

FRANCO EUGENI (*)

Alcune proprietà delle trasformazioni puntuali tra piani affini. (**)

I. - Introduzione.

Tra i vari problemi che si presentano nella teoria delle trasformazioni puntuali tra piani proiettivi, affini, conformi, euclidei, non pare siano mai state messe in evidenza quali possano essere le particolarità delle trasformazioni tra piani affini qualora tali piani siano sovrapposti o distinti, ma in situazione particolare.

I più recenti lavori sulle trasformazioni puntuali dal punto di vista affine sono quelli del VILLA ⁽¹⁾ e di G. MARTINI ⁽²⁾, ai quali si rimanda per una più vasta Bibliografia.

Ricordato che in ogni coppia regolare di punti corrispondenti di una trasformazione puntuale, C^r -differenziabile ($r \geq 3$), tra due piani proiettivi, qualora le relative direzioni caratteristiche siano determinate, si hanno ∞^2 trasformazioni quadratiche osculatrici (t.q.o.) ⁽³⁾ ed una infinità maggiore di trasformazioni quadratiche semi-osculatrici (t.q.s.o.) ⁽⁴⁾, il problema che mi propongo è il seguente:

In una coppia regolare e a direzioni caratteristiche non indeterminate di una trasformazione puntuale di un piano affine \mathcal{A} in un piano affine $\bar{\mathcal{A}}$, paralleli o

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica Applicata, Facoltà di Ingegneria, L'Aquila, Italia.

(**) Ricevuto: 21-XII-1970.

⁽¹⁾ M. VILLA [7]. Con i simboli [1], [2], ... sono indicate le opere consultate e citate nella Bibliografia alla fine del presente lavoro.

⁽²⁾ G. MARTINI [3].

⁽³⁾ M. VILLA [10].

⁽⁴⁾ B. SEGRE [5], F. SPERANZA [6].

sovrapposti, esistono delle t.q.o., o almeno t.q.s.o., aventi negli ampliamenti proiettivi di \mathcal{A} e di $\bar{\mathcal{A}}$ la retta impropria di punti uniti?

La risposta è come vedremo *in generale negativa*, perchè ciò accada la coppia deve essere particolare. Si determinano allora delle condizioni necessarie e sufficienti a che ciò accada e si dimostra che una volta verificate tali condizioni si ha un'unica t.q. soddisfacente le condizioni richieste.

Si procede con tecniche analoghe ad altre usate in lavori tra piani proiettivi ⁽⁵⁾ e conformi ⁽⁶⁾.

2. - Generalità.

Sia T una trasformazione puntuale C^r -differenziabile di un piano affine \mathcal{A} in un piano affine $\bar{\mathcal{A}}$ entrambi reali, eventualmente sovrapposti, rappresentabili localmente con una applicazione del tipo:

$$(1) \quad \begin{cases} \bar{x}_j = f(x, y) \\ \bar{y} = g(x, y), \end{cases}$$

dove: f e g sono funzioni di classe C^r definite in un aperto di \mathcal{A} e a valori in un aperto di $\bar{\mathcal{A}}$; ed (x, y) , (\bar{x}, \bar{y}) sono coordinate affini di punti corrispondenti.

Se A, \bar{A} è una coppia regolare di punti corrispondenti, la trasformazione T dovrà essere regolare nella coppia A, \bar{A} , dovrà cioè essere:

$$(2) \quad J \begin{pmatrix} f & g \\ x & y \end{pmatrix} \neq 0.$$

Osservato che per ogni coppia A, \bar{A} è sempre possibile assumere il riferimento in maniera che sia $A(0, 0)$ e $\bar{A}(h, 0)$ con $h = 0$ se i piani sono distinti o sovrapposti con $A = \bar{A}$, ed $h = 1$ se i piani sono sovrapposti con $A \neq \bar{A}$; applicando alle (1) le formule di TAYLOR si scrive:

$$(3) \quad \begin{cases} \bar{x} = h + \alpha x + \beta y + \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \xi^i \xi^j + [3] \\ \bar{y} = \gamma x + \delta y + \sum_{i,j=1}^2 b_{ij} \xi^i \xi^j + [3]. \end{cases}$$

Si è posto $\xi^1 = x$, $\xi^2 = y$ e [3] sono i resti delle formule di TAYLOR.

⁽⁵⁾ L. MURACCHINI [4].

⁽⁶⁾ F. EUGENI [2].

Chiameremo, come d'uso, proprietà dell'intorno d'ordine r tutte le proprietà possedute dalla classe di trasformazioni aventi lo stesso sviluppo della T nella coppia A, \bar{A} fino all'ordine r , interpretando, qualora occorra, gli enti algebrici definibili per tali classi nei complessificati degli spazi che intervengono.

