

TIZIANA MONTALI (*)

Pseudolimiti e formule SH. ()**

I.

Sia A un insieme, $h: A \rightarrow A$ un'applicazione, $C \subseteq A$. Consideriamo un linguaggio \mathcal{L} , del primo ordine con uguaglianza, costituito da un predicato unario P e da un simbolo funzionale unario ω . Consideriamo la \mathcal{L} -struttura $(A; C, h)$, dove C è l'interpretazione di P e h l'interpretazione di ω . La formula

$$(1) \quad (\forall y) (P(y) \leftrightarrow (\exists x)(\omega(x) = y))$$

è vera in \mathcal{A} se e solo se C è l'immagine di h . La (1), in forma aperta di SKOLEM, fornisce la seguente SH (di rango 2)

$$H_1: \quad (P(\varepsilon_1) \rightarrow \omega f \varepsilon_1 = \varepsilon_1) \wedge (\omega \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \rightarrow P(\varepsilon_1)) \quad (1)$$

Dato un morfismo $h: A \rightarrow A$ in una categoria \mathcal{K} con prodotti finiti ed un sottooggetto $C \xrightarrow{u} A$, è naturale chiedersi quali rapporti esistano fra i seguenti due fatti:

- (i) $[u]$ è l'immagine forte di h ;
- (ii) $\models_{\mathcal{A}} H_1$, ove \mathcal{A} è la \mathcal{L} -struttura (in \mathcal{K}) ottenuta interpretando ω in h e P in $[u]$.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Ricevuto: 22-X-1971.

(1) Si noti che strutture come la \mathcal{A} non sono state contemplate in [3]; per ovviare a questo inconveniente, basta riferirsi a linguaggi \mathcal{L} contenenti due classi $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ di simboli funzionali e parlare di « \mathcal{L} -struttura» se si sono interpretati i simboli di \mathcal{F}_1 , e di « \mathcal{L} -interpretazione» se si sono interpretati anche i simboli di \mathcal{F}_2 . Nel nostro caso $\omega \in \mathcal{F}_1, f \in \mathcal{F}_2$.

La risposta a tale quesito è fornita dai seguenti due teoremi, i quali mostrano fino a dove si spinga l'analogia col caso concreto ($\mathcal{K} = \mathfrak{S}$).

Teorema 1. *Se $\models_{\mathcal{A}} H_1$, $[u]$ è l'immagine forte di h .*

Dimostrazione. Considerando il morfismo $g = \{h, 1_A\}: A \rightarrow A^2$, si ha $h\varepsilon_2 g = h = \varepsilon_1 g$ e quindi, poichè per ipotesi $\models_{\mathcal{A}} H_1$, $\varepsilon_1 g \leq u$, o anche $h \leq u$. Ciò significa che esiste un morfismo $\psi: A \rightarrow C$ tale che $h = u\psi$.

Per dimostrare che ψ è una ritrazione, si consideri una \mathcal{L} -interpretazione \mathcal{A}^* associata ad \mathcal{A} e tale che $\models_{\mathcal{A}^*} H_1$; sia f^* l'interpretazione in \mathcal{A}^* di f . Preso il morfismo $g = \{u, f^*u\}: C \rightarrow A^2$, per esso si ha $\varepsilon_1 g \leq u$ e quindi $hf^*u = u$ cioè $u\psi f^*u = u$ e quindi $\psi f^*u = 1$.

Teorema 2. *Il morfismo h ammetta immagine forte $[u]$; se u è una coritrazione, allora $\models_{\mathcal{A}} H_1$.*

Dimostrazione. Sia $h = u\psi$, con ψ ritrazione e u coritrazione, diciamo $\psi\psi' = 1$ e $u'u = 1$. Posto $f^* = \psi'u'$, vogliamo mostrare che la \mathcal{L} -interpretazione \mathcal{A}^* che interpreta f in f^* verifica la H_1 .

Si considerino un oggetto X di \mathcal{K} e un morfismo $g: X \rightarrow A^2$ tale che $\varepsilon_1 g \leq u$, diciamo $\varepsilon_1 g = ua$. Si ha allora

$$hf^* \varepsilon_1 g = u\psi\psi'u'ua = ua = \varepsilon_1 g.$$

Sia inoltre $h\varepsilon_2 g = \varepsilon_1 g$; allora

$$\varepsilon_1 g = h\varepsilon_2 g = u\psi\varepsilon_2 g \leq u.$$

Si può perciò concludere che $\models_{\mathcal{A}^*} H_1$, e quindi $\models_{\mathcal{A}} H_1$.

Si può mostrare con un esempio che se h ammette immagine forte, ma questa non è una coritrazione, non necessariamente H_1 è vera in \mathcal{A} .

