Riv. Mat. Univ. Parma (2) **11** (1970), 271-276

SALVATORE ANTONUCCI (*)

# Grafi planari completi e condizioni necessarie di planarità. (**)

Diremo *grafo* una coppia $(X, U)$, ove $X$ è un insieme, i cui elementi saranno detti *vertici* e $U$ è un'insieme di coppie non ordinate di elementi distinti di $X$; gli elementi di $U$ si diranno *spigoli*.

Diremo anche che, in un grafo, un vertice $x$ è *collegato* con un vertice $y$ se lo spigolo $\{x, y\}$ appartiene al grafo.

Dato uno spigolo $\{x, y\}$ di un grafo, gli elementi $x$ e $y$ si diranno *estremi* dello spigolo.

Data una successione $u_1, u_2, \ldots, u_n$ di spigoli di un grafo, supponiamo che, per ogni $i$, tale che $1 < i < n$, un estremo di $u_i$ coincida con un estremo di $u_{i-1}$ e l'altro estremo di $u_i$ coincida con un estremo di $u_{i+1}$; allora la successione $u_1, u_2, \ldots, u_n$ si dirà *catena* del grafo considerato.

Diremo *estremi* di una catena gli estremi di $u_1$ e $u_n$ che non sono estremi anche di $u_2$ e $u_{n-1}$ rispettivamente.

Un grafo si dirà *connesso* se per ogni coppia di vertici esiste una catena avente per estremi i vertici della coppia.

Si dirà *grado* di un vertice di un grafo il numero degli spigoli aventi un estremo in quel vertice.

Dato un grafo $(X, U)$, si dirà *sottografo* di $(X, U)$ un grafo $(X', U')$, ove $X'$ è un sottoinsieme di $X$ e $U'$ è il sottoinsieme di $U$ costituito dagli spigoli di $(X, U)$ che congiungono gli elementi di $X'$.

---

(*) Indirizzo: Via Cilea 56, 80127 Napoli, Italia.
(**) Ricevuto: 15-X-1970.

Dato un grafo $(X, U)$, si dirà *grafo parziale* di $(X, U)$ un grafo $(X, U')$, ove $U'$ è un sottoinsieme di $U$. Ovviamente, si dirà *sottografo parziale* di $(X, U)$ un grafo $(X', U')$ che sia sottografo e grafo parziale di $(X, U)$.

Si dirà che un grafo è *planare* se è possibile rappresentarlo su di un piano in modo tale che i vertici siano punti distinti del piano, gli spigoli curve semplici e in modo che due di tali curve non si incontrino in nessun caso al difuori dei loro estremi. La rappresentazione di un grafo planare su di un piano prende il nome di *grafo planare topologico* ed ovviamente varranno le locuzioni e le definizioni introdotte nel caso generale. Così si diranno vertici i punti, spigoli le curve, ecc. .

Due grafi planari non saranno considerati distinti se sono suscettibili di una stessa rappresentazione su di un piano.

Un grafo planare topologico si dirà *topologicamente completo* se in esso non esistono due vertici, non collegati da uno spigolo, che potrebbero essere collegati da uno spigolo senza alterare la planarità del grafo.

Si verifica che un grafo planare topologicamente completo è connesso.

Si dirà *faccia* di un grafo planare topologico una regione del piano limitata da spigoli, tale che due punti qualsiasi di questa regione possono essere sempre collegati da una curva continua i cui punti, esclusi eventualmente gli estremi, non cadono su spigoli nè coincidono con vertici.

Osserviamo che nell'interno di una faccia possono anche cadere spigoli e vertici. In particolare, una faccia si dirà *infinita* se è una regione non limitata del piano; ovviamente, ogni grafo planare topologico ha una ed una sola faccia infinita.

Una faccia si dirà *triangolare*, *quadrangolare*, ecc. se il numero degli spigoli che limitano la faccia è rispettivamente tre, quattro, ecc. .