Ogni omografia tangente a T in A, \bar{A} induce tra i fasci di rette uscenti da A ed \bar{A} una proiettività \mathcal{F} . Se $\varrho, \bar{\varrho}$ sono parametri direttori nei due fasci, l'equazione di \mathcal{F} risulta essere:

$$(4) \quad \beta \varrho \bar{\varrho} + \alpha \bar{\varrho} - \delta \varrho - \gamma = 0 .$$

Se i piani $\mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}}$ sono sovrapposti e i punti A, \bar{A} sono distinti, si può osservare che, per il Teorema di STEINER, \mathcal{F} individua la conica Γ di equazione:

$$(5) \quad \gamma x^2 + (\delta - \alpha)xy - \beta y^2 - \gamma x - \delta y = 0 ,$$

che chiameremo conica Γ relativa all'intorno del 1° ordine. Γ risulta essere degenerare se e solo se \mathcal{F} è una prospettività, nel qual caso la coppia A, \bar{A} si dice *prospettiva*. Ciò si verifica se e solo se $\gamma = 0$.

In tal caso l'asse di prospettività è la retta di equazione

$$(6) \quad (\delta - \alpha)x - \beta y - \delta = 0 .$$

Nel caso in cui la coppia A, \bar{A} è unita, si può individuare ugualmente una conica degenerare costituita nel complessificato di \mathcal{A} dalle rette doppie della proiettività che hanno equazione complessiva

$$(7) \quad \gamma x^2 + (\delta - \alpha)xy - \beta y^2 = 0 ,$$

che chiameremo ancora conica Γ relativa all'intorno del 1° ordine. Nell'intorno del 2° ordine di T nella coppia A, \bar{A} intervengono le direzioni caratteristiche di equazioni complessive:

$$(8) \quad \left| \begin{array}{c} \alpha x + \beta y \quad \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \xi^i \xi^j \\ \gamma x + \delta y \quad \sum_{i,j=1}^2 b_{ij} \xi^i \xi^j \end{array} \right| = 0 .$$

Escluderemo che nella coppia A, \bar{A} le direzioni caratteristiche siano indeterminate, perchè in tale caso non esistono né t.q.o. né t.q.s.o.. Per scrivere le t.q.s.o. (?) si adatterà la tecnica usata da F. SPERANZA (?) mediante la varietà di C. SEGRE.

(?) M. VILLA [8] e F. SPERANZA [6].

I casi che verranno distinti sono i seguenti:

- I) I piani \mathcal{A} ed $\bar{\mathcal{A}}$ sono sovrapposti.
- II) I piani \mathcal{A} ed $\bar{\mathcal{A}}$ sono distinti e paralleli.

Si presentano per ciascuno di tali casi dei sottocasi che verranno distinti come segue:

Caso I (piani sovrapposti).

a) $A \neq \bar{A}$, P è una *prospettività* ($h = 1$, $\gamma = 0$).

a₁) L'asse di prospettiva coincide con la retta impropria:

$$\alpha = \delta \neq 0, \quad \beta = 0.$$

a₂) L'asse è incidente alla retta $A\bar{A}$:

$$0 \neq \alpha \neq \delta \neq 0.$$

a₃) L'asse è parallelo alla retta $A\bar{A}$:

$$\alpha = \delta \neq 0, \quad \beta \neq 0.$$

b) $A = \bar{A}$ ($h = 0$) (*Caso del punto unito*).

b₁) \mathcal{F} non è parabolica.

b₂) \mathcal{F} è parabolica non degenere.

b₃) \mathcal{F} è degenere. La coppia A, \bar{A} non è regolare.

c) $A \neq \bar{A}$ e \mathcal{F} non è una *prospettività* ($h = 1$, $\gamma \neq 0$).

In tale caso la conica F relativa all'intorno del 1° ordine è non degenere.

Caso II (piani distinti e paralleli).

d₁) Le coppie di rette corrispondenti in \mathcal{F} sono coppie di rette parallele.

d₂) Esistono in \mathcal{F} due coppie distinte di rette corrispondenti e parallele (eventualmente complesse).

d₃) Esiste una sola coppia di rette corrispondenti in \mathcal{F} e parallele.

3. - Caso a_1 .

Risulta:

$$\alpha = \delta \neq 0, \quad \beta = \gamma = 0.$$

In tale caso, imponendo che le t.q.s.o. abbiano la retta impropria di punti uniti, le direzioni caratteristiche risultano indeterminate.

Perciò nel caso a_1 non vi sono t.q.s.o. (e quindi neanche t.q.o.) con retta impropria di punti uniti. Infatti le t.q.s.o. hanno le equazioni⁽⁸⁾:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a_{11} + m\alpha)x\bar{x} + (2a_{12} + n\alpha)y\bar{x} - \alpha\bar{x} + a_{22}y\bar{y} + \\ \quad + (\alpha^2 - a_{11} - m\alpha)x - 2\left(a_{12} + \frac{n}{2}\alpha\right)y + \alpha + \lambda(x\bar{y} - y\bar{x} + y) = 0 \\ b_{11}x\bar{x} + 2\left(b_{12} + \frac{m}{2}\alpha\right)y\bar{x} + (b_{22} + n\alpha)y\bar{y} + \alpha\bar{y} + \\ \quad - b_{11}x - (\alpha^2 - b_{12} - m\alpha)y + \mu(x\bar{y} - \bar{x}y + y) = 0, \end{array} \right.$$

essendo m, n, λ, μ parametri. Le condizioni a che la retta impropria sia di punti uniti sono:

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{22} = b_{11} = 0 \\ a_{11} - 2b_{12} = b_{22} - 2a_{12} = 0. \end{array} \right.$$

Le (II) sono proprio le condizioni perchè le direzioni caratteristiche siano indeterminate.