Si consideri la categoria \mathfrak{S} degli insiemi; in essa si considerino gli oggetti $A = \{0, 1, 2\}$, $C = \{0, 1\}$ e l'applicazione $h: A \rightarrow A$ così definita: $h(0) = 0$, $h(1) = 0$, $h(2) = 0$; come è facile verificare, h ammette immagine forte $[u]$, ove $u: C \rightarrow A$ è l'inclusione, diremo $h = u\psi$, con $\psi: A \rightarrow C$ è l'applicazione che opera come h ; indichiamo con $\psi': C \rightarrow A$ l'applicazione che opera in questo modo: $\psi'(0) = 1$, $\psi'(1) = 2$; naturalmente $\psi\psi' = 1_C$. Si consideri la sot-

to categoria \mathcal{C} di \mathfrak{S} generata dai morfismi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \Delta_A, \{u, \psi'\}, \{\psi', u\}, \{1, h\}, \{h, 1\}$; naturalmente $\text{Ob } \mathcal{C} = \{A, C, A^2\}$.

Si noti che $(A^2, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ è prodotto di A per A anche in \mathcal{C} . È facile verificare che anche in \mathcal{C} , $[u]$ è l'immagine forte di h , ma non esiste alcun morfismo f^* tale che in \mathcal{A}^* sia vera la (H_1) ⁽²⁾.

2.

Si consideri la seguente SH:

$$H_2: \quad (P(\varepsilon_1) \rightarrow (Q(f\varepsilon_1) \wedge S(f\varepsilon_1, \varepsilon_1))) \wedge ((Q(\varepsilon_1) \wedge S(\varepsilon_2, \varepsilon_1)) \rightarrow P(\varepsilon_1))$$

associata alla formula

$$(2) \quad P(y) \leftrightarrow ((\exists x) Q(x) \wedge S(x, y))$$

che definisce l'immagine di un sottoinsieme di A in una relazione binaria su A .

Sia \mathcal{A} la struttura su un oggetto A ⁽³⁾ ottenuto interpretando P in β , S in ϱ e Q in α , ove $\alpha = [A' \xrightarrow{i} A]$, $\varrho = [R \rightarrow A^2]$, $\beta = [C \xrightarrow{u} A]$.

Con tali notazioni si ha:

Teorema 3. *Se $\models_{\mathcal{A}} H_2$, allora $\beta = \varrho(\alpha)$ ⁽⁴⁾.*

Dimostrazione. Si scelga $g = \{u, u\}$, per cui $\varepsilon_1 g \leq u$. Si sa per ipotesi che esiste un morfismo f^* tale che, detta \mathcal{A}^* l'interpretazione associata ad \mathcal{A} ottenuta interpretando f in f^* , sia $\models_{\mathcal{A}^*} H_2$, perciò si ha

$$\{f^* \varepsilon_1 g, \varepsilon_1 g\} \leq v, \quad f^* \varepsilon_1 g \leq i,$$

diciamo

$$\{f^* \varepsilon_1 g, \varepsilon_1 g\} = va, \quad f^* \varepsilon_1 g = ib,$$

per cui $f^* u = \varepsilon_1 va$, $u = \varepsilon_2 va$, $f^* u = ib$, e quindi $\varepsilon_1 va = ib$. Allora la famiglia

⁽²⁾ La categoria \mathcal{C} non ha prodotti finiti, ma se si considera la minima categoria \mathcal{C}' chiusa rispetto ai prodotti finiti di \mathfrak{S} e contenente \mathcal{C} come sottocategoria, neppure in essa esistono morfismi f^* tali che in \mathcal{A} sia vera la H_1 .

⁽³⁾ In tutto il lavoro ci si riferisce ad una fissata categoria \mathcal{A} con prodotti finiti.

⁽⁴⁾ Per questo simbolo cfr. [2].

$(C \xrightarrow{b} A', C \xrightarrow{a} R, C \xrightarrow{u} A)$ è compatibile per il diagramma

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{i} & A \\ & \searrow & \nearrow \\ R & \xrightarrow{\varepsilon_1 v} & A \\ & \searrow & \nearrow \\ & \xrightarrow{\varepsilon_2 v} & A \end{array} \quad .$$

Sia data ora una qualunque famiglia compatibile per il diagramma precedente $(K \xrightarrow{s} A', K \xrightarrow{t} R, K \xrightarrow{c} A)$. Si consideri ora il morfismo $g: K \rightarrow A^2$, $g = \{c, is\}$. Si ha allora $\varepsilon_2 g = is \leq i$, $\{\varepsilon_2, \varepsilon_1\} g = \{is, c\} = vt \leq v$, per cui $c = \varepsilon_1 g \leq u$. Ciò significa che esiste un $h: K \rightarrow C$ tale che $c = uh$.

