostrare il *principio degli zeri isolati*, come lo si dimostra nel campo complesso (cfr. [3], p. 190), e, di conseguenza, l'unicità dello sviluppo di una funzione in serie di potenze avente un dato centro.

Sfruttando le Proposizioni XX e III, si prova facilmente che:

XXI. – *Ogni serie di potenze* $S(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ *è indefinitamente derivabile nel suo dominio di convergenza. La serie derivata è* $S'(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n X^{n-1}$ *ed ha lo stesso dominio di convergenza di* $S(X)$.

La serie $S^*(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \{X^{n+1}/(n+1)\}$ ha come derivata $S(X)$, e quindi ha come dominio di convergenza $D_{S(0)}$. Se $T(X) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n$ è un'altra primitiva di $f(X)$, risulta: $\sum_{n=0}^{\infty} n\, b_n X^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$; per il principio degli zeri isolati, ne segue: $n\, b_n = a_{n-1}$, per $n \geqslant 1$, ossia $b_n = a_{n-1}/n$ $(n \geqslant 1)$; in altre parole, $T(X)$ ed $S^*(X)$ differiscono per una costante.

Abbiamo così provato che:

XXII. – *Una serie di potenze è indefinitamente integrabile nel suo dominio di convergenza. Due sue primitive differiscono per una costante.*

Osserviamo che, a differenza di quanto accade nel campo complesso, una funzione analitica su Ω è solo «localmente» integrabile, ossia integrabile sui singoli domini di convergenza. In altre parole, i domini di convergenza hanno le stesse caratteristiche possedute, nel caso complesso, dalle componenti connesse del dominio di convergenza.

5. - Studio di serie di potenze particolari.

Ci proponiamo di definire le funzioni binomiale, esponenziale e logaritmica, a coefficienti in Ω: esse risulteranno serie di potenze aventi la stessa struttura formale degli sviluppi di TAYLOR delle corrispondenti funzioni classiche.

Serie binomiale. Posto $(1+X)^Y = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{Y}{n} X^n$, dimostriamo la proposizione seguente:

XXIII. – *Se x, y_1, y_2 sono elementi di Ω per i quali le serie $(1+x)^{y_1}$ ed $(1+x)^{y_2}$ convergono, allora anche la serie $(1+x)^{y_1+y_2}$ converge e vale l'identità:*

$$(1+x)^{y_1} \cdot (1+x)^{y_2} = (1+x)^{y_1+y_2}. \tag{5.1}$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che dalle ipotesi segue la convergenza della serie $(1+x)^{y_1+y_2}$, in quanto, fissato $X = x$, la funzione $(1+x)^Y$ è una serie di potenze in Y, e già sappiamo che il dominio di convergenza di una serie di potenze è chiuso rispetto alla somma. Poichè, fissato $Y = y$, $(1+X)^y$ è una serie di potenze in X, per l'unicità dello sviluppo in serie di potenze, l'identità da dimostrarsi equivale alle seguenti:

$$\forall\, n \in N: \quad \sum_{h=0}^{\infty} \binom{y_1}{h} \binom{y_2}{n-h} = \binom{y_1+y_2}{n}. \tag{5.2}$$

Se y_1, $y_2 \in Q$, tale identità è vera. Se $y_1 y_2 \notin Q$, detti r_1 ed r_2 due numeri reali algebricamente indipendenti su Q, l'omomorfismo

$$\varphi: \quad Q(r_1, r_2) \to Q(y_1, y_2),$$

che tiene fissi gli elementi di Q e manda r_1 ed r_2 in y_1 ed y_2 rispettivamente, è ben definito. D'altra parte è noto che nel campo reale, si ha:

$$\sum_{h=0}^{n} \binom{r_1}{h} \binom{r_2}{n-h} - \binom{r_1 + r_2}{n} = 0,$$

e pertanto

$$\varphi\left[\sum_{h=0}^{n} \binom{r_1}{h} \binom{r_2}{n-h} - \binom{r_1 + r_2}{n}\right] = 0,$$

ossia è vera la (5.2). Un ragionamento analogo si ripete nel caso che uno solo tra y_1 ed y_2 appartenga a Q. Come corollari, si ottengono le proposizioni seguenti:

XXIV. – *Se* $(1 + x)^y$ *converge, anche* $(1 + x)^{-y}$ *converge, ed il suo valore è l'inverso del precedente.*

Basta infatti osservare che, se si pensa $(1 + x)^Y$ come serie di potenze in Y, essa converge per $Y = y$, se e solo se converge per $Y = -y$, e che inoltre, in base alla definizione data, $(1 + x)^0 = 1$.