4. - Caso a_2 .

In tale caso l'asse della prospettività \mathcal{F} è incidente alla $A\bar{A}$. Esiste una sola coppia di rette corrispondenti in \mathcal{F} e parallele.

È già $\gamma = 0, 0 \neq \alpha \neq \delta \neq 0$. Assumiamo come retta $x = 0$ la retta per A parallela all'asse (e quindi anche alla propria corrispondente in \mathcal{F}). Ciò comporta $\beta = 0$.

⁽⁸⁾ F. SPERANZA [6].

La trasformazione T nell'intorno del 2° ordine si scrive:

$$\begin{cases} \bar{x} = 1 + \alpha x + \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \xi^i \xi^j + [3] \\ \bar{y} = \delta y + \sum_{i,j=1}^2 b_{ij} \xi^i \xi^j + [3]. \end{cases}$$

Le t.q.s.o. in tale caso hanno le equazioni:

$$(9_1) \quad \begin{cases} \delta(a_{11} + m\alpha)x(\bar{x} - 1) + \left(a_{12} + \frac{n}{2}\alpha\right)[\alpha x \bar{y} + \delta(\bar{x} - 1)y] + \\ \quad + \alpha a_{22}y\bar{y} + \alpha\delta(\alpha x - \bar{x} + 1) + \lambda[\alpha x \bar{y} + \delta(\bar{x} - 1)y] = 0 \\ \delta b_{11}x(\bar{x} - 1) + \left(b_{12} + \frac{m}{2}\delta\right)[\alpha x \bar{y} + \delta(\bar{x} - 1)y] + \\ \quad + \alpha(b_{22} + n\delta)y\bar{y} + \alpha\delta(\delta y - \bar{y}) + \mu[\alpha x \bar{y} + \delta y(\bar{x} - 1)] = 0; \end{cases}$$

per $x = \bar{x}$ ed $y = \bar{y}$ ho due coniche (i cui punti comuni sono i punti uniti della t.q.) che risultano degeneri con la retta impropria componente comune se e solo se valgono le condizioni:

$$(9_2) \quad \begin{cases} a_{11} + m\alpha = b_{22} + n\delta = 0 \\ a_{22} = b_{11} = 0 \\ \left(a_{12} + \frac{n}{2}\alpha\right)(\alpha + \delta) + \lambda(\alpha - \delta) = 0 \\ \left(b_{12} + \frac{m}{2}\delta\right)(\alpha + \delta) + \mu(\alpha - \delta) = 0. \end{cases}$$

Essendo $\alpha \neq \delta$ dalle (9₂) si ricavano i parametri λ, μ, m, n , e si hanno inoltre le condizioni $a_{22} = b_{11} = 0$.

Quindi si ha una sola t.q.s.o. purchè la coppia A, \bar{A} verifichi le suddette condizioni. Esse sono di facile interpretazione geometrica. Infatti, se e solo se $a_{22} = b_{11} = 0$, le rette $x = 0, y = 0$, e cioè la $A\bar{A}$ e la retta parallela alla sua corrispondente in \mathcal{F} , sono caratteristiche. $A\bar{A}$ è caratteristica tanto come retta per A che come retta per \bar{A} .

Vediamo ora le condizioni a che tale t.q.s.o. sia anche osculatrice⁽⁹⁾.

⁽⁹⁾ F. SPERANZA [6].

Le (9₂) per $m = n = 0$, oltre a fornire λ e μ e la condizione sopra citata, forniscono le ulteriori condizioni $a_{11} = b_{22} = 0$.

Mostriamo che *tali ulteriori condizioni sono verificate se e solo se le proiettività caratteristiche* ⁽¹⁰⁾, *indotte dalla trasformazione T sulle rette caratteristiche, sono delle similitudini.*

Tra la retta caratteristica $x = 0$ e la curva corrispondente è indotta la corrispondenza di equazione

$$\bar{y} = \delta y + b_{22}y^2 + [3],$$

osculata ⁽¹⁰⁾ nella coppia A, \bar{A} della proiettività caratteristica di equazione

$$\bar{y} = \delta^2 y / (-b_{22} + \delta).$$

Analogamente sulle rette $y = 0, \bar{y} = 0$ è individuata la proiettività

$$\bar{x} - 1 = \alpha^2 x / (-a_{11}x + \alpha).$$

La condizione $a_{11} = b_{22} = 0$ è quindi condizione necessaria e sufficiente a che tali proiettività caratteristiche siano delle similitudini.

5. - Caso a₃).

In tale caso l'asse della prospettività \mathcal{F} è parallelo alla $A\bar{A}$. Poniamo, come in [5] (pag. 194),

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11} + m\alpha, & 2a'_{12} &= 2a_{12} + m\beta + n\alpha, \\ a'_{22} &= a_{22} + n\beta, & b'_{11} &= b_{11}, \\ 2b'_{12} &= 2b_{12} + m\alpha, & b'_{22} &= b_{22} + n\alpha. \end{aligned}$$

⁽¹⁰⁾ M. VILLA [10].