Conservando le notazioni del teorema precedente si ha il

Teorema 4. *Sia $\beta = \varrho(\alpha)$. Se u è una contrazione, allora $\vDash_{\mathcal{A}} H_2$.*

Dimostrazione. Sia $u': A \rightarrow C$ un inverso sinistro di u . Poichè u è il sottoggetto di A pseudolimita nel diagramma

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{i} & A \\ & \searrow & \nearrow \\ R & \xrightarrow{\varepsilon_1 v} & A \\ & \searrow & \nearrow \\ & \xrightarrow{\varepsilon_2 v} & A \end{array} \quad ,$$

esiste per esso una famiglia compatibile $(C \xrightarrow{u'} A, C \xrightarrow{b} A, C \xrightarrow{a} R)$.

Si consideri ora un morfismo $g: X \rightarrow A^2$ tale che $\varepsilon_2 g \leq i$ e $\{\varepsilon_2, \varepsilon_1\} g \leq v$, diciamo $\varepsilon_2 g = is$, $\varepsilon_2 g = \varepsilon_1 vt$, $\varepsilon_1 g = \varepsilon_2 vb$. Allora $(X \xrightarrow{s} A', X \xrightarrow{t} R, X \xrightarrow{\varepsilon_1 g} A)$ è una famiglia compatibile, perciò esiste uno ed un solo $k: X \rightarrow C$ tale che $uk = \varepsilon_1 g$ od anche $\varepsilon_1 g \leq u$.

Ora, invece, si consideri il morfismo $g: X \rightarrow A^2$ tale che $\varepsilon_1 g \leq u$, diciamo $\varepsilon_1 g = uh$. Indichiamo con f^* il morfismo $\varepsilon_1 vau'$, da cui

$$f^* \varepsilon_1 g = f^* uh = \varepsilon_1 vah = ibh \leq i .$$

Inoltre, essendo $\varepsilon_1 g = uh = \varepsilon_2 vah$, si ha

$$\{f^* \varepsilon_1, \varepsilon_2\} g = vah \leq v .$$

3.

Si consideri ora la SH:

$$H_3: \quad \left(P(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (Q(\varepsilon_1, f(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) \wedge V(f(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \varepsilon_2)) \right) \wedge \\ \wedge \left((Q(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \wedge V(\varepsilon_2, \varepsilon_2)) \rightarrow P(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \right),$$

ottenuta dalla formula

$$(3) \quad P(x, y) \leftrightarrow (\exists z)(Q(x, z) \wedge V(z, y))$$

esprimente che P è composizione di Q e V .

Sia \mathcal{A} la struttura su un oggetto A ottenuta interpretando P in ϱ_3 , Q in ϱ_1 , V in ϱ_2 , ove $\varrho_3 = [T \xrightarrow{w} A^2]$, $\varrho_1 = [R \xrightarrow{u} A^2]$, $\varrho_2 = [S \xrightarrow{v} A^2]$.

Si ha il seguente

Teorema 5. *Se $\models_{\mathcal{A}} H_3$, allora $\varrho_3 = \varrho_1 \circ \varrho_2$ ⁽⁵⁾.*

Dimostrazione. Per ipotesi, esiste un morfismo f^* tale che, detta \mathcal{A}^* l'interpretazione associata ad \mathcal{A} ottenuta interpretando f in f^* , sia $\models_{\mathcal{A}^*} H_3$.

Si consideri il morfismo $g = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1\} w: T \rightarrow A^2$.

Si ha allora $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} g = w \leq w$ e perciò

$$\{\varepsilon_1, f^*\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}\} g \leq u, \quad \{f^*\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}, \varepsilon_2\} g \leq v;$$

diciamo

$$\{\varepsilon_1, f^*\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}\} g = ua, \quad \{f^*\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}, \varepsilon_2\} g = vb,$$

cioè

$$\{\varepsilon_1, f^*\} w = ua, \quad \{f^*, \varepsilon_2\} w = vb.$$

Ora sia $j = \{a, b\}: T \rightarrow R \times S$, per cui

$$\varepsilon_2 u \varepsilon_1 j = \varepsilon_2 ua = f^* w = \varepsilon_1 vb = \varepsilon_1 v \varepsilon_2 j,$$

cioè j ugualizza $\varepsilon_2 u \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 v \varepsilon_2$,

⁽⁵⁾ Cfr. [2].

