Riv. Mat. Univ. Parma (3) 1 (1972), 27-36

GIAN LUCA CARAFFINI (*)

Su un teorema di unicità per le vibrazioni della trave viscoelastica. (**)

1. – In alcuni recenti lavori [1] [2] sono stati assegnati teoremi di unicità per le vibrazioni di una trave, autosostenute da una forza di attrito solido applicata all'estremo libero della trave, funzione non lineare della velocità dell'estremo stesso. La validità di tale teorema era stata provata nel caso elastico, prescindendo dagli scorrimenti dovuti agli sforzi di taglio e supponendo inoltre la trave immersa in un mezzo viscoso e soggetta ad una sollecitazione longitudinale opportuna.

Oggetto di questa Nota è provare che il teorema di unicità — unicità intesa in senso « classico » — può essere esteso al caso di una trave viscoelastica, sia nel caso della viscoelasticità di tipo ereditario (§ **2**, **3**) che nel caso in cui gli attriti interni vengono schematizzati con una forza proporzionale alla velocità di deformazione, sempre prescindendo dagli scorrimenti dovuti agli sforzi di taglio. Un problema analogo, ma in caso più semplice, è già stato trattato da R. NARDINI [3].

2. – Per schematizzare l'azione degli attriti interni, ci atteniamo dapprima all'ipotesi della viscoelasticità di tipo ereditario. Supporremo, cioè, che tra lo

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.F.M. del C.N.R.: — Ricevuto: 24-V-1972.

stress σ e lo strain ε intercorra una relazione del tipo [4]

$$\sigma = E\varepsilon + \int_0^t \varphi(t-\tau)\,\varepsilon(\tau)\,d\tau \quad (1)\,, \tag{1}$$

dove $\varphi(z)$ rappresta la «funzione ereditaria», funzione che supporremo derivabile, con derivata continua, e limitata in valore assoluto insieme con la derivata prima per $z \geqslant 0$. Inoltre supporremo la trave indeformata per $t < 0$.

Si perviene allora, con lo stesso simbolismo usato in [2] all'equazione integro-differenziale

$$\begin{aligned} EJ\frac{\partial^4\eta(x,t)}{\partial x^4} + J\int_0^t \varphi(t-\tau)\frac{\partial^4\eta(x,\tau)}{\partial x^4}\,d\tau + \beta\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t} + \\ + \mu\frac{\partial^2\eta(x,t)}{\partial t^2} + Q\frac{\partial^2\eta(x,t)}{\partial x^2} - \frac{UJ}{A}\frac{\partial^4\eta(x,t)}{\partial x^2\,\partial t^2} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

che regge le piccole vibrazioni della trave. Ad essa vanno aggiunte le condizioni al contorno

$$\left\{\begin{aligned} &(\eta)_{x=0} = 0 \quad \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \quad \left[EJ\frac{\partial^2\eta(x,t)}{\partial x^1} + J\int_0^t \varphi(t-\tau)\frac{\partial^2\eta(x,t)}{\partial x^1}\,d\tau\right]_{x=l} = 0 \\ &\left[\frac{\partial^3\eta(x,t)}{\partial x^3} + \frac{1}{E}\int_0^t \varphi(t-\tau)\frac{\partial^3\eta(x,\tau)}{\partial x^3}\,d\tau\right]_{x=l} = \\ &\qquad = -\frac{F}{EJ} + \frac{m}{EJ}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right)_{x=l} + \frac{\mu}{AE}\left(\frac{\partial^3\eta}{\partial x^2\,\partial t}\right)_{x=l} - Q\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_{x=l} \end{aligned}\right. \tag{3}$$

ovviamente deducibili da quelle indicate in [2] tenendo conto dell'ereditarietà.

---

(1) Se d'accordo con altri autori [5], [6], supponiamo valida una relazione del tipo

$$\sigma = E\varepsilon + \int_0^t \psi(t-\tau)\frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau}\,d\tau$$

si ottiene, con un'integrazione per parti e supponendo $\varepsilon(0) = 0$

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \psi(0)\,\varepsilon(t) + \int_0^t \psi'(t-\tau)\,\varepsilon(\tau)\,d\tau$$

relazione che si riconduce all'attuale ponendo E al posto di $E + \psi(0)$ e sostituendo $\psi'(t-\tau)$ con $\varphi(t-\tau)$.