Le t.q.s.o. la T in (A, \bar{A}) sono:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} a'_{11} \alpha^2 x \bar{x} - [a'_{11} \alpha \beta - 2 a'_{12} \alpha^2] y \bar{x} - \alpha^3 \bar{x} + \alpha^2 (\alpha^2 - a'_{11}) x + \\ \quad + [a'_{22} \alpha^2 - 2 a'_{12} \alpha \beta + a'_{11} \beta^2] y \bar{y} + \alpha^3 + \\ \quad + [\alpha^3 \beta + a'_{11} \alpha \beta - 2 a'_{12} \alpha^2] y + \lambda [-\alpha y \bar{x} + \alpha x \bar{y} + \beta y \bar{y} + \alpha y] = 0 \\ \\ - b'_{11} \alpha^2 x \bar{x} + [-2 \alpha^2 b'_{12} + b'_{11} \alpha \beta] y \bar{x} - [\alpha^2 b'_{22} - 2 b'_{12} \alpha \beta + b'_{11} \beta^2] y \bar{y} + \\ \quad + \alpha^3 \bar{y} - b'_{11} \alpha^2 x - [-2 \alpha^2 b'_{12} + b'_{11} \alpha \beta + \alpha^4] y + \\ \quad + \mu [-\alpha y \bar{x} + \alpha x \bar{y} + \beta y \bar{y} + \alpha y] = 0. \end{array} \right.$$

Perchè tale trasformazione quadratica abbia la retta impropria unita, le due coniche ottenute da (10) per $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ devono essere degeneri con la retta impropria componente comune. Le condizioni a che ciò accada sono:

$$a'_{11} = a'_{12} = b'_{11} = b'_{12} = 0, \quad a'_{22} \alpha^2 + \beta \lambda = -\alpha^2 b'_{22} + \beta \mu = 0,$$

e cioè:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{ll} a_{11} + m \alpha = 0, & b_{22} + n \alpha + \mu \beta = 0, \\ a_{12} + \frac{m}{2} \beta + \frac{n}{2} = 0, & b_{11} = 0, \\ a_{22} + n \beta + \beta \lambda = 0, & a_{11} = 2 b_{12}. \end{array} \right.$$

Essendo $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, quattro delle relazioni forniscono m , n , λ , μ e cioè l'unicità della t.q.s.o., e le altre due relazioni dicono che la retta $y = 0$ è retta caratteristica doppia. Tale retta, come si sa, è la congiungente A, \bar{A} . È evidente che vale anche il viceversa. Se si vuole che la t.q.s.o. sia anche osculatrice, devono valere le (11) per $m = n = 0$, onde si hanno le condizioni sulla coppia (A, \bar{A}) :

$$a_{11} = a_{12} = b_{11} = b_{12} = 0.$$

Occorre interpretare geometricamente le condizioni $a_{11} = 0$ e $a_{12} = 0$. (Se $a_{11} = 0$, essendo già $a_{11} = 2b_{12}$, è pure $b_{12} = 0$.) La $a_{11} = 0$ è condizione necessaria e sufficiente a che la proiettività caratteristica relativa a $x = 0$, $\bar{x} = 0$ sia una similitudine.

Considero ora la linearizzante di T (cfr. [6], [9], [1]) e della omografia tangente K , cioè la corrispondenza:

$$\begin{cases} \bar{\xi} = 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 \\ \bar{\eta} = b_{22}\eta^2, \end{cases}$$

essendo ξ, η parametri di direzione e $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ le direzioni corrispondenti. Onde si osserva che se e solo se $a_{12} = 0$ la linearizzante a una retta generica per A fa corrispondere una retta fissa per \bar{A} .

Viceversa, se impongo che la proiettività caratteristica sulla retta doppia sia una similitudine e che la linearizzazione faccia corrispondere ad una retta generica per A una retta fissa per \bar{A} , si hanno le condizioni a che la t.q.s.o. sia osculatrice.

6. - Risultati finali del Caso a).

Si ha:

Teorema. Una coppia (A, \bar{A}) prospettica, regolare, a direzioni caratteristiche non indeterminate, di una trasformazione puntuale di un piano affine A in \bar{A} ammette una t.q.s.o. con una retta impropria di punti uniti, se e solo se vale una delle seguenti due condizioni;

(I) *La retta $A\bar{A}$ e la retta parallela alla sua corrispondente, nella proiettività dell'intorno del 1° ordine di T , sono caratteristiche.*

(II) *La retta $A\bar{A}$ è caratteristica doppia.*

In entrambi i casi la t.q.s.o. è unica.

La t.q.s.o. è anche osculatrice nel caso (I) se e solo se le proiettività caratteristiche indotte sulle rette caratteristiche sono delle similitudini, nel caso (II) se e solo se la proiettività caratteristica indotta sulla retta caratteristica è una similitudine e la linearizzante relativa a T e K ad una retta generica fa corrispondere una retta fissa.

Va escluso il caso in cui in \mathcal{F} l'asse sia la retta impropria (le direzioni caratteristiche sono allora indeterminate).