Inoltre si ha

$$\alpha(u, v)j = \{\varepsilon_1 u\varepsilon_1, \varepsilon_2 v\varepsilon_2\}\{a, b\} = \{\varepsilon_1 ua, \varepsilon_2 vb\} = \{\varepsilon_1 w, \varepsilon_2 w\} = w.$$

Si consideri ora un qualunque morfismo $j': T' \rightarrow R \times S$ che ugualizzi $\varepsilon_2 u\varepsilon_1$, $\varepsilon_1 v\varepsilon_2$, ed il morfismo $g = \{\varepsilon_1 u\varepsilon_1 j', \varepsilon_2 v\varepsilon_2 j', \varepsilon_2 u\varepsilon_1 j'\}$. Si ha allora

$$\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}g = u\varepsilon_1 j' \leq u, \quad \{\varepsilon_3, \varepsilon_2\}g = v\varepsilon_2 j' \leq v,$$

e quindi, per l'ipotesi,

$$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}g \leq w,$$

cioè

$$\alpha(u, v)j' = \{\varepsilon_1 u\varepsilon_1 j', \varepsilon_2 v\varepsilon_2 j'\} \leq w = \alpha(u, v)j,$$

ossia

$$\alpha(u, v)j' \leq \alpha(u, v)j.$$

Conservando le notazioni del Teorema precedente, si ha:

Teorema 6. *Sia $\varrho_3 = \varrho_1 \cdot \varrho_2$ ⁽⁶⁾. Se w è una coritrazione, allora $\models_{\mathcal{A}} H_3$.*

Dimostrazione. Si indichi con w' un inverso sinistro di w .

Si consideri un morfismo $g: X \rightarrow A^3$ tale che

$$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}g \leq u, \quad \{\varepsilon_3, \varepsilon_2\}g \leq v,$$

diciamo

$$\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}g = ua, \quad \{\varepsilon_3, \varepsilon_2\}g = vb$$

o, in modo equivalente,

$$\varepsilon_1 g = \varepsilon_1 ua, \quad \varepsilon_3 g = \varepsilon_2 ua = \varepsilon_1 vb, \quad \varepsilon_2 g = \varepsilon_2 vb.$$

Il morfismo $j' = \{a, b\}: A^3 \rightarrow R \times S$ ugualizza $\varepsilon_2 u\varepsilon_1$, $\varepsilon_1 v\varepsilon_2$, perciò, per l'ipotesi

$$\alpha(u, v)j' \leq \alpha(u, v)j,$$

cioè

$$\{\varepsilon_1 ua, \varepsilon_2 vb\} \leq w, \quad \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}g \leq w.$$

⁽⁶⁾ Per questo simbolo e per le notazioni usate nel corso della dimostrazione del teorema, si veda [2], n. 3, teorema 6.

Si consideri ora un morfismo $g: X \rightarrow A^3$ tale che $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}g \leq w$, cioè tale che esista un $h: A^3 \rightarrow T$ con $\varepsilon_1 g = \varepsilon_1 w h$, $\varepsilon_2 g = \varepsilon_2 w h$.

Il morfismo $f^* = \varepsilon_2 u \varepsilon_1 j w' = \varepsilon_1 v \varepsilon_2 j w'$ è tale che $\underline{\underline{H_3}}_{A^*}$: infatti

$$\{\varepsilon_1, f^*\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}\}g = \{\varepsilon_1 w h, f^* w h\} = \{\varepsilon_1 u \varepsilon_1 j h, \varepsilon_2 u \varepsilon_1 j h\} \leq u,$$

Analogamente si mostra che

$$\{f^*\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}, \varepsilon_2\}g \leq v.$$

4.

I tre diagrammi precedenti si prestano ad una naturale generalizzazione.

Si consideri una categoria \mathcal{K} con prodotti finiti e un suo oggetto A .

Sia dato un diagramma D siffatto:

i vertici del diagramma siano

$$R_1, \dots, R_n; \quad D_0, D_1, \dots, D_n; \quad C_1, \dots, C_p,$$

ove ciascun D_k è una potenza di A , diciamo $A^{q(k)}$, e $C_i = A$ per ciascun C_i ; le frecce del diagramma siano

$$u_1, \dots, u_n; \quad \theta_1, \dots, \theta_m; \quad \eta_1, \dots, \eta_q,$$

ove

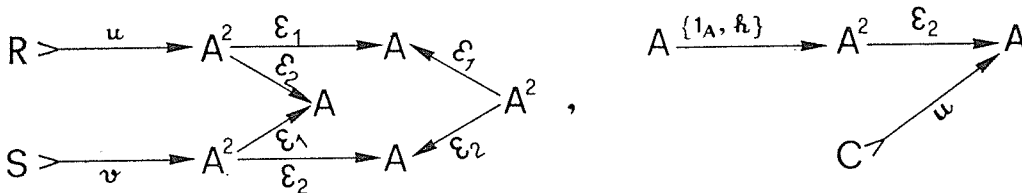
$$u_k: R_k \rightarrow D_k = A^{q(k)} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

$$\vartheta_k: D_0 \rightarrow C_{\beta(k)}, \quad \vartheta_k = \varepsilon_{\nu(k)}^{q(0)}, \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

$$\eta_k: D_{\alpha(k)} \rightarrow C_{\gamma(k)}, \quad \eta_k = \varepsilon_{\mu(k)}^{q(\alpha(k))} \quad (k = 1, 2, \dots, q).$$

Posto $\varrho \circ \alpha = \delta$, si ha $\eta_k: A^{\delta(k)} \rightarrow A^{(\gamma)}$.