È ben noto il

Teorema di EULERO. In un grafo planare topologico connesso, detti $n$, $m$ e $f$ rispettivamente il numero dei vertici, il numero degli spigoli e il numero delle facce, si ha:

$$n - m + f = 2 .$$

Vogliamo ora dimostrare la seguente

Proposizione 1. *Le facce di un grafo planare topologicamente completo sono triangolari e non contengono vertici nell'interno, se il numero dei vertici è maggiore di due. Indicati poi con $n$, $m$, $f$ rispettivamente il numero dei vertici, il numero degli spigoli e il numero delle facce, e con $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i gradi dei vertici,* *nella stessa ipotesi si ha:*

$$m = 3\,(n-2)\,, \tag{1}$$

$$f = 2\,(n-2)\,, \tag{2}$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2m = 6\,(n-2)\,. \tag{3}$$ (1)

Invero, la prima parte della tesi discende dalla completezza del grafo e dalla sua conseguente connessione, nonchè dall'essere $n$ maggiore di due.

Per quanto riguarda la dimostrazione della seconda parte, si considerino i grafi $G_1$ e $G_2$ definiti come segue (a partire dal grafo $G$ dato):

L'insieme dei vertici di $G_1$ è l'insieme delle facce e degli spigoli di $G$; l'insieme degli spigoli di $G_1$ è l'insieme delle coppie $\{x, y\}$, ove $x$ è una faccia di $G$ e $y$ è uno spigolo di $G$ che limita $x$. L'insieme dei vertici di $G_2$ è l'insieme dei vertici e degli spigoli di $G$; l'insieme degli spigoli di $G_2$ è l'insieme delle coppie $\{x, y\}$, ove $x$ è un vertice di $G$ e $y$ è uno spigolo di $G$ che ha un estremo in $x$.

Dalla prima parte della Proposizione segue che il numero degli spigoli di $G_1$ può ottenersi sia moltiplicando per tre il numero delle facce di $G$ sia moltiplicando per due il numero degli spigoli di $G$. Si ha dunque:

$$3f = 2m\,. \tag{1'}$$

Il numero degli spigoli di $G_2$, poi, può ottenersi sia addizionando i gradi dei vertici di $G$ sia moltiplicando per due il numero degli spigoli di $G$, e pertanto si ha:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2m\,. \tag{2'}$$

Successivamente dalla (1′) e dall'applicazione del teorema di EULERO sopra richiamato, si ottiene ancora:

$$n - m + 2m/3 = 2\,, \tag{3'}$$

$$n - 3f/2 + f = 2\,. \tag{4'}$$

---

(1) La prima parte della Proposizione 1 è dimostrata in [2], teorema 1.3.1. Le formule (1) e (2) si trovano anche dimostrate, per altra via, in [2], teoremi 1.3.5 e 4.1.7.

Dalla (3′) e (4′) discendono rispettivamente la (1) e la (2); dalla (1) e dalla (2′) discende la (3).

Per i grafi planari topologicamente completi sussiste ancora la

Proposizione 2. *Se un grafo planare è topologicamente completo, i suoi vertici possono avere tutti lo stesso grado* $a$ *se e solo se* $a$ *è uno dei numeri* 1, 2, 3, 4, 5, *avendosi in corrispondenza per il numero* $n$ *dei vertici i valori* 2, 3, 4, 6, 12.

Salvo il caso banale $a = 1$ di immediata verifica, la Proposizione 2 consegue dalla Proposizione 1 ove si osservi che, nel caso specifico, dalla (3) si ha:

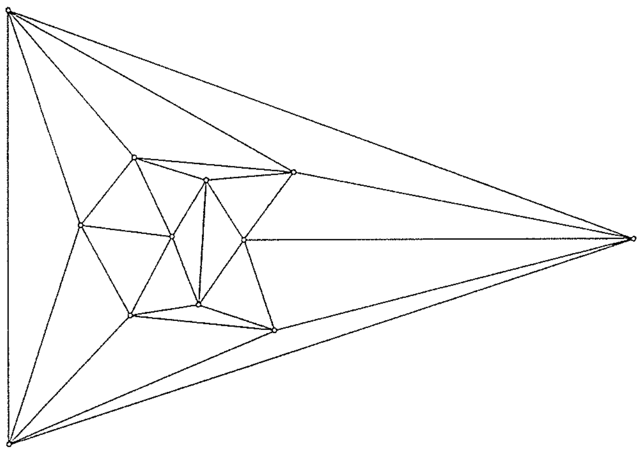
$$na = 6(n-2)\,,$$

ovvero:

$$n = 12/(6-a)\,. \tag{5'}$$

Dalla (5′) segue immediatamente l'asserto.

