Riv. Mat. Univ. Parma (3) 1 (1972) 61-71

MARIO SERVI (*)

Paracompletezza e isolamento. (**) (***)

1. - Limiti e colimiti.

Uno *schema di diagrammi* è una terna $\Sigma = (I, M, d)$, dove I, M sono insiemi disgiunti (detti rispettivamente insieme dei *vertici* e insieme delle *frecce*) e $d\colon M \to I \times I$. Data una categoria K, si chiama *diagramma in* K *su* Σ una funzione $D\colon I \cup M \to K$ che associa a ciascun vertice di Σ un oggetto di K e a ciascuna freccia di Σ un morfismo di K in modo tale che se $m \in M$ e $d(m) = \langle i, j\rangle$, allora $D(m)\colon D(i) \to D(j)$. Talvolta il diagramma D viene indicato impropriamente con $(D_i)_{i\in I}$.

Sia ora $X \in \operatorname{Ob} K$ ed $(X \to D_i)_{i\in I}$ una famiglia di morfismi. Si dice che essa è *compatibile* per D, se per ogni freccia $m \in M$, con $d(m) = \langle i, j\rangle$ è commutativo il triangolo

$$\begin{tikzcd} & D_i \arrow[dd, "D(m)"] \\ X \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & D_j \end{tikzcd}$$

Una famiglia $(X \to D_i)_{i\in I}$ compatibile per D si chiama un *limite* per D, se per ogni famiglia compatibile $(Y \to D_i)_{i\in I}$ *esiste uno ed un solo* morfismo $Y \to X$ tale che siano commutativi tutti i triangoli

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dd] \arrow[dr] & \\ & D_i \\ X \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad (i \in I)$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro Applicazioni.—Ricevuto: 10-XII-1971.

(***) Il lavoro inizia con una parte espositiva (nn. 1-3, cfr. ad esempio [3] e [4]).

L'importanza del concetto di limite è ben nota; basti ricordare che il prodotto di una famiglia di oggetti è il limite del diagramma privo di frecce ed avente per vertici quegli oggetti; l'intersezione di due sottoggetti $B \rightarrowtail C$, $A \rightarrowtail C$ di un oggetto C è il limite del diagramma $B \rightarrow C \leftarrow A$; il pull-back è anche esso un limite ecc. Una categoria K si dice *completa* se ciascun diagramma in K ammette limite, si dice *finitamente completa* se ogni diagramma finito ammette limite.

Una categoria è (finitamente) completa se e solo se ammette intersezioni e prodotti (finiti). La categoria degli insiemi risulta perciò completa.

I concetti introdotti si possono dualizzare e giungere a parlare di *colimiti* e di *cocompletezza*. Ad esempio, nella categoria degli insiemi, il coprodotto di una famiglia di insiemi è dato dalla loro unione disgiunta con le iniezioni canoniche. Il colimite di una famiglia filtrante a destra è il limite diretto. La cointersezione di due quozienti di un'algebra (nella categoria associata ad una varietà di algebre) è il quoziente fatto rispetto alla congruenza «unione» delle congruenze associate ai quozienti dati. Gli esempi si potrebbero moltiplicare, ma il concetto di colimite non ha interesse ai fini della presente esposizione.

2. - Immagine forte.

Sia $A \xrightarrow{f} B$ un'applicazione, cioè un morfismo della categoria degli insiemi. Il codominio C di f è un sottoggetto di B detto anche *immagine* di f. È noto come il concetto di immagine possa essere esteso alle categorie astratte, tuttavia per certi fini ha più interesse una generalizzazione più restrittiva, quella di *immagine forte* di un morfismo. Sia dunque $A \xrightarrow{f} B$ un morfismo in K. Se f si può scomporre nel prodotto di una ritrazione φ per un monomorfismo w,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & B \\ & C \arrow[ur, "w"'] & \end{tikzcd}$$

si chiama *immagine forte* di f il sottoggetto $[w]$ di B rappresentato da w. Si dimostra che tale definizione è lecita, nel senso che, se $w\varphi = w'\varphi' = f$ sono due tali scomposizioni, allora w e w' determinano lo stesso sottoggetto di B.