(⁷) Si noti che il diagramma relativo alla composizione di due relazioni, sebbene non sia di questa forma, è banalmente equivalente ad un diagramma quale quello sotto a sinistra; mentre, analogamente, il diagramma relativo all'immagine forte è equivalente a quello sotto a destra:



Sia inoltre $u_0: R_0 \rightarrow D_0$ sottoggetto di D_0 .

Si considerino ora le variabili

$$\begin{aligned} & z_1, z_2, \dots, z_{\varrho(0)} \\ & x_1^1, x_2^1, \dots, x_{\varrho(1)}^1 \\ & \dots \dots \dots \\ & x_1^n, x_2^n, \dots, x_{\varrho(n)}^n \\ & y_1, y_2, \dots, y_p \end{aligned}$$

e le due formule benformate

$$\begin{aligned} A' : z_{r(1)} &= y_{\beta(1)} \wedge \dots \wedge z_{r(m)} = y_{\beta(m)}, \\ A'' : x_{\mu(1)}^{\alpha(1)} &= y_{\gamma(1)} \wedge \dots \wedge x_{\mu(a)}^{\alpha(a)} = y_{\gamma(a)}. \end{aligned}$$

Associamo al diagramma D la seguente formula benformata di un linguaggio contenente, per ciascun R_k del diagramma, un predicato P_k a $\varrho(k)$ posti:

$$\begin{aligned} (4) \quad & (\forall z_1) \dots (\forall z_{\varrho(0)}) (P_0(z_1, \dots, z_{\varrho(0)}) \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow (\exists x_1^1) \dots (\exists x_{\varrho(1)}^1) \dots (\exists x_1^n) \dots (\exists x_{\varrho(n)}^n) (\exists y_1) \dots (\exists y_a) \cdot \\ & \cdot (P_1(x_1^1, \dots, x_{\varrho(1)}^1) \wedge \dots \wedge P_n(x_1^n, \dots, x_{\varrho(n)}^n) \wedge A' \wedge A''). \end{aligned}$$

Si considerino ora le proiezioni

$$\begin{array}{l} \zeta_1, \dots, \zeta_{\varrho(0)} \\ \lambda_1^1, \dots, \lambda_{\varrho(1)}^1 \\ \lambda_1^2, \dots, \lambda_{\varrho(2)}^2 \\ \dots \dots \dots \\ \lambda_1^n, \dots, \lambda_{\varrho(n)}^n \\ \xi_1, \dots, \xi_p \end{array} \quad \text{ove:} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \zeta_k = \varepsilon_k & (k = 1, 2, \dots, \varrho(0)) , \\ \lambda_k^1 = \varepsilon_{\varrho(0)+k} & (k = 1, 2, \dots, \varrho(1)) , \\ \lambda_k^2 = \varepsilon_{\varrho(0)+\varrho(1)+k} & (k = 1, 2, \dots, \varrho(2)) , \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\ \lambda_k^n = \varepsilon_{\varrho(0)+\varrho(1)+\dots+\varrho(n-1)+k} & (k = 1, 2, \dots, \varrho(n)) , \\ \xi_k = \varepsilon_{\varrho(0)+\varrho(1)+\dots+\varrho(n-1)+\varrho(n)+k} & (k = 1, 2, \dots, p), \end{array} \right.$$

e $r = \varrho(0) + \varrho(1) + \dots + \varrho(n) + p$ è l'arietà comune delle varie proiezioni.

Vogliamo ora associare alla (4) una opportuna SH, analogamente a quanto fatto per i tre casi particolari nei precedenti paragrafi. A tale scopo consideriamo un linguaggio \mathcal{L} in cui, oltre ai predicati P_0, P_1, \dots, P_n vi siano i simboli funzionali g_j^i con $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq \max\{\varrho(1), \dots, \varrho(n)\}$ di arietà $\varrho(0)$, e $f_{\gamma(i)}$ con $1 \leq i \leq q$, anche essi di arietà $\varrho(0)$. A tale scopo si ponga

$$t = \{\zeta_1, \dots, \zeta_{\varrho(0)}\},$$

$$t_j^i = g_j^i t \quad (i = 1, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, \max\{\varrho(1), \dots, \varrho(n)\}),$$

e si considerino le formule benformate

$$M_1 \quad \zeta_{\nu(1)} = f_{\beta(1)} t \wedge \dots \wedge \zeta_{\nu(m)} = f_{\beta(m)} t,$$

$$M_2 \quad t_{\mu(1)}^{\alpha(1)} = f_{\gamma(1)} t \wedge \dots \wedge t_{\mu(a)}^{\alpha(a)} = f_{\gamma(a)} t,$$

$$M_3 \quad \zeta_{\nu(1)} = \xi_{\beta(1)} \wedge \dots \wedge \zeta_{\nu(m)} = \xi_{\beta(m)},$$

$$M_4 \quad \lambda_{\mu(1)}^{\alpha(1)} = \xi_{\gamma(1)} \wedge \dots \wedge \lambda_{\mu(a)}^{\alpha(a)} = \xi_{\gamma(a)}.$$

Ora indicando con

$$H_4 \quad P_0(\zeta_1, \dots, \zeta_{\varrho(0)}) \rightarrow (P(t_1^1, \dots, t_{\varrho(1)}^1) \wedge \dots \wedge P_n(t_1^n, \dots, t_n^n) \wedge M_1 \wedge M_2),$$

$$H_5 \quad (P_1(\lambda_1^1, \dots, \lambda_{\varrho(1)}^1) \wedge \dots \wedge P_n(\lambda_1^n, \dots, \lambda_{\varrho(n)}^n) \wedge M_3 \wedge M_4) \rightarrow P_0(\zeta_1, \dots, \zeta_{\varrho(0)}),$$

la SH associata alla (4) è la seguente:

$$H \quad H_4 \wedge H_5.$$

Sia ora \mathcal{A} la struttura che si ottiene interpretando P_0 in $[u_0]$, ..., P_n in $[u_n]$. Si ha allora il seguente

Teorema 7. *Se $\models_{\mathcal{A}} H$, $[u_0]$ è sottoggetto pseudolimita nel diagramma D .*

Dimostrazione. Consideriamo la \mathcal{L} -interpretazione \mathcal{A}^* associata ad \mathcal{A} , ottenuta interpretando g_j^i in h_j^i , con $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq \max\{\varrho(1), \dots, \varrho(n)\}$, e $f_{\gamma(i)}$ in $k_{\gamma(i)}$ con $1 \leq i \leq q$.

Per definizione di verità di una SH data in [3], per ogni oggetto X di \mathcal{K} e per ogni morfismo $g: X \rightarrow A^r$ deve essere soddisfatta la formula H . In par-

ticolare si consideri $X = P_0$ e si definisca g nel modo seguente

$$\zeta_1 g = \varepsilon_1^{a(0)} u, \dots, \zeta_{\rho(0)} g = \varepsilon_{\rho(0)}^{a(0)} u,$$

e le rimanenti proiezioni di g siano morfismi qualunque aventi P_0 come dominio e A come codominio. Con tali posizioni si ha

$$\{\zeta_1, \dots, \zeta_{\rho(0)}\} g = u_0 \leq u_0$$

e perciò

$$\{h_1^1, \dots, h_{\rho(1)}^1\} u_0 \leq u_1, \dots, \{h_1^n, \dots, h_{\rho(n)}^n\} u_0 \leq u_n,$$

diciamo

$$\{h_1^i, \dots, h_{\rho(i)}^i\} u_0 = u_i a_i, \quad \text{con} \quad a_i: P_0 \rightarrow P_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Inoltre

$$\zeta_{\nu(i)} g = k_{\beta(i)} u_0 \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$h_{\mu(i)}^{\alpha(i)} g = k_{\gamma(i)} u_0 \quad (i = 1, 2, \dots, q).$$

Allora, considerando $u_0: P_0 \rightarrow D_0$, $a_i: P_0 \rightarrow P_i$ con $1 \leq i \leq n$, e gli altri morfismi in modo ovvio, si ottiene una famiglia compatibile.

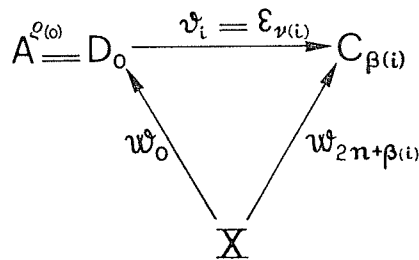
Ora si consideri un qualunque oggetto X di \mathcal{X} e una qualunque famiglia compatibile $(w_0, w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, \dots, w_{2n}, w_{2n+1}, \dots, w_{2n+p})$ con $w_0: X \rightarrow D_0$,

$$w_i: X \rightarrow P_i \quad (1 \leq i \leq n); \quad w_{n+i}: X \rightarrow D_i \quad (1 \leq i \leq n); \quad w_{2n+i}: X \rightarrow C_i \quad (1 \leq i \leq p).$$

Naturalmente si avrà

$$u_i w_i = w_{n+i} \quad (i = 1, \dots, n), \quad w_{2n+\beta(i)} = \theta_i w_0 \quad (i = 1, \dots, m),$$