3. – Per provare il teorema di unicità, supponiamo che, detta $\eta_1(x, t)$ una funzione, soddisfacente alle abituali condizioni di continuità e derivabilità, soluzione del problema (2), (3) sotto assegnate condizioni iniziali, sia $\eta_1(x, t) + \eta(x, t)$ un'altra soluzione del problema, soddisfacente alle stesse condizioni di continuità e derivabilità e alle stesse condizioni iniziali. Proveremo allora, con lo stesso procedimento seguito in [**1**] e [**2**], che $\eta(x, t)$ deve essere identicamente nulla per ogni $t \geqslant 0$.

Infatti $\eta(x, t)$ deve soddisfare all'equazione integro-differenziale (2) con le condizioni al contorno

$$\text{(4)}\quad \begin{cases} (\eta)_{x=0} = 0 \quad \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \quad \left(\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)_{x=l} + \dfrac{1}{E}\displaystyle\int_0^t \varphi(t-\tau)\left(\dfrac{\partial^2\eta(x,\tau)}{\partial x^2}\right)_{x=l} \mathrm{d}\tau = 0 \\[2ex] \left[\dfrac{\partial^3\eta(x,t)}{\partial x^3} + \dfrac{1}{E}\displaystyle\int_0^t \varphi(t-\tau)\,\dfrac{\partial^3\eta(x,\tau)}{\partial x^3}\mathrm{d}\tau\right]_{x=l} = \\[2ex] \qquad = -\dfrac{\Delta F}{EJ} + \dfrac{m}{EJ}\left(\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right)_{x=l} + \dfrac{\mu}{AE}\left(\dfrac{\partial^3\eta}{\partial x^2\,\partial t}\right)_{x=l} - Q\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)_{x=l} \end{cases}$$

e le condizioni iniziali

$$\text{(5)}\qquad (\eta)_{t=0} = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)_{t=0} = 0\,.$$

Osserviamo che la terza condizione al contorno (4) è una equazione integrale di VOLTERRA omogenea nella $(\partial^2\eta/\partial x^2)_{x=l}$. Per noti teoremi deve essere allora [**7**]

$$\text{(6)}\qquad \left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)_{x=l} = 0$$

come nel caso elastico.

Procedendo come nel citato lavoro [**2**] moltiplichiamo ambo i membri della (2) per $\partial\eta/\partial t$ e integriamo rispetto ad x da 0 a l.

Teniamo presente che ora si ha, per le condizioni al contorno,

$$
(7)\quad
\begin{cases}
\displaystyle\int_0^l \frac{\partial^4}{\partial x^4}\left(EJ\eta + J\int_0^t \varphi(t-\tau)\,\eta(x,\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\frac{\partial\eta}{\partial t}\,\mathrm{d}x = \\[2ex]
\displaystyle = \left\{\left[\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(EJ\eta + J\int_0^t \varphi(t-\tau)\,\eta(x.\,\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\right]\cdot\frac{\partial\eta}{\partial t}\right\}_{x=0}^{x=l} - \\[2ex]
\displaystyle\qquad - \int_0^l \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(EJ\eta + J\int_0^t \varphi(t-\tau)\,\eta(x,\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\frac{\partial^2\eta}{\partial t\,\partial x}\,\mathrm{d}\tau = \\[2ex]
\displaystyle = -\Delta F\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)_{x=l} + m\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right)_{x=l} - Q\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_{x=l} + \frac{\mu J}{A}\left(\frac{\partial^3\eta}{\partial x\,\partial t^2}\right)_{x=l} - \\[2ex]
\displaystyle - \left\{\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ\eta + J\int_0^t \varphi(t-\tau)\,\eta(x,\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\frac{\partial^2\eta}{\partial t\,\partial x}\right\}_{x=0}^{x=l} + \\[2ex]
\displaystyle\qquad + \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ\eta + \int_0^t \varphi(t-\tau)\,\eta(x,\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\frac{\partial^3\eta}{\partial t\,\partial x^2}\,\mathrm{d}x = \\[2ex]
\displaystyle = -\Delta F\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)_{x=l} + m\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right)_{x=l} - Q\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_{x=l} + \\[2ex]
\displaystyle\qquad + \frac{EJ}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^l\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^2\mathrm{d}x + J\int_0^l \frac{\partial^3\eta(x,t)}{\partial t\,\partial x^2}\int_0^t \varphi(t-\tau)\,\frac{\partial^2\eta(x,\tau)}{\partial x^2}\,\mathrm{d}\tau\,.
\end{cases}
$$

Allora, tenendo conto anche di quanto ottenuto in [**2**] abbiamo ora

$$
(8)\quad
\begin{cases}
\displaystyle \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{m\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2_{x=l} + EJ\int_0^l\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x + \right. \\[2ex]
\displaystyle\qquad \left. + \frac{\mu J}{A}\int_0^l\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial t}\right)^2\mathrm{d}x - Q\int_0^l\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x\right\} + \\[2ex]
\displaystyle\qquad + J\int_0^l \frac{\partial^3\eta}{\partial x^2\,\partial t}\,\mathrm{d}x\int_0^t \varphi(t-\tau)\,\frac{\partial^2\eta(x,\tau)}{\partial x^2}\,\mathrm{d}\tau = \\[2ex]
\displaystyle = \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)_{x=l}\Delta F - \beta\int_0^l\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x \leqslant N\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2_{x=l} + \beta\int_0^l\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x\,.
\end{cases}
$$

A questo punto integriamo il primo e l'ultimo membro di (8) rispetto alla variabile «tempo» da 0 all'istante generico t. Osserviamo che si ha

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_0^t \mathrm{d}\varrho \int_0^l \frac{\partial^3\eta(x,\varrho)}{\partial x^2\,\partial\varrho}\,\mathrm{d}x \int_0^\varrho \varphi(\varrho-\tau)\,\frac{\partial^2\eta(x,\tau)}{\partial x^2}\,\mathrm{d}\tau = \\
&\qquad = \int_0^l \mathrm{d}x \int_0^t \frac{\partial^3\eta(x,\varrho)}{\partial x^2\,\partial\varrho}\,\mathrm{d}\varrho \int_0^\varrho \varphi(\varrho-\tau)\,\frac{\partial^2\eta(x,\tau)}{\partial x^2}\,\mathrm{d}\tau\,,
\end{aligned}
\right.
$$

e integrando per parti, possiamo scrivere.

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
&-\int_0^t \frac{\partial^3\eta(x,\varrho)}{\partial x^2\,\partial\varrho}\,\mathrm{d}\varrho \int_0^\varrho \varphi(\varrho-\tau)\,\frac{\partial^2\eta(x,\tau)}{\partial x^2}\,\mathrm{d}\tau = \\
&= -\frac{\partial^2\eta(x,t)}{\partial x^2}\int_0^t \varphi(t-\tau)\,\frac{\partial^2\eta(x,\tau)}{\partial x^2}\,\mathrm{d}\tau + \\
&\quad + \int_0^t \frac{\partial^2\eta(x,\varrho)}{\partial x^2}\,\mathrm{d}\varrho \int_0^\varrho \varphi'(\varrho-\tau)\,\frac{\partial^2\eta(x,\tau)}{\partial x^2}\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t \varphi(0)\left(\frac{\partial^2\eta(x,\varrho)}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}\varrho\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Maggioriamo ora i primi due termini dell'ultimo membro di (10) in modo opportuno