XXV. – *Se* y *è il razionale* m^{-1} $(m \in N)$, *l'elemento* $(1 + x)^{m^{-1}}$, *se esiste, è una radice m-esima di* $1 + x$.

Determiniamo ora il dominio di convergenza della serie binomiale. Abbiamo già notato che, fissato un valore x di X, essa diventa una serie di potenze in Y e che, analogamente, fissato un valore y di Y, essa diventa una serie di potenze in X.

Ne segue che, per vedere se la serie converge per una coppia x_0, y_0 di valori di X, Y sarà sufficiente esaminare se essa converge per una particolare coppia x_1, y_1 tale che risulti $|x_1| = |x_0|$, $|y_1| = |y_0|$. Pertanto, posto $a_n = \binom{y}{n} = \{y(y-1) \dots (y-n+1)\}/n!$, e detto ϱ un elemento maggiore di ogni razionale, è sufficiente esaminare i casi seguenti:

α) $y \in M^-$; $\lim\limits_{n \to \infty} |y|^n \neq \infty$, ossia, poichè la successione $\{y^n\}$ è monotona $\exists\, b \in M^+ / \ |y^n| < b$, $\forall n \in N$. In tal caso, essendo $|y - m| > 1$, per ogni

$m \in N^+$, e $|y - m| > |y - h|$ per $0 \leqslant h < m$, si ha:

$$|a_n| > \frac{|y|}{n!} > \frac{|y|}{\varrho},$$

e inoltre,

$$|a_n| < \frac{|y - n + 1|^n}{n!} = \frac{\left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-n)^{n-k} y^k\right|}{n!}$$

$$\leqslant \frac{b\left|\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{k} (1-n)^{n-k}\right|}{n!} < b\varrho_1 .$$

Ne segue (Prop. XVI) che il dominio di convergenza della serie in X è l'insieme ξ.

β) $$y \in M^-; \ \lim_{n\to\infty} |y|^n = \infty .$$

Da questa ipotesi segue, in particolare, che $|y|$ è maggiore di ogni razionale e pertanto si ha:

$$|a_n| < \frac{2^n |y|^n}{n!} < |y|^{n+1} .$$

La serie binomiale ammette dunque come maggiorante la $S(X) = \sum_{n=0}^{\infty} |y|^{n+1} X^n$, che ha come dominio di convergenza l'insieme $\xi |y|^{-1} = \{x: \ xy \in \xi\}$; e pertanto il dominio D della serie binomiale contiene l'insieme $\xi |y|^{-1}$. Si ha inoltre: $|a_n| > \frac{|y|^n}{n!} > \frac{|y|^n}{\varrho}$, e quindi la serie binomiale ammette come minorante la $T(X) = \sum_{n=0}^{\infty} |y|^n \varrho^{-1} X^n$, che ha ancora come dominio di convergenza l'insieme $\xi |y|^{-1}$; pertanto il suo dominio di convergenza D è contenuto in $\xi |y|^{-1}$. Dalla doppia inclusione si conclude che $D = \xi |y|^{-1}$.

Abbiamo così provato che:

XXVI. – *La serie binomiale di* $(1 + X)^r$ *converge per le coppie di elementi* x, y *soddisfacenti ad una delle condizioni seguenti*:

(5.3) $$\lim_{n\to\infty} |y|^n \neq \infty , \qquad x \in \xi ,$$

(5.4) $$\lim_{n\to\infty} |y|^n = \infty , \qquad x \in \xi |y|^{-1}$$ [5] .