Il concetto di immagine forte può essere presentato anche in altro modo. Supponiamo intanto che φ' sia un inverso destro di φ: $\varphi\varphi' = 1_C$. È facile osservare che

(i) $\langle C \xrightarrow{\varphi'} A,\ C \xrightarrow{w} B \rangle$ è una famiglia compatibile per il diagramma

$$(D) \qquad A \xrightarrow{f} B\ ;$$

(ii) sia $\langle X \xrightarrow{x} A,\ X \xrightarrow{y} B\rangle$ una famiglia compatibile per (D); esiste allora uno ed un sol morfismo $\alpha\colon X \to C$ tale che sia commutativo il triangolo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "y"] & \\ & B \\ C \arrow[ur, "w"'] & \end{tikzcd}$$

Si sarà osservato che $\langle C \xrightarrow{\varphi'} A,\ C \xrightarrow{w} B\rangle$ non è necessariamente un limite per (D) giacchè non si chiede che $\varphi'\alpha = x$. Vedremo in seguito che si può parlare di «pseudolimite di (D) rispetto a B».

Viceversa, sia $\langle C \xrightarrow{\varphi'} A,\ C \xrightarrow{v} B\rangle$ una famiglia soddisfacente (i) e (ii). Allora v è un monomorfismo e $[v]$ è immagine forte di f.

Prima di passare alla definizione generale di pseudolimite, vediamone un altro esempio. Sia $R \xrightarrow{u} A \times B$ una corrispondenza fra A e B (¹) e sia $j\colon A' \to A$ un sottoggetto di A. Consideriamo il diagramma

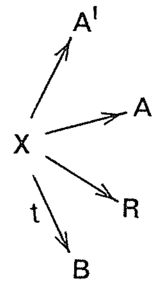
$$(D) \qquad \begin{tikzcd} A' \arrow[r, tail, "j"] & A & \\ & R \arrow[u, "\varepsilon_1 u"'] \arrow[r, "\varepsilon_2 u"] & B. \end{tikzcd}$$

Sia

$$\begin{tikzcd} & A' & \\ & & A \\ C \arrow[uur, "\alpha'"] \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "i"'] & & R \\ & B & \end{tikzcd}$$

(¹) Per questo ed altri concetti contenuti nel presente paragrafo, cfr. **[3]**, **[4]**.

una famiglia compatibile per (D), tale che per ogni altra famiglia compatibile



esista uno ed un sol morfismo $X \to C$ con $X \to C \xrightarrow{i} B = X \xrightarrow{t} B$. Allora i è un monomorfismo e il sottoggetto di B da esso rappresentato resta determinato dalla corrispondenza $[u]$ e dal sottoggetto $[j]$. Esso viene detto *l'immagine di* $[j]$ *in* $[u]$. La giustificazione di tale denominazione risiede nel fatto che nella categoria degli insiemi, l'immagine di un sottinsieme di A in una corrispondenza R fra A e B soddisfa le precedenti condizioni, qualora i sia l'inclusione ed α', α, ϱ siano opportunamente definiti.

3. - Pseudolimiti.

Possiamo ora dare la definizione di pseudolimite.

Sia $D = (D_i)_{i \in I}$ un diagramma e sia $i_0 \in I$ un suo vertice. Diremo *pseudolimite di* D *rispetto ad* i_0 una famiglia $(X \to D_i)_{i \in I}$ compatibile per D tale che per ogni famiglia compatibile $(Y \to D_i)_{i \in I}$ esista uno ed un sol morfismo $Y \to X$ tale che $Y \to X \to D_{i_0} = Y \to D_{i_0}$.

Balza all'occhio una certa somiglianza fra il concetto di limite e quello di pseudolimite. Nel presente paragrafo cercherò di chiarirne i mutui rapporti, mentre nel successivo cercherò di caratterizzare in modo diverso gli pseudolimiti nella categoria degli insiemi, allo scopo di illustrarne il significato.

Osserviamo anzitutto che se $(X \to D_i)_{i \in I}$ è un limite per D, esso è anche uno pseudolimite rispetto a quegli $i \in I$ per cui $X \to D_i$ è un monomorfismo. Valgono inoltre le seguenti proposizioni [2]:

Proposizione 1. Se $(X \to D_i)_{i \in I}$ è uno pseudolimite rispetto ad i_0, allora il morfismo $X \to D_{i_0}$ è un monomorfismo.