7. - Caso c).

In tale caso la coppia A, \bar{A} non è né unita né prospettica in T , cioè (vedasi n. 2) $h = 1, \gamma \neq 0$.

Osserviamo che alla $A\bar{A}$ corrispondono in \mathcal{F} le tangenti alla conica Γ in A ed \bar{A} .

Assumiamo la tangente in A a Γ come retta $x=0$: ciò implica $\delta=0$. Inoltre sarà

$$(12) \quad (\alpha, \alpha^2 + \beta\gamma) \neq (0, 0)$$

($\alpha=0$ dice che $A\bar{A}$ è un diametro, ed $\alpha^2 + \beta\gamma=0$ si verifica se Γ è una parabola: le due condizioni non possono ovviamente verificarsi insieme). Sotto le condizioni (12) le t.q.s.o. sono:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma b'_{22} y \bar{x} + \beta b'_{11} x \bar{y} + (2\beta b'_{12} - \alpha b'_{22}) y \bar{y} - \beta \gamma \bar{y} + \\ \quad + \gamma^2 \beta x - \gamma b'_{22} y + \lambda [-\gamma x \bar{x} + \alpha x \bar{y} + \beta y \bar{y} + \gamma x] = 0 \\ -\gamma a'_{22} y \bar{x} + \gamma \beta \bar{x} - \beta a'_{11} x \bar{y} + (\alpha a'_{22} - 2\beta a'_{12}) y \bar{y} + \\ -\alpha \beta \gamma x + \gamma (a'_{22} - \beta^2) y - \gamma \beta - \mu [-\gamma x \bar{x} + \alpha x \bar{y} + \beta y \bar{y} + \gamma x] = 0, \end{array} \right.$$

avendo a'_{ij} , b'_{ij} il significato di [5] (pag. 194) ed essendo al solito λ , μ , m , n parametri.

Affinchè la retta impropria sia unita, dalle (13) per $x=\bar{x}$ ed $y=\bar{y}$ si devono avere due coniche aventi la retta impropria come componente comune, si hanno allora le condizioni:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \mu = 0 \\ m = -(\gamma b_{22} + \beta b_{11})/(\beta\gamma) \\ n = (\alpha b_{22} - 2\beta b_{11})/(\beta\gamma), \end{array} \right.$$

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\beta\gamma a_{11} - \gamma^2 a_{22} + 2\beta\gamma b_{12} + \alpha\beta b_{11} = 0 \\ \beta^2 b_{11} + \beta\gamma b_{22} - 2\beta\gamma a_{12} + \alpha\gamma a_{22} = 0. \end{array} \right.$$

Le (14) assicurano l'unicità delle t.q.s.o. sotto le condizioni (15) da interpretare geometricamente.

Mostriamo che le (15) equivalgono all'essere i punti impropri della conica direzioni caratteristiche per T nella coppia A, \bar{A} ; vale a dire: due direzioni caratteristiche sono parallele alle direzioni corrispondenti.

I punti impropri della conica Γ sono quelli delle rette:

$$(16) \quad \gamma x^2 - \alpha x y - \beta y^2 = 0.$$

Le direzioni caratteristiche della (8) del n. 3, con le semplificazioni adottate in questo numero, sono:

$$(17) \quad (\alpha b_{11} - \gamma a_{11})x^3 + (2b_{12}\alpha + \beta b_{11} - 2a_{12}\gamma)x^2y + \\ + (\alpha b_{22} + 2b_{12}\beta - a_{22}\gamma)xy^2 + \beta b_{22}y^3 = 0.$$

Moltiplicando la (16) per $Lx + My$, essendo L e M coefficienti indeterminati, ed identificando con la (17), si ottengono le relazioni:

$$(18) \quad \begin{cases} L\gamma = \alpha b_{11} - \gamma a_{11} \\ M\gamma - \alpha L = 2b_{12}\alpha + \beta b_{11} - 2a_{12}\gamma \\ -(\beta L + \alpha M) = b_{22}\alpha + 2b_{12}\beta - a_{22}\gamma \\ M = -b_{22}. \end{cases}$$

Eliminando L ed M da queste relazioni, ottengo due relazioni equivalenti alle condizioni (15). Allora se le direzioni (16) sono contenute nella (17) valgono le condizioni (15) e viceversa⁽¹¹⁾.

Vediamo ora se tale t.q.s.o. può essere osculatrice. Affinchè ciò accada devono essere valide le (14) per $m = n = 0$, si hanno allora le condizioni ulteriori:

$$(19) \quad \gamma b_{22} + \beta b_{11} = 0, \quad \alpha b_{22} - 2\beta b_{12} = 0.$$

Dimostriamo che *tali condizioni valgono se e solo se le proiettività caratteristiche sulle rette caratteristiche contenenti i punti impropri di Γ sono delle similitudini.*

Considero le direzioni delle rette:

$$y = \varrho x, \quad y = \bar{\varrho}(x - 1).$$

Tali direzioni sono caratteristiche e corrispondenti in \mathcal{F} se e solo se ϱ è soluzione della

$$(20) \quad \gamma - \alpha\varrho - \beta\varrho^2 = 0.$$

⁽¹¹⁾ Si noti che sia la condizione $\alpha = 0$, che $\alpha^2 + 4\beta\gamma = 0$, non implicano restrizioni nel ragionamento.

La T subordina fra tali rette, e le curve corrispondenti, la corrispondenza:

$$\bar{y} = \gamma x + (b_{11} + 2b_{12}\varrho + b_{22}\varrho^2)x^2 + [3],$$

che è approssimata fino al 2° ordine dalle proiettività caratteristiche, le quali sono delle similitudini se e solo se ⁽¹²⁾:

$$(21) \quad b_{11} + 2b_{12}\varrho + b_{22}\varrho^2 = 0.$$

Allora i due valori di ϱ soddisfacenti alle (20) e (21) devono essere gli stessi, cioè i polinomi devono essere proporzionali: ciò implica proprio le (19). Viceversa, se valgono le condizioni, i polinomi sono proporzionali e le proiettività caratteristiche sono delle similitudini.

8. - Riassunto del caso c).

Teorema. *Data una trasformazione puntuale T d'un piano in sè, se A, \bar{A} è una coppia regolare a direzioni caratteristiche non indeterminate e non prospettica, si ha:*

Condizione necessaria e sufficiente a che esista una t.q.s.o. con retta impropria di punti uniti è che i punti impropri della conica Γ coincidano con due direzioni caratteristiche di T (coincidenti nel caso che Γ sia una parabola); vale a dire: due direzioni caratteristiche sono parallele alle direzioni corrispondenti. La t.q.s.o. richiesta è in tal caso unica. Inoltre:

Condizione necessaria e sufficiente a che la t.q.s.o. del teorema precedente sia osculatrice è che le proiettività caratteristiche indotte da T sulle rette caratteristiche contenenti i punti impropri di Γ siano delle similitudini.

9. - Caso b_1).

Le (6) del n. 3 si scrivono:

$$\begin{cases} \bar{x} = \alpha x + \beta y + [2] \\ \bar{y} = \gamma x + \delta y + [2]. \end{cases}$$

Se \mathcal{F} è una proiettività ellittica o iperbolica o identica, conviene assumere come rette $x=0$, $y=0$ due rette doppie della proiettività (eventualmente

⁽¹²⁾ M. VILLA [10].

con opportuni cambiamenti di coordinate nel complessificato). Ciò comporta:

$$\beta = \gamma = 0 .$$

Allora le t.q.s.o. sono ⁽¹³⁾:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta (a_{11} + m \alpha) x \bar{x} + \left(a_{12} + \frac{n}{2} \alpha \right) (\alpha x \bar{y} + \delta \bar{x} y) + \\ \qquad \qquad \qquad + \alpha a_{22} y \bar{y} + \alpha \delta (\alpha x - \bar{x}) + \lambda (\alpha x \bar{y} - \delta \bar{x} y) = 0 \\ \delta b_{11} x \bar{x} + \left(b_{12} + \frac{m}{2} \delta \right) (\alpha x \bar{y} + \delta \bar{x} y) + \alpha (b_{22} + n \delta) y \bar{y} + \\ \qquad \qquad \qquad + \alpha \delta (\delta y - \bar{y}) + \mu (\alpha x \bar{y} - \delta \bar{x} y) = 0 . \end{array} \right.$$

Per $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ le due coniche hanno la retta impropria componente comune qualora valgono le condizioni seguenti:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha a_{22} = \delta b_{11} = 0 \\ \delta (a_{11} + m \alpha) = \alpha (b_{22} + n \delta) = 0 \\ (\alpha + \delta) \left(a_{12} + \frac{n}{2} \alpha \right) + \lambda (\alpha - \delta) = 0 \\ (\alpha + \delta) \left(b_{12} + \frac{m}{2} \delta \right) + \mu (\alpha - \delta) = 0 . \end{array} \right.$$

Mostriamo che nella (22) non può essere $\alpha = \delta$ ⁽¹⁴⁾. Infatti per $\alpha = \delta$ ho:

$$a_{22} = b_{11} = 0, \quad a_{11} + m \alpha = b_{22} + n \alpha = 0, \quad a_{12} + \frac{n}{2} \alpha = b_{12} + \frac{m}{2} \alpha = 0 ,$$

da cui ricavo m ed n e le condizioni:

$$b_{11} = a_{22} = 2 b_{12} - a_{11} = b_{22} - 2 a_{12} = 0 ,$$

che sono le condizioni di indeterminazione delle direzioni caratteristiche.

⁽¹³⁾ F. SPERANZA [6] (pag. 196) (dove si è posto $a = \alpha$, $b = \beta$).

⁽¹⁴⁾ $\alpha = \delta$ si verifica se e solo se \mathfrak{F} è l'identità.

Il caso della \mathcal{F} identica va quindi escluso; se invece $\alpha \neq \delta$, allora determino λ , μ , m , n e le condizioni $a_{22} = b_{11} = 0$; tali condizioni dicono che le rette doppie in \mathcal{F} , cioè le rette $x = 0$, $y = 0$ sono rette caratteristiche.