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
&-\frac{\partial^2\eta(x,t)}{\partial x^2}\int_0^t \varphi(t-\tau)\,\frac{\partial^2\eta(x,\tau)}{\partial x^2}\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t \frac{\partial^2\eta(x,\varrho)}{\partial x^2}\,\mathrm{d}\varrho \int_0^\varrho \varphi'(\varrho-\tau)\,\frac{\partial^2\eta(x,\tau)}{\partial x^2}\,\mathrm{d}\tau \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_0^t |\varphi(t-\tau)|\left[\left(\frac{\partial^2\eta(x,t)}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\eta(x,\tau)}{\partial x^2}\right)^2\right]\mathrm{d}\tau + \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{d}\varrho \int_0^\varrho |\varphi'(\varrho-\tau)|\left[\left(\frac{\partial^2\eta(x,\varrho)}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\eta(x,\tau)}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}\tau \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{2}\,Bt\left(\frac{\partial^2\eta(x,t)}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\,B\int_0^t \left(\frac{\partial^2\eta(x,\tau)}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}\tau + \\
&\quad + \frac{1}{2}\,Ct\int_0^t \left(\frac{\partial^2\eta(x,\tau)}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\,C\int_0^t \mathrm{d}\varrho \int_0^\varrho \left(\frac{\partial^2\eta(x,\varrho)}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}\tau\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Qui con B e con C si sono indicati rispettivamente un valore maggiorante di $|\varphi(t-\tau)|$ e un valore maggiorante di $|\varphi'(t-\tau)|$, validi per ogni $t-\tau \geqslant 0$.

Abbiamo allora, ricordando la (8) e quanto ora ottenuto,

$$\frac{1}{2}\left\{m\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2_{x=l}+\mu\int_0^l\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x+\frac{\mu J}{A}\int_0^l\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial t}\right)\mathrm{d}x+(EJ-Bt)\int_0^l\left(\frac{\partial\eta}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x-\right.$$

$$\left.-Q\int_0^l\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x+H\int_0^t \mathrm{d}\varrho\int_0^l\left(\frac{\partial^2\eta(x,\varrho)^2}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x\right\}\leqslant$$

$$\leqslant N\int_0^t\left(\frac{\partial\eta}{\partial\varrho}\right)^2_{x=l}\mathrm{d}\varrho+\beta\int_0^t\mathrm{d}\varrho\int_0^l\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial\varrho^2}\right)^2\mathrm{d}x+$$

$$+\frac{1}{2}(B+2\varphi(0)+Ct+H)\int_0^t\mathrm{d}\varrho\int_0^l\left(\frac{\partial^2\eta(x,\varrho)}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\,C\int_0^t\mathrm{d}\varrho\int_0^\varrho\mathrm{d}\tau\int_0^l\frac{\partial^2\eta(x,\varrho)}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x,$$

dove con H si è indicata una quantità positiva arbitrariamente fissata. Per dimostrare la validità del teorema in oggetto, è sufficiente che sia (cfr. [2])

$$Q<\frac{\pi^2EJ}{4l^2}\ (^2) \tag{13}$$

In tal caso è

$$EJ-\frac{4Ql^2}{\pi^2}=K>0 \tag{14}$$

ed allora, per il teorema di M. PICONE citato in [2]

$$\left\{\begin{aligned}&(EJ-Bt)\int_0^l\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^2\mathrm{d}x-Q\int_0^l\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x\geqslant\\&\qquad\geqslant\left(EJ-Bt-\frac{4Ql^2}{\pi^2}\right)\int_0^l\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^2\mathrm{d}x=(K-Bt)\int_0^l\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^2\mathrm{d}x\,.\end{aligned}\right. \tag{15}$$

(2) Nel caso considerato nella nota (1) per la validità del teorema è sufficiente che sia $\varphi<(\pi^2J/4l^2)(E+\psi(0))$, limitazione che, supposta $\psi(0)>0$, è meno restrittiva di quella considerata in [2].

Ora, considerato t variabiale nell'intervallo chiuso $[0, h]$, con $h = K/2B$ si ha

$$(16)\qquad (EJ - Bt)\int_0^l \left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^3}\right)^2 \mathrm{d}x - Q\int_0^l \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant \frac{K}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}x$$

e quindi dalla (12) otteniamo

$$\frac{1}{2}\left\{m\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2_{x=l} + \mu\int_0^l \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x + K\int_0^l \left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}x + H\int_0^t \mathrm{d}\varrho\int_0^l \left(\frac{\partial^2\eta(x,\varrho)}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}x\right\} \leqslant$$