---

[2] La dimostrazione delle Proposizioni 1-5 si può trovare in [**3**].

Proposizione 2. Due pseudolimiti di D rispetto ad i_0 determinano lo stesso sottoggetto di D_{i_0}.

Definizione. Se $u\colon C \to D_{i_0}$ rappresenta il sottoggetto di D_{i_0} determinato dallo pseudolimite di D rispetto ad i_0, diremo che $[u]$ è il *sottoggetto di D_{i_0} pseudolimite in D.*

Proposizione 3. L'immagine forte di un morfismo $f\colon A \to B$ è il sottoggetto di B pseudolimite nel diagramma $A \xrightarrow{f} B$.

Proposizione 4. Sia D un diagramma, sia $(X \xrightarrow{m_i} D_i)_{i\in I}$ un limite per D e sia $0 \in I$. Se $X \xrightarrow{\varphi} K \xrightarrow{w} D_0 = X \xrightarrow{m_0} D_0$, con $\varphi\varphi' = 1_K$, allora $(K \xrightarrow{n_i} D_i)_{i\in I}$ è uno pseudolimite per D rispetto a D_0, qualora si sia posto $n_i = m_i\varphi'$ $(i \in I)$ (3).

Corollario. *Una categoria completa con immagini forti ammette pseudolimiti.*

Definizione. Diremo (*finitamente*) *paracompleta* una categoria in cui ogni diagramma (finito) ammetta pseudolimite rispetto a ciascuno dei suoi vertici.

Dal precedente Corollario segue che la categoria degli insiemi è paracompleta.

Proposizione 5. (Inversa della 4). Sia D un diagramma, sia $(X \xrightarrow{m_i} D_i)_{i\in I}$ un limite per D e $(X \xrightarrow{n_i} D_i)_{i\in I}$ uno pseudolimite per D rispeto a D_0. Allora n_0 è l'immagine forte di m_0.

4. - Pseudolimiti nella categoria degli insiemi.

Nel presente paragrafo faremo esclusivo riferimento alla categoria E degli insiemi. Anzitutto, associamo a ciascun diagramma (puntato) finito D di E una formula ben formata della teoria degli insiemi (4), come segue.

Siano $A_0, A_1, \dots A_n$ i vertici di D e siano $f_1, \dots, f_m$ le sue frecce; per ogni $j = 1, 2, \dots, m$, indichiamo con aj, bj rispettivamente i due indici tali che $f_j\colon A_{aj} \to A_{bj}$; ovviamente sarà $0 \leqslant aj$, $bj \leqslant n$. Si ponga:

$$\mathcal{B}(x_0, x_1, \dots, x_n) = (x_0 \in A_0 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n \wedge f_1(x_{a1}) = x_{b1} \wedge \dots \wedge f_m(x_{am}) = x_{bm})\,.$$

(3) Diremo, per abuso di linguaggio, *pseudolimite rispetto a D_{i_0}*, anzichè *pseudolimite rispetto ad i_0*.

(4) Ad esempio, ZF + AC, cfr. [2].

Diremo *associata a* D la seguente formula:

$$\mathcal{A}(x_0) = (\exists x_1)(\exists x_2) \dots (\exists x_n)\ \mathcal{B}(x_0, x_1, \dots, x_n) .$$

Con queste notazioni si hanno i seguenti due teoremi:

Teorema 1. *Sia* B *un insieme tale che*

$$(\forall x_0)(x_0 \in B \leftrightarrow x_0 \in A_0 \wedge \mathcal{A}(x_0)) . \tag{1}$$

Allora $B \subseteq A_0$ *rappresenta il sottoggetto di* A_0 *pseudolimite in* D.