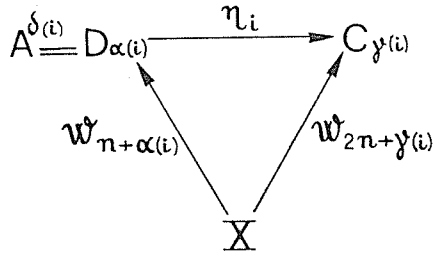
cioè $w_{2n+\beta(i)}$ commuta un triangolo del tipo



e inoltre

$$w_{2n+\gamma(i)} = \eta_i w_{n+\alpha(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, q),$$

cioè $w_{2n+\gamma(i)}$ commuta un triangolo del tipo



Si consideri il morfismo g così definito:

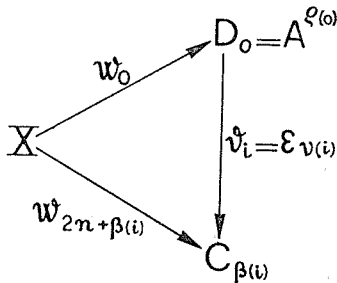
$$\begin{cases} \varepsilon_1 g = \varepsilon_1 w_0, \dots, \varepsilon_{\varrho(0)} g = \varepsilon_{\varrho(0)} w_0, \\ \varepsilon_{\varrho(0)+1} g = \varepsilon_1 w_{n+1}, \dots, \varepsilon_{\varrho(0)+\varrho(1)} g = \varepsilon_{\varrho(1)} w_{n+1}, \dots, \varepsilon_{r-p} g = \varepsilon_{\varrho(n)} w_{2n}, \\ \varepsilon_{r-p+1} g = w_{2n+1}, \dots, \varepsilon_r g = w_{2n+p}. \end{cases}$$

Per tale g si ha

$$\{\lambda_1^i, \dots, \lambda_{\varrho(i)}^i\} g = w_{n+i} = u_i w_i \leq u_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$\xi_{\beta(i)} g = \varepsilon_{r-p+\beta(i)} g = w_{2n+\beta(i)} = \theta_i w_0 = \theta_i \{\zeta_1, \dots, \zeta_{\varrho(i)}\} g = \zeta_{r(i)} g \quad (i = 1, \dots, m),$$

e queste ultime uguaglianze valgono perchè sono commutativi i triangoli

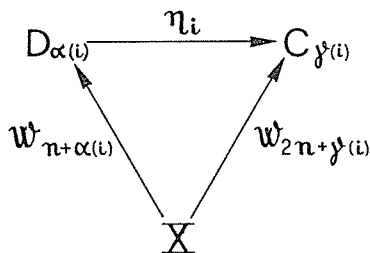


Inoltre

$$\lambda_{\mu^{(i)}}^{\alpha^{(i)}} g = \eta_i \{ \lambda_1^{\alpha^{(i)}}, \dots, \lambda_{\alpha^{(i)}}^{\alpha^{(i)}} \} g = \eta_i w_{n+\alpha^{(i)}} = w_{2n+\gamma^{(i)}} = \varepsilon_{r-p+\gamma^{(i)}} g = \xi_{\gamma^{(i)}} g$$

$$(i = 1, 2, \dots, q),$$

poichè sono commutativi i triangoli



Allora si ha

$$\{ \zeta_1, \dots, \zeta_{\alpha^{(0)}} \} g \leq u_0,$$

cioè $w_0 \leq u_0$, diciamo $w_0 = u_0 b$.

Conservando le notazioni del teorema precedente, si ha:

Teorema 8. *Sia $u_0: P_0 \rightarrow D_0$ soggetto pseudolimita nel diagramma D . Se u_0 è coritrazione, allora $\models_{\mathcal{A}} H$.*

Dimostrazione. Si supponga che $g: X \rightarrow A^r$ sia un morfismo tale che si abbia

$$\{ \lambda_1^i, \dots, \lambda_{\alpha^{(i)}}^i \} g \leq u_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

diciamo

$$\{ \lambda_1^i, \dots, \lambda_{\alpha^{(i)}}^i \} g = u_i w_i, \quad w_i: X \rightarrow P_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ed inoltre

$$\zeta_{r^{(i)}} g = \xi_{\beta^{(i)}} g \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad \lambda_{\mu^{(i)}}^{\alpha^{(i)}} g = \xi_{\gamma^{(i)}} g \quad (i = 1, 2, \dots, q).$$