$$\leqslant N\int_0^t \left(\frac{\partial\eta(x,\varrho)}{\partial\varrho}\right)^2_{x=l} \mathrm{d}\varrho + \beta\int_0^t \mathrm{d}\varrho\int_0^l \left(\frac{\partial\eta(x,\varrho)}{\partial\varrho}\right)^2 \mathrm{d}x +$$

$$+\frac{1}{2}\left(B + 2\varphi(0) + \frac{CK}{B} + H\right)\int_0^t \mathrm{d}\varrho\int_0^l \left(\frac{\partial^2\eta(x,\varrho)}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}C\int_0^t \mathrm{d}\varrho\int_0^\varrho \mathrm{d}\tau\int_0^l \left(\frac{\partial^2\eta(x,\tau)}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}x\,.$$

Si è tenuto conto del fatto che la quantità $(\mu J/A)\int_0^l (\partial^2\eta/(\partial x\,\partial t))^2 \mathrm{d}x$ è evidentemente non negativa.

Se ora indichiamo con M la massima delle quantità

$$\frac{2N}{m}\,,\quad \frac{2\beta}{\mu}\,,\quad \frac{B + 2\varphi(0) + CK/2B + H}{K}\,,\quad \frac{C}{H}$$

otteniamo che la funzione non negativa

$$(18)\qquad \Phi(t) = \frac{1}{2}\left\{m\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2_{x=l} + \right.$$
$$\left. + \mu\int_0^l \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x + K\int_0^l \left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}x + H\int_0^t \mathrm{d}\varrho\int_0^l \left(\frac{\partial^2\eta(x,\varrho)}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}x\right\}$$

soddisfa per $0 \leqslant t \leqslant h$ alla diseguaglianza

$$(19)\qquad \Phi(t) \leqslant M\int_0^t \Phi(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\,,$$

ed è quindi, per il lemma di GRONWALL [**8**], identicamente nulla in $[0, h]$. Allora, ragionando come in [**2**], $\eta \equiv 0$ in $[0, h]$.

Quanto detto per l'intervallo $(0, h)$ si può ripetere successivamente per gli intervalli $[h, 2h]$, $[2h, 3h]$, ..., $[nh, (n+1)h]$, ...; si ottiene quindi che $\Phi(t)$ — e di conseguenza $\eta(x, t)$ — è identicamente nulla per ogni $t \geqslant 0$.

L'unicità è quindi provata.

4. – Il teorema di unicità può essere facilmente provato anche nel caso in cui si consideri una diversa schematizzazione degli attriti interni; quella, cioè, in cui si pensi valida fra σ e ε una relazione del tipo

$$\sigma = E\varepsilon + kE\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} \tag{20}$$

essendo k un coefficiente positivo dipendente dal materiale di cui è costituita la trave. Da tale ipotesi, fatta per la prima volta da W. Voigt [**9**] e considerata successivamente anche da altri autori [**10**], [**11**], [**12**] consegue che le piccole vibrazioni trasversali della trave sono rette dall'equazione differenziale

$$kEJ\frac{\partial^5\eta}{\partial x^4\,\partial t} + EJ\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4} + \beta\frac{\partial\eta}{\partial t} + \mu\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + Q\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - \frac{\mu J}{A}\frac{\partial^4\eta}{\partial x^2\,\partial t^2} = 0 \tag{21}$$

che coincide con la (2) del lavoro citato [**2**] salvo l'aggiunta del termine $kEJ(\partial^5\eta/(\partial x^5\,\partial t))$. Le condizioni al contorno, nel caso attuale, coincidono con le (3) di [**2**], salvo l'aggiunta del termine $k(\partial^3\eta/(\partial x^2\,\partial t))_{x=l}$ nel primo membro della terza e del termine $k(\partial^4\eta/(\partial x^3\,\partial t))_{x=l}$ nel primo membro della quarta.