È poi facile constatare l'esistenza dei grafi planari topologicamente completi i cui vertici hanno tutti lo stesso grado, di cui si è detto sopra. In Figura è, ad esempio, riportato un grafo planare topologicamente completo i cui vertici hanno tutti lo stesso grado 5.



Dimostriamo ora alcune condizioni necessarie di planarità.

Proposizione 3. *Un grafo avente* $n$ *vertici, dei quali* $k$ *collegati ognuno con i rimanenti* $n-k$, *è non planare per* $n$ *maggiore di* $k+2$, *se* $k$ *è maggiore di* 2.

Difatti, per le ipotesi poste, esiste un sottografo parziale del grafo dato che è non planare; più precisamente il grafo, noto nel «problema delle tre case e delle tre fabbriche», avente 6 vertici, dei quali 3 collegati ognuno con i rimanenti 3 ([1], Cap. 21).

Della Proposizione 3 ci possiamo valere per dimostrare la

Proposizione 4. *Se $G = (X, U)$ è un grafo planare avente $n$ vertici e $G' = (X', U')$ è un sottografo di $G$ avente $k$ vertici, detti $a_1, a_2, \ldots, a_k$ i gradi dei vertici di $G'$ in $G$ e $b_1, b_2, \ldots, b_k$ i gradi dei vertici di $G'$ in $G'$, risulta, se $k$ è maggiore di due,*

$$\sum_{i=1}^{k} (a_i - b_i) \leqslant (n-k)(k-1) + 2 \;. \tag{4}$$

Invero, considerato un vertice qualsiasi di $G'$, sia $A_i$, di grado $a_i$ in $G$ e di grado $b_i$ in $G'$, esistono $n - a_i + b_i - k$ elementi di $X - X'$ non collegati con $A_i$. Consideriamo, per ogni $i = 1, 2, \ldots, k$, gli elementi di $X - X'$ che godono di tale proprietà; il loro numero è:

$$\sum_{i=1}^{k} (n - a_i + b_i - k) - r \,,$$

ove $r$ è un numero che dipende dall'eventuale coincidenza di elementi di $X - X'$, non collegati con $A_l$, con elementi di $X - X'$, non collegati con $A_m$, per ogni coppia di numeri $l$, $m$, con $l$ diverso da $m$. Allora il numero

$$n - k - \sum_{i=1}^{k} (n - a_i + b_i - k) + r$$

rappresenta il numero degli elementi di $X - X'$ collegati ognuno con tutti i vertici di $G'$. Ma dalla Proposizione 3 discende che tale numero, aumentato del numero dei vertici di $G'$, deve essere minore o uguale a $k+2$, per la planarità di $G$. Cioè deve aversi:

$$n - k - \sum_{i=1}^{k} (n - a_i + b_i - k) + r + k \leqslant k + 2$$

e quindi

$$\sum_{i=1}^{k} (a_i - b_i) + r \leqslant (n-k)(k-1) + 2 \;. \tag{6'}$$

Dalla (6′) segue immediatamente la (4).

Osserviamo, infine, che se $G$ è non connesso il numero $r$ viene ad assumere valori piuttosto elevati e pertanto la (4) riesce poco restrittiva, come si vede tenendo conto della (6'). Sarà, allora, conveniente applicare la (4) ai sottografi di $G$ che siano connessi .

## Bibliografia.

[1] C. BERGE, *Théorie des Graphes et ses Applications*, Dunod, Paris 1968.

[2] O. ORE, *The four Color Problem*, Academic Press, New York - London 1967.

## Sommario.

*Si stabiliscono, dopo brevi richiami della teoria classica dei grafi, alcune proprietà dei grafi planari topologicamente completi. Si trova, poi, una condizione necessaria di planarità.*

* * *