Quindi, *ho una t.q.s.o. con retta impropria di punti uniti se e solo se le rette doppie di \mathcal{F} sono caratteristiche: essa è unica.*

Tale trasformazione quadratica risulta osculatrice se le (22) valgono per $m = n = 0$; ciò comporta:

$$(22)' \quad \begin{cases} a_{22} = b_{11} = a_{11} = b_{22} = 0 \\ (\alpha + \delta) a_{12} + \lambda(\alpha - \delta) = 0 \\ (\alpha + \delta) b_{12} + \mu(\alpha - \delta) = 0. \end{cases}$$

Le ultime due relazioni assicurano l'unicità della t.q.o. richiesta. Le ulteriori condizioni $a_{11} = 0$, $b_{22} = 0$, procedendo come al n. 5, permettono di affermare che le proiettività caratteristiche indotte sulle rette doppie per \mathcal{F} sono delle similitudini e viceversa.

Quindi, *ho una sola t.q.o. se e solo se le proiettività caratteristiche sulle rette doppie della proiettività \mathcal{F} sono delle similitudini.*

10. - Caso b_2 .

Sia ora \mathcal{F} parabolica: assumiamo l'unica retta unita come retta $y = 0$, allora la T si può scrivere

$$\begin{cases} \bar{x} = \alpha(x + y) + \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \xi^i \xi^j + [3] \\ \bar{y} = \alpha y + \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \xi^i \xi^j + [3], \end{cases}$$

ed usando le equazioni delle t.q.s.o. già trovate nel lavoro citato ⁽¹⁵⁾, a che la retta impropria di tali trasformazioni sia unita, si hanno immediatamente le condizioni:

$$(23) \quad \begin{cases} a_{11} + m = a_{22} + n - \lambda\alpha = 0 \\ 2a_{12} - a_{11} + n = b_{22} + n - \mu\alpha = 0 \\ b_{11} = 2b_{12} - a_{11} = 0. \end{cases}$$

⁽¹⁵⁾ F. SPERANZA [6] (pag. 199).

Le (23) dicono che esiste una t.q.s.o. se e solo se valgono le ultime due condizioni delle (23), mentre le prime quattro equazioni determinano univocamente λ , μ , m , n e quindi la t.q.s.o.. È immediato che le due condizioni

$$b_{11} = 0, \quad 2b_{12} - a_{11} = 0$$

valgono se e solo se la retta $y=0$, cioè la retta unita nella proiettività parabolica \mathcal{F} , è retta caratteristica doppia per la trasformazione T . Se si vuole che la t.q.s.o. sia anche osculatrice, le (23) devono valere per $m=n=0$, e ciò comporta:

$$(24) \quad a_{11} = a_{12} = b_{11} = b_{12} = 0.$$

Se le (24) sono verificate si ha un'unica trasformazione quadratica osculatrice. Le (24), procedendo come alla fine del n. 6, dicono che per la T la proiettività caratteristica relativa alla retta unita in \mathcal{F} (che è caratteristica) risulta una similitudine ed inoltre che la linearizzante di ČECH della trasformazione T e della affinità tangente, a una retta generica fa corrispondere una retta fissa.

Inoltre se nell'intorno del punto vangono tali condizioni geometriche, allora valgono le (24).

11. - Risultati finali del Caso b).

Teorema. *Una coppia A, \bar{A} regolare, a direzioni caratteristiche non indeterminate ed unita, di una trasformazione puntuale di un piano affine in sè ammette una t.q.s.o. con retta impropria di punti uniti se e solo se le rette unite, nella proiettività \mathcal{F} relativa all'intorno del 1° ordine (supposta non degenera), sono caratteristiche per T (caratteristiche doppie se è parabolica); in tal caso la t.q.s.o. è anche unica.*

Tale t.q.s.o. è anche osculatrice se e solo se le proiettività caratteristiche, indotte da T sulle rette caratteristiche considerate, sono similitudini e se inoltre, nel caso di \mathcal{F} parabolica, la linearizzante di Čech relativa a T ed alla affinità tangente K è una mappa costante. Va escluso il caso in cui \mathcal{F} è l'identità, nel quale caso le direzioni caratteristiche sono indeterminate.

12. - Caso II.

Nel Caso II è ancora fondamentale il comportamento della proiettività \mathcal{F} . Assunti sui due piani le origini corrispondenti in T , si ha nelle (3) $h=0$.

Trattiamo separatamente i sottocasi:

Nel *sottocaso* d_1) risulta ovviamente

$$\beta = \gamma = 0, \quad \alpha = \delta.$$

Allora le equazioni della T si scrivono, come nel Caso a_1) (n. 3), sostituendo $\bar{x} + 1$ al posto di \bar{x} nelle (I) del n. 3; le condizioni a che le t.q.s.o. abbiano la retta impropria di punti uniti sono ancora le (II) del n. 3, onde in tale caso non vi è né t.q.s.o. né t.q.o. del tipo richiesto.

Nel *sottocaso* d_2) si ha che, prendendo gli assi di riferimenti affini nelle rette parallele e corrispondenti in \mathcal{F} , risulta $\beta = \gamma = 0$. Le t.q.s.o. in tale caso si presentano identiche alle (I) del n. 9 e le condizioni richieste portano proprio alle (22) dello stesso n. 9. Poichè è ancora da escludersi $\alpha = \delta$ per lo stesso motivo del n. 9, dalle (22) si ricava una sola t.q.s.o. con la condizione $a_{22} = b_{11} = 0$ che, nel nostro caso, sono valide se e solo se le rette corrispondenti in \mathcal{F} e parallele sono rette caratteristiche per T in (A, \bar{A}) .

Se si vuole che tale t.q.s.o. trovata sia anche osculatrice, occorre e basta, come è immediato, che le proiettività caratteristiche indotte sulle rette caratteristiche considerate siano similitudini.

Nel *sottocaso* d_3), assunte come rette $y = 0, \bar{y} = 0$ l'unica coppia di rette corrispondenti e parallele in \mathcal{F} , si ha:

$$\alpha = \delta \neq 0, \quad \gamma = 0, \quad \beta \neq 0,$$

condizioni che permettono di scrivere le (3) esattamente come nel caso a_3) (n. 5).

In analogia completa al n. 5 si ricava che esiste una ed una sola t.q.s.o. del tipo richiesto, se la coppia di rette corrispondenti in \mathcal{F} e parallele sono rette caratteristiche doppie per T in (A, \bar{A}) . La t.q.s.o. è anche osculatrice se e solo se la proiettività caratteristica indotta sulla retta caratteristica doppia è una similitudine e se la linearizzante di T e della omografia tangente a T in (A, \bar{A}) ad una retta generica fa corrispondere una retta fissa.

13. - Conclusioni finali.

I risultati parziali trovati (nn. 6, 8, 11, 12) si possono riassumere in altra forma come segue.

Sia T una trasformazione puntuale tra due piani affini *coincidenti* o *paralleli* e sia (A, \bar{A}) una coppia di punti corrispondenti che sia regolare e a direzioni caratteristiche non indeterminate (eventualmente appartenenti al complessificato del piano affine). In queste ipotesi si ha:

Teorema I. *Condizione necessaria e sufficiente a che nella coppia A, \bar{A} esista una t.q.s.o., la T , avente la retta impropria di punti uniti, è che due direzioni caratteristiche siano parallele alle direzioni corrispondenti. La t.q.s.o. in tal caso è unica.*

Si ha inoltre:

Teorema II. *Se le due direzioni caratteristiche del Teor. I sono distinte, allora condizione necessaria e sufficiente a che la t.q.s.o. del Teor. I sia osculatrice è che le due proiettività caratteristiche indotte da T sulle due rette caratteristiche siano similitudini.*

La condizione espressa dal Teorema II non è più sufficiente se le direzioni coincidono, ma solo necessariamente. Il Teorema II in tale caso diviene:

Teorema III. *Se le due direzioni caratteristiche del Teor. I coincidono, allora condizione necessaria e sufficiente a che la t.q.s.o. del Teor. I sia osculatrice è che valga la condizione del Teor. II e che la linearizzante ⁽¹⁶⁾ di Čech, relativa alla trasformazione T ed alla affinità tangente a T nella coppia (A, \bar{A}) ad una retta generica, faccia corrispondere una retta fissa.*

Bibliografia.

- [1] E. ČEĀ, *Geométrie projective différentielle des correspondences entre deux espaces*, Časopis Pěst Mat. Fys. **74** (1949), 32-48.
- [2] F. EUGENI, *Alcune proprietà delle trasformazioni conformi*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **16** (1967), 163-170.
- [3] G. MARTINI, *Ricerche locali sulle trasformazioni puntuali tra due spazi nella Geometria affine*, Atti Accad. Sci. Ist. Bologna (11) **10** (1962-63), 209-223.
- [4] L. MURACCHINI, *Sulle trasformazioni puntuali fra piani proiettivi sovrapposti*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **9** (1954), 360-366.
- [5] B. SEGRE, *Corrispondenze analitiche e trasformazioni cremoniane*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **23** (1949), 107-139.
- [6] F. SPERANZA, *Le trasformazioni di un piano in sé approssimabili con una trasformazione quadratica dotata di una conica di punti uniti*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **19** (1964), 193-205.
- [7] M. VILLA, *Una osservazione sulla Geometria affine delle trasformazioni puntuali*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **19** (1964), 53-59.

⁽¹⁶⁾ M. VILLA [9] e E. ČEĀ [1].

- [8] M. VILLA, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari* (I, II, III), *Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8) 4 (1948): 55-61, 192-196, 295-303.
- [9] M. VILLA, *Problemi di integrali sulle trasformazioni puntuali*, *Compositio Math.* 12 (1954), 137-146.
- [10] M. VILLA, *Lezioni di Geometria*, Vol. I e Vol. II, Cedam, Padova 1964.

S o m m a r i o .

Si prova che in una coppia generica di punti corrispondenti in una trasformazione puntuale fra piani affini coincidenti o paralleli non esistono trasformazioni quadratiche osculatrici o semi-osculatrici tali che la retta impropria sia retta di punti uniti. Si trovano le condizioni perchè tale trasformazione quadratica esista e si prova che in ogni caso essa è unica.

* * *