Ne discende immediatamente che, considerando

$$\{ \zeta_1, \dots, \zeta_{\alpha^{(0)}} \} g: X \rightarrow A^{e^{(0)}},$$

$$w_i: X \rightarrow P_i, \quad \{ \lambda_1^i, \dots, \lambda_{\alpha^{(i)}}^i \} g: X \rightarrow A^{e^{(i)}}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

e gli altri morfismi definiti in modo opportuno, si ottiene una famiglia com-

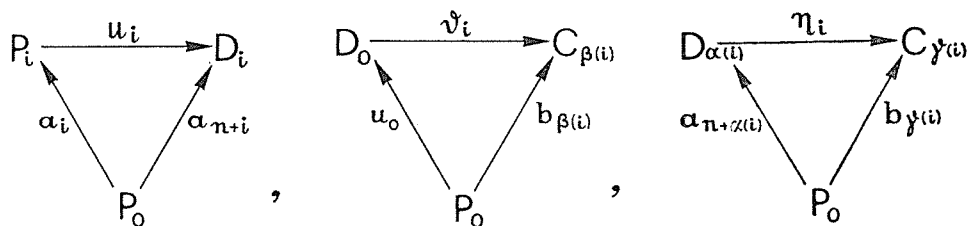
patibile per il diagramma D , perciò

$$\{\zeta_1, \dots, \zeta_{\varrho(0)}\} g \leq u_0.$$

Abbiamo così mostrato la prima parte del Teorema 8; per dimostrare la seconda, si indichi con u'_0 un inverso sinistro di u_0 , ricordiamo inoltre che per ipotesi si ha una famiglia compatibile

$$(P_0 \xrightarrow{u_0} D_0, P_0 \xrightarrow{a_1} P_1, \dots, P_0 \xrightarrow{a_n} P_n, P_0 \xrightarrow{a_{n+1}} D_1, \dots, P_0 \xrightarrow{a_{2n}} D_n, P_0 \xrightarrow{b_1} C_1, P_0 \xrightarrow{b_p} C_p).$$

Poichè la famiglia è compatibile, sono commutativi i seguenti triangoli:



perciò

$$a_{n+i} = u_i a_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$b_{\beta(i)} = \theta_i u_i \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad b_{\gamma(i)} = \eta_i a_{n+\alpha(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, q).$$

Ora si consideri un morfismo $g: X \rightarrow A^r$ tale che $\{\zeta_1, \dots, \zeta_{\varrho(0)}\} g \leq u_0$, diciamo $\{\zeta_1, \dots, \zeta_{\varrho(0)}\} g = u_0 m$ e si ponga:

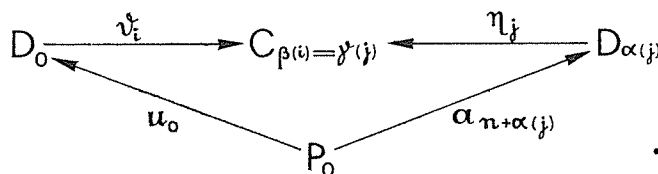
$$h_j^i = \varepsilon_j a_{n+i} u'_0 \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, \max \{\varrho(1), \dots, \varrho(n)\}),$$

$$k_{\gamma(i)} = h_{\mu(i)}^{\alpha(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, q).$$

(8) Si noti che per ogni coppia i, j tale che $\beta(i) = \gamma(j)$, si ha

$$h_{\gamma(i)} = k_{\gamma(j)} = h_{\mu(j)}^{\alpha(j)} = \varepsilon_{\mu(j)} a_{n+\alpha(j)} u'_0 = \vartheta_i,$$

poichè è commutativo il diagramma



Con tali posizioni si ha:

$$\begin{aligned} \{h_1^i, \dots, h_{\rho(i)}^i\} \{\zeta_1, \dots, \zeta_{\rho(0)}\} g &= \{\varepsilon_1 a_{n+i} u_0', \dots, \varepsilon_{\rho(i)} a_{n+i} u_0'\} u_0 m = \\ &= a_{n+i} m = u_i a_i m \leq u_i & (i = 1, 2, \dots, n), \\ k_{\beta(i)} \{\zeta_1, \dots, \zeta_{\rho(0)}\} g &= \zeta_{\nu(i)} g & (i = 1, 2, \dots, m), \\ k_{\nu(i)} \{\zeta_1, \dots, \zeta_{\rho(0)}\} g &= h_{\mu(i)}^{\alpha(i)} \{\zeta_1, \dots, \zeta_{\rho(0)}\} g & (i = 1, 2, \dots, q). \end{aligned}$$

Avendo trovato un \mathcal{A}^* tale che $\models_{\mathcal{A}^*} H$, possiamo concludere che $\models_{\mathcal{A}} H$.

Bibliografia.

- [1] F. GALVIN, *Horn Sentences*, Ann. Math. Logic 4 (1970), 389-422.
- [2] M. SERVI, *Alcune proprietà delle relazioni su un oggetto di una categoria*, Symposia Mathematica 5 (1971).
- [3] M. SERVI, *Una questione di teoria dei modelli nelle categorie con prodotti finiti* (in corso di pubblicazione).

* * *