Riv. Mat. Univ. Parma (2) **11** (1970), 239-243

TIZIANA MONTALI (*)

Un'osservazione sui funtori che conservano i prodotti finiti. (**)

1. - Introduzione.

Sia $\mathscr{K}$ una categoria con prodotti finiti; A, B oggetti di $\mathscr{K}$, dei quali B munito di una struttura algebrica di un certo tipo Ω. In [4] si dimostra che, se S è un insieme, si può dare in modo naturale sia ad Hom(A,B) che a B^S una struttura algebrica dello stesso tipo, in modo che le risultanti Ω-algebre soddisfino tutte le equazioni soddisfatte in B. Tali risultati discendono come corollari dalla seguente osservazione (che non mi risulta sia stata pubblicata):

Siano $\mathscr{K}$, $\mathscr{L}$ due categorie con prodotti finiti ed F: $\mathscr{K} \to \mathscr{L}$ un funtore che conserva i prodotti finiti; se A è una Ω-algebra (in $\mathscr{K}$) di una certa varietà, si può attribuire in modo naturale ad $F(A)$ una struttura di Ω-algebra (in $\mathscr{L}$) della stessa varietà.

Per la terminologia e il simbolismo, farò riferimento a [3] e [4].

2. – Siano $\mathscr{K}$ e $\mathscr{L}$ due categorie e sia F: $\mathscr{K} \to \mathscr{L}$ un funtore. Come è noto, si dice che esso *conserva i prodotti finiti* se, comunque presi due oggetti A, B di $\mathscr{K}$ ed un loro prodotto $(C, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, gli oggetti $F(A)$, $F(B)$ ammettono $(F(C), F(\varepsilon_1), F(\varepsilon_2))$ come loro prodotto.

Inoltre è noto che, se $\mathscr{K}$, $\mathscr{L}$ ammettono prodotti finiti,

$$F\colon\ \mathscr{K} \to \mathscr{L}$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.
(**) Ricevuto: 5-XI-1970.

è un funtore che conserva i prodotti finiti se e solo se per ogni coppia di oggetti A, B di $\mathcal{K}$ il morfismo

$$\alpha\colon\ F(A\times B)\to F(A)\times F(B)\,, \tag{1}$$

definito da

$$\varepsilon_i^{(F(A),\,F(B))}\,\alpha = F(\varepsilon_i^{(A,\,B)}) \qquad (i=1,\ 2), \tag{2}$$

è un isomorfismo.

In tutto il lavoro presupporrò che $\mathcal{K}$ e $\mathcal{L}$ siano categorie con prodotti finiti e Ω un dominio di operatori [1].

3. – Si può dimostrare il seguente

Lemma. *Sia t un termine n-ario* [1], *A un oggetto di $\mathcal{K}$ con una struttura algebrica di tipo Ω, ed $F\colon\ \mathcal{K}\to\mathcal{L}$ un funtore che conserva i prodotti finiti. Introduciamo su $F(A)$ la struttura di Ω-algebra indotta da F; sia cioè, per ogni $\omega\in\Omega(n)$,*

$$\omega_{F(A)} = F(\omega_A)\,\alpha_n^{-1}\,, \tag{3}$$

ove $\alpha_n\colon\ F(A^n)\approx F(A)^n$ è l'isomorfismo definito da

$$\varepsilon_i\,\alpha_n = F(\varepsilon_i) \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{4}$$

Allora si ha

$$t_{F(A)} = F(t_A)\,\alpha_n^{-1}\,. \tag{3*}$$

Dimostrazione. Si ragiona per induzione sulla costruzione dei termini. Se $t\in\Omega$, la (3*) si riduce alla (3); se t è una proiezione, l'asserto deriva dalla definizione di α_n.

Sia allora $\tau = t\{t^{(1)},\ \ldots,\ t^{(n)}\}$, con t termine n-ario e $t^{(1)}$, ..., $t^{(n)}$ termini m-ari soddisfacenti la (3*), cioè:

$$t_{F(A)} = F(t_A)\,\alpha_n^{-1}\,, \tag{5}$$

$$t^{(k)}_{F(A)} = F(t^{(k)}_A)\,\alpha_m^{-} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{6}$$

---

[1] Cfr. [4].

Ricordando che $F(\{x_1, ..., x_n\}) = \alpha_n^{-1}\{F(x_1), ..., F(x_n)\}$ se $x_1, x_2, ..., x_n$: $A^m \to A$, si ha:

$$\tau_{F(A)} = t_{F(A)}\{t^{(1)}_{F(A)}, ..., t^{(n)}_{F(A)}\} =$$

$$= F(t_A)\,\alpha_n^{-1}\{F(t_A^{(1)})\,\alpha_m^{-1}, ..., F(t_A^{(n)})\,\alpha_m^{-1}\} = F(t_A)\,\alpha_n^{-1}\{F(t_A^{(1)}), ..., F(t_A^{(n)})\}\,\alpha_m^{-1} =$$

$$= F(t_A)\,F(\{t_A^{(1)}, ..., t_A^{(n)}\})\,\alpha_m^{-1} = F(t_A\{t_A^{(1)}, ..., t_A^{(n)}\})\,\alpha_m^{-1} = F(\tau_A)\,\alpha_m^{-1}.$$

Si ha quindi il seguente

Teorema. *Sia A una Ω-algebra (in $\mathscr{K}$) soddisfacente un'equazione (t, τ) e $F: \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ un funtore che conserva i prodotti finiti; allora anche $F(A)$ soddisfa l'equazione (t, τ).*

Dimostrazione. Invero, essendo $t_A = \tau_A$, si ha

$$t_{F(A)} = F(t_A)\,\alpha_n^{-1} = F(\tau_A)\,\alpha_n^{-1} = \tau_{F(A)}.$$

4. – Corollario 1. *Sia A una Ω-algebra in $\mathscr{K}$ e sia S un insieme. Qualunque equazione soddisfatta in A è soddisfatta anche nella potenza diretta A^S.*

Dimostrazione. Si osservi che il funtore P_S: $\mathscr{K} \to \mathscr{K}$ definito da

$$\begin{cases} P_S\colon\ A \rightsquigarrow A^S & (A \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}) \\ P_S\colon\ \xi \rightsquigarrow \{\xi\,\varepsilon_x\}_{x\in S} & (\xi \in \mathrm{Mor}\,\mathscr{K}) \end{cases}$$

conserva i prodotti finiti e che la struttura di potenza diretta è appunto quella indotta da P_S.

Corollario 2. *Sia B una Ω-algebra in $\mathscr{K}$; per ogni oggetto A e per ogni operatore n-ario ω, sia ${}_A\omega$ l'operazione n-aria in* Hom(A, B) *definita da*

$${}_A\omega\colon\ (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \rightsquigarrow \omega_B\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}.$$

Se ${}_A\Phi$ *è la struttura algebrica che interpreta ciascun* ω *nel corrispondente* ${}_A\omega$, *si ha:*

(i) $\mathcal{A} = (\mathrm{Hom}(A,\ B),\ {}_A\Phi)$ *è una* Ω*-algebra* (*ovviamente concreta*);

(ii) $\mathcal{A}$ *soddisfa tutte le equazioni soddisfatte in* B.

Dimostrazione. Sarà sufficiente ricordare che il funtore $H_A\colon \mathcal{K} \to \mathfrak{S}$ dato da

$$\begin{cases} H_A\colon\ B \leadsto \mathrm{Hom}(A,\ B) & (B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}) \\ H_A(u)(\xi) = u\,\xi & (\xi \in H_A(X),\ X,\ Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K},\ u \in \mathrm{Hom}(X,\ Y)) \end{cases}$$

conserva i prodotti finiti e che la struttura ${}_A\Phi$ sopra definita è quella indotta dal funtore H_A .

Si osservi che i funtori H_A , P_S estendono la esponenziazione insiemistica, giacchè ad essa si riducono se $\mathcal{K}$ è la categoria $\mathfrak{S}$ degli insiemi.

Ma di questa esiste una terza generalizzazione, l'esponenziale definito in [1] (p. 304).

Ora è noto che, fissato $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$, il funtore

$$B \leadsto B^A\,,$$

(definito in modo opportuno sui morfismi) è aggiunto destro del funtore operante nel seguente modo sugli oggetti

$$C \leadsto A \times C$$

e in modo naturale sui morfismi.

D'altra parte (cfr. [2]), se un funtore ammette aggiunto sinistro, esso conserva i limiti e quindi i prodotti finiti. Possiamo perciò enunciare il seguente

Corollario 3. *Sia* $\mathcal{K}$ *una categoria e* B *una* Ω*-algebra in* $\mathcal{K}$. *Per ogni* $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ *si può dare a* B^A *in modo naturale una struttura di* Ω*-algebra la quale soddisfa tutte le equazioni soddisfatte in* B.

Osservazione. I risultati precedenti si estendono banalmente a funtori in più variabili (covarianti), giacchè se $(\mathcal{K}_i)_{i\in J}$ è una famiglia di categorie con prodotti finiti, anche il loro prodotto diretto $\mathcal{K}$ ammette prodotti finiti, e precisamente se

$$A_i\,,\ B_i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}_i$$

e

$$\varepsilon_1^{(i)}\colon\ A_i \times B_i \to A_i\,, \qquad \varepsilon_2^{(i)}\colon\ A_i \times B_i \to B_i\,, \qquad (i \in J)$$

sono le proiezioni canoniche, allora un prodotto di $(A_i)_{i\in J}$ per $(B_i)_{i\in J}$ è dato da $\left((A_i \times B_i)_{i\in J}, (\varepsilon_1^{(i)})_{i\in J}, (\varepsilon_2^{(i)})_{i\in J}\right)$.

Sia ora $\mathscr{K}$ una categoria che ammette prodotti. Fissato un insieme $J \neq \emptyset$ è noto che la funzione F: $\mathscr{K}^J \to \mathscr{K}$ che opera sugli oggetti come segue:

$$F\left((A_i)_{i\in J}\right) = \prod_{i\in J} A_i ,$$

e sui morfismi in modo « naturale », è un funtore che conserva i prodotti finiti. Se inoltre tutti gli A_i sono muniti di una struttura di Ω-algebra, la struttura prodotto diretto su $\prod_{i\in J} A_i$ è quella indotta da F. Ritroviamo così il seguente noto risultato (cfr. [4]):

Corollario 4. *Il prodotto diretto di una famiglia di Ω-algebre (in $\mathscr{K}$) soddisfa ogni equazione soddisfatta in ciascuna algebra della famiglia.*

Bibliografia.

[1] W. S. Hatcher, *Foundations of Mathematics*, Saunders Co., Philadelphia 1968.

[2] B. Mitchell, *Theory of Catagories*, Academic Press, New York 1965.

[3] M. Servi, *Questioni di algebra universale in una categoria astratta* (I), Ann. Univ. Ferrara (Nuova Serie, Sez. VII) **13** (1968), 93-116.

[4] M. Servi, *Questioni di algebra universale in una categoria astratta* (II), Ann. Univ. Ferrara (Nuova Serie, Sez. VII) **15** (1970), 57-92.

Sunto.

Si generalizzano alcuni risultati di [4], *mostrando che se $F: \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ è un funtore che conserva i prodotti finiti e A una Ω-algebra (in $\mathscr{K}$), $F(A)$, con la struttura di Ω-algebra (in $\mathscr{L}$) indotta da F, soddisfa tutte le equazioni soddisfatte in A.*

Summary.

A finite product preserving functor is shown to preserve equations.

* * *