---

[5] Osserviamo che, nel caso (5.4), $\xi |y|^{-1}$ è contenuto in ξ propriamente. Infatti l'elemento $|y|^{-1} \in \xi$, e per $X = |y|^{-1}$ la serie binomiale non converge, in quanto ammette la minorante, non convergente, $\sum_{n=0}^{\infty} |y|^n \varrho^{-1} |y|^{-n}$.

Serie esponenziale. Come per i campi complesso ([**3**], Cap. XIII) e p-adico ([**7**], Cap. V) si prova che la più generale serie di potenze che soddisfa alla relazione

$$f(X+Y)=f(X)\cdot f(Y) \tag{5.5}$$

è la seguente:

$$f(Z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}Z^n .$$

Per $\alpha=1$ si ottiene la serie esponenziale

$$e^Z=\sum_{n=0}\frac{Z^n}{n!} . \tag{5.6}$$

Per la Prop. XVI, il dominio di convergenza di e^Z è ξ. Ne segue che e^Z-1 è un elemento di ξ, perchè le sue ridotte n-esime sono elementi di ξ (che è chiuso rispetto alla somma), e quindi è tale anche il loro limite. *La funzione esponenziale è dunque un'applicazione di ξ in $1+\xi$*: in particolare, i suoi valori appartenenti ad M sono tutti positivi. Inoltre, per $Z=X\in M\cap\xi$, la serie e^X-1 ha lo stesso segno di X e quindi, in particolare,

$$e^X=1 \iff X=0 . \tag{5.7}$$

Infatti, fissato $\theta\in M$, minore di ogni razionale positivo, soddisfacente alla condizione $|X|<\theta$, si ha: $|X^2|<\theta|X|$, ossia $\varrho|X^2|<|X|$, dove $\varrho=\theta^{-1}$ è maggiore di ogni razionale. Inoltre, essendo $|X|<1$, risulta: $|X^n|<|X^2|$, e quindi: $\left|\frac{X^2}{2!}+\dots+\frac{X^n}{n!}\right|<n|X^2|$, da cui segue $\left|\frac{X^2}{2!}+\dots+\frac{X^n}{n!}+\dots\right|<$ $<\varrho|X^2|<|X|$.

Al variare di X in M, vale l'eguaglianza

$$e^{iX}=\sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h\frac{X^{2h}}{(2h)!}+i\sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h\frac{X^{2h+1}}{(2h+1)!}, \tag{5.8}$$

e quindi, estendendo in modo naturale le definizioni di $\sin Z$ e $\cos Z$ che si dànno nel campo complesso, si ottiene:

$$e^{iX}=\cos X+i\sin X, \qquad X\in M . \tag{5.9}$$

Dalla relazione

$$|e^{iX}|=e^{iX}e^{-iX}=1 , \tag{5.10}$$

segue:

$$\cos^2 X + \sin^2 X = 1 , \tag{5.11}$$

che, per il principio degli zeri isolati, risulta valida, più generalmente, per $X = Z \in \Omega$.

Inoltre, con un ragionamento analogo a quello fatto per la serie esponenziale, si vede che, per $X \in M$, $\sin X$ ha lo stesso segno di X, mentre $\cos X$ è compreso tra 1 ed un qualunque razionale dell'intorno di 1.

Osserviamo infine che valgono le uguaglianze;

$$\mathrm{D} \cos Z = -\sin Z , \qquad \mathrm{D} \sin X = \cos Z . \tag{5.12}$$

Utilizzeremo le relazioni (5.7) e (5.10) per provare che la *funzione esponenziale*, che per la (5.5) è omomorfismo del gruppo additivo ξ su un sottogruppo del gruppo moltiplicativo $M(i)^*$, *è addirittura un monomorfismo.* Infatti risulta: $e^{X+iY} = 1 \implies X + iY = 0$, in quanto:

$$e^{X+iY} = 1 \iff e^X \cdot e^{iY} = 1 \implies e^X \, | e^{iY} | = 1 \implies e^X = 1 \implies X = 0 ,$$

ed inoltre:

$$e^{iY} = 1 \iff \cos Y + i \sin Y = 1 \iff Y = 0 .$$

A proposito della relazione (5.10), notiamo ancora che l'applicazione e^i: $X \to e^{iX}$ di $\xi \cap M$ entro la circonferenza unitaria non è suriettiva, in quanto la parte reale di e^{iX} è compresa tra 1 ed un qualunque razionale dell'intorno di 1, mentre il valore assoluto della sua parte immaginaria è minore di ogni razionale.

Serie logaritmica. Con un ragionamento del tutto analogo a quello che si fa nel caso complesso o p-adico si trova che la più generale serie di potenze soddisfacente alla

$$f(X) + f(Y) = f(XY) , \qquad X, \ Y \in D_f , \tag{5.13}$$

è la seguente:

$$f(1 + Z) = c \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{Z^{n+1}}{n+1} .$$

Per $c = 1$ si ottiene la serie logaritmica

$$\log(1+Z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{Z^{n+1}}{n+1}. \tag{5.14}$$

Dalla Prop. XVI segue che il dominio di convergenza D del logaritmo è $1+\xi$; esso è chiuso rispetto al prodotto (in quanto $Z \in D \implies Z^n$ limitato), come ci si aspettava dal fatto che sia verificata la (5.13).

Dalla relazione:

$$\log(1+Z) = Z[1+S(Z)], \qquad \text{dove} \qquad S(Z) \in \xi,$$

si ottiene che $Z \neq 0 \implies \log(1+Z) \neq 0$, *ossia la funzione logaritmica è iniettiva.*

Verifichiamo infine che *le funzioni* $\log X$ *ed* $\exp X$ *sono l'una l'inversa dall'altra*: ne seguirà che *ciascuna di esse è un isomorfismo tra i gruppi topologici* $(\xi, +)$ *e* $(1+\xi, \cdot)$. La funzione φ: $Z \in \xi \to \log e^Z \in \xi$ è analitica, e soddisfa alla relazione

$$\varphi(X+Y) = \log e^{X+Y} = \log(e^X \cdot e^Y) = \log e^X + \log e^Y = \varphi(X) + \varphi(Y), \tag{5.15}$$

e pertanto risulta: $\varphi(X) = a_0 + a_1 X$; poichè il suo termine di grado minimo è X, ne viene che $\varphi(X) = X$.

Se ne conclude che il logaritmo è una funzione suriettiva; poichè già sappiamo che è iniettiva, ne segue che essa è biunivoca, ed ha come funzione inversa l'esponenziale.

Bibliografia.

[1] N. Bourbaki, Livre 2 (*Algèbre*), Cap. 6 (*Groupes et Corps Ordonneés*), Hermann, Paris 1964.

[2] N. Bourbaki, Livre 3 (*Topologie Générale*), Hermann, Paris 1965.

[3] E. Goursat, *Cours d'Analyse Mathématique*, Tome II, Gauthier Willars, Paris 1949.

[4] C. Massaza, *Sugli ordinamenti di un campo estensione puramente trascendente di un campo ordinato*, Rend. Mat. **1** (1968), 202-218.

[5] C. Massaza, *Campi ordinati soddisfacenti al primo assioma della numerabilità* Atti Accad. Sci. Torino **103** (1968-69), 703-715.

[6] C. Massaza, *Sul completamento dei campi ordinati*, Rend. Sem. Mat. Torino (1969-70).

[7] C. PISOT, *Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques*, Les Presses de l'Université de Montreal.

[8] W. SIERPINSKI, *Cardinal and Ordinal Numbers*, Paustwowe Wydawnictwo Naukowe 1958.

Summary.

We study the power-series whcse coefficients belong to a maximal ordered, non archimedean, complete field, satisfying the first axiom of countability.

We characterize their domain of convergence and underline some differences with the classical theory of power-series on the complex field.

* * *

Riv. Mat. Univ. Parma (2) **11** (1970), 159-164

M. A. PATHAN (*)

Expansions of the Hypergeometric Functions of Three Variables. (**)

Certain hypergeometric functions of three variables have been defined by SARAN [2]. In a paper that has appeared in this journal [3], SARAN has obtained some integral representation of LAPLACE type for these hypergeometric functions. The object of this paper is to derive some expansions involving these hypergeometric functions of three variables, with the help of the results given by SARAN [3]. These expansions are the generalisations of the results for the APPELL's hypergeometric function recently obtained by the author [1].

These expansions have been obtained in section B, with the help of the three lemmas, obtained by the author [1], given in section A, about the transform defined by the integral equation

$$\psi_{\lambda,k,m}(p) = \int_0^\infty e^{-(1/2)pt}\,(pt)^{\lambda-(1/2)}\,M_{k,m}(pt)\,f(t)\,dt\,. \tag{1.1}$$

Later on in section C, another recurrence relations for the APPELL's hypergeometric functions, which are the particular cases of the results obtained in section B, have also been obtained.

Here we shall denote $f(t) \in c(\sigma,\ \varrho;\ \alpha)$, if

$$f(t) = \begin{cases} O(t^{\sigma}) & \text{for small } t \\ O(e^{\alpha t}\, t^{\varrho}) & \text{for large } t. \end{cases}$$

(*) Indirizzo: Department of Mathematics, Aligarh Muslim University, Aligarh, India.

(**) Ricevuto: 26-IX-1967.

Section A.

Lemma I. *If*

$$f(t) \in c(\sigma,\ \varrho;\ \alpha), \qquad \mathrm{Re}\,(\lambda+\sigma+m+1)>0, \qquad \mathrm{Re}\,p>\mathrm{Re}\,\alpha,$$

then

$$(2.1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{r=0}^{n} (-1)^r\, n_{c_r} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)\,\Gamma(m-k+n-r+\frac{1}{2})\,\Gamma(2m+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k-m-r)\,\Gamma(2m+n+1)\,\Gamma(m-k+\frac{1}{2})}\ \cdot \\ &\qquad\qquad \cdot\ \psi_{\lambda-\frac{1}{2}n,\,k-\frac{1}{2}n+r,\,m+\frac{1}{2}n}(p) = \psi_{\lambda,\,k,\,m}(p)\,. \end{aligned} \right.$$

Lemma II. *If*

$$f(t) \in c(\sigma,\ \varrho;\ \alpha), \qquad \mathrm{Re}\,(\lambda+\sigma+m+1)>0, \qquad \mathrm{Re}\,p>\mathrm{Re}\,\alpha,$$

then

$$(2.2)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r}\, n_{c_r} \frac{\Gamma(k+m+n-r+\frac{1}{2})\,\Gamma(m-k-n+\frac{1}{2})\,\Gamma(2m+1)}{\Gamma(k+m+\frac{1}{2})\,\Gamma(2m+1-r)\,\Gamma(m-k+\frac{1}{2})}\ \cdot \\ &\qquad\qquad \cdot\ \psi_{\lambda+\frac{1}{2}r,\,k+n-\frac{1}{2}r,\,m-\frac{1}{2}r}(p) = \psi_{\lambda,\,k,\,m}(p)\,. \end{aligned} \right.$$

Lemma III. *If*

$$f(t) \in c(\sigma,\ \varrho;\ \alpha), \qquad \mathrm{Re}\,(\lambda+\sigma+m+1)>0, \qquad \mathrm{Re}\,p>\mathrm{Re}\,\alpha,$$

then

$$(2.3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r}\, n_{c_r} \frac{\Gamma(m-k+n-r+\frac{1}{2})\,\Gamma(m+k-n+\frac{1}{2})\,\Gamma(2m+1)}{\Gamma(2m+1-r)\,\Gamma(m+k+\frac{1}{2})\,\Gamma(m-k+\frac{1}{2})}\ \cdot \\ &\qquad\qquad \cdot\ \psi_{\lambda+\frac{1}{2}r,\,k-n+\frac{1}{2}r,\,m-\frac{1}{2}r}(p) = \psi_{\lambda,\,k,\,m}(p)\,. \end{aligned} \right.$$