Supposta l'esistenza di una soluzione $\eta_1(x, t)$ del problema e detta $\eta_1(x, t) + \eta(x, t)$ un'altra eventuale soluzione, si ha che $\eta(x, t)$ deve soddisfare a condizioni analoghe alle (4), (5), (6) di [**2**] con le modifiche di cui sopra. Inoltre la terza condizione al contorno diventa

$$\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)_{x=l} + k\left(\frac{\partial^3\eta}{\partial x^2\,\partial t}\right)_{x=l} = 0 \tag{22}$$

che è un'equazione differenziale lineare, omogenea, a coefficienti costanti, del primo ordine in $(\partial^2\eta/\partial x^2)_{x=l} = \partial^2\eta(l, t)/\partial x^2$. Essa, dovendo soddisfare alla condizione iniziale $\partial^2\eta(l, 0)/\partial x^2 = 0$ ci porta a concludere che, per ogni t, $(\partial^2\eta/\partial x^2)_{x=l} \equiv 0$.

Allora, moltiplicando ambo i membri di (21) per $\partial\eta/\partial t$ e procedendo come in [2], si ottiene la diseguaglianza

$$
(23)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{m\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2_{x=l} + EJ\displaystyle\int_0^l\left(\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^2\mathrm{d}x + \mu\displaystyle\int_0^l\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial t}\right)\mathrm{d}x + \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{\mu J}{A}\displaystyle\int_0^l\left(\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial t}\right) - Q\displaystyle\int_0^l\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x\right\} = \\ = \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial t}\right)\Delta F - \beta\displaystyle\int_0^l\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x - kEJ\displaystyle\int_0^l\left(\dfrac{\partial^3\eta}{\partial x^2\,\partial t}\right)^2\mathrm{d}x \leqslant \\ \leqslant N\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2_{=l} - \beta\displaystyle\int_0^l\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x \end{cases}
$$

del tutto identica alla (8) di [2].

Quindi supponendo

$$
(24)\qquad Q \leqslant \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}
$$

si prova nello stesso modo che $\eta(x, t)$ è identicamente nulla e quindi la soluzione del problema, se esiste, è unica.

Bibliografia.

[1] L. Caprioli, *Teoremi di unicità per problemi meccanici con condizioni al contorno non lineari,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **12** (1962-63), 129-135; **15** (1966), 22-25.

[2] G. L. Caraffini, *Su un teorema di unicità per le vibrazioni della trave elastica,* Riv. Mat. Univ. Parma (2) **9** (1968), 203-209.

[3] R. Nardini, *Sull'equazione del moto di una trave elastica con ereditarietà,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **4** (1950), 68-87.

[4] V. Volterra, *Vibrazioni elastiche nel caso dell'eredità,* Rend. Accad. Naz. Lincei (5) **21** (1912).

[5] E. Volterra, *Problemi dinamici della trave in regime ereditario,* Rend. Accad. Naz. Lincei (8) **2** (1947), 42-47, 178-180.

[6] D. Graffi, *Sulla teoria delle oscillazioni libere in un sistema soggetto a forze elastiche con ereditarietà,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **3** (1948-49), 227-247.

[7] V. VOLTERRA, *Leçons sur les équations intégrales et intégro-differentielles*, Gauthier-Villars, Paris 1915. (Cfr. p. 51).

[8] G. SANSONE, *Equazioni Differenziali nel Campo Reale*, Vol. I, Zanichelli, Bologna 1948. (Cfr. pp. 30-31).

[9] W. VOIGT, *Annalen der Physik* (2) **47** (1892). (Cfr. p. 671).

[10] K. MUTO, *Biegungschwingungen mit Berücksichtigung der Stabmasse und der aüsseren und inneren Dämpfung*, Ztschr. f. angew. Math. und Mech. **10** (1930), 346-353.

[11] S. FLÜGGE, *Handbuch der Physik*, vol. VII, Springer, Berlin 1958. (Cfr. p. 269).

[12] M. K. NEWMAN, *Viscous Damping in Flexural Vibrations of Bars*, J. Appl. Mech., **81** (1959), 367-385.

Riassunto.

Si dimostra un teorema di unicità per le piccole vibrazioni di una trave viscoelastica, autosostenute da attrito solido, considerando la viscoelasticità di tipo ereditario. Si dimostra poi un analogo teorema con un diverso tipo di viscoelasticità.

Summary.

A uniqueness theorem for small vibrations of a viscoelastic beam is given, where viscoelasticity is assumed of hereditary type. Another model of viscoelasticity is also considered.

* * *