Dimostrazione. Poichè

$$(\forall x_0 \in B)(\exists x_1, \dots, x_n)\ \mathcal{B}(x_0, \dots, x_n) ,$$

possiamo (*usando l'assioma di scelta*) definire n funzioni $g_1, \dots, g_n$ tali che $(\forall x_0 \in B)\ \mathcal{B}(x_0, g_1(x_0), \dots, g_n(x_0))$. Ma

$$\mathcal{B}(x_0, x_1, \dots, x_n) \to x_0 \in A_0 \wedge x_1 \in A_1 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n$$

per cui $g_i: B \to A_i$, $(i = 1, 2, \dots, n)$. Si ponga inoltre $g_0: B \subseteq A_0$. Ne segue

$$(\forall x_0 \in B)\big(f_1(g_{a1}(x_0)) = g_{b1}(x_0) \wedge \dots \wedge f_m(g_{am}(x_0)) = g_{bm}(x_0)\big)$$

da cui $f_j \circ g_{aj} = g_{bj}$ $(j = 1, 2, \dots, m)$. Queste uguaglianze esprimono che la famiglia $\langle g_0, g_1, \dots, g_n \rangle$ è compatibile per D. Sia ora $\langle h_0, h_1, \dots, h_n \rangle$ compatibile per D, con $h_i: X \to A_i$. Allora, per ogni $x \in X$, si ha $f_j(h_{aj}(x)) = h_{bj}(x)$, quindi $\mathcal{B}(h_0(x), h_1(x), \dots, h_n(x))$. Ne segue che $(\exists x_1, x_2, \dots, x_n)\ \mathcal{B}(h_0(x), x_1, \dots, x_n)$, cioè $\mathcal{A}(h_0(x))$. Dalla (1) segue allora $h_0(x) \in B$, $(\forall x \in X)$. Di qui si ha che

$$X \xrightarrow{h_0} B \subseteq A_0 = X \xrightarrow{h_0} A_0$$

e risulta così soddisfatta anche la seconda condizione perchè $\langle g_0, \dots, g_n \rangle$ sia uno pseudolimite di D rispetto ad A_0.

Teorema 2. *Esista il sottoggetto di* A_0 *pseudolimite in* D *e sia* $g_0: B \to A_0$ *un suo rappresentante. Allora si ha*:

$$(\forall x_0)(x_0 \in g_0[B] \leftrightarrow x_0 \in A_0 \wedge \mathcal{A}(x_0)) .$$

Dimostrazione. Sia dunque $G = \langle g_0, \ldots, g_n \rangle$ uno pseudolimite di D, con $g_i : B \to A_i$. Dalla compatibilità di G si ottiene intanto

$$f_j \circ g_{aj} = g_{bj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{2}$$

Sia ora $x_0 \in g_0[B]$ e sia $y \in B$ tale che $x_0 = g_0(y)$. Dalla (2) si avrà $f_j(g_{aj}(y)) = g_{bj}(y)$ e quindi $\mathcal{B}(x_0, g_1(y), \ldots, g_n(y))$. Ne segue $(\exists x_1, \ldots, x_n)\, \mathcal{B}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ cioè $x_0 \in A_0 \wedge \mathcal{A}(x_0)$.

Viceversa, sia $x_0 \in A_0 \wedge \mathcal{A}(x_0)$. Posto $X = \{x_0\}$, si possono trovare n funzioni $h_1, \ldots, h_n$, con $h_i : X \to A_i$ tali che $\mathcal{B}(x_0, h_1(x_0), \ldots, h_n(x_0))$. Posto poi $h_0 : X \subseteq A_0$, si ha che la famiglia $\langle h_0, \ldots, h_n \rangle$ è compatibile per D. Dalle ipotesi su G, segue allora che esiste una funzione $h : \{x_0\} \to B$ tale che $g_0 \circ h = h_0$; essendo h_0 una inclusione, si ottiene $x_0 = h_0(x_0) = g_0(h(x_0))$, da cui $x_0 \in g_0[B]$, giacchè $h(x_0) \in B$.

Se $\mathcal{A}(x_0)$ è una qualunque formula ben formata della teoria degli insiemi, lo schema di assiomi di isolamento ci assicura l'esistenza di un insieme B soddisfacente la (1). Uno schema più debole si ottiene ovviamente se si richiede l'esistenza di un tale B per ogni formula $\mathcal{A}(x_0)$ *che sia associata ad un diagramma finito*. I rapporti fra questa forma debole dell'isolamento, la scelta e l'esistenza degli pseudolimiti verranno indagati nel prossimo paragrafo.

5. - Paracompletezza, scelta e isolamento.

È ben noto come da ogni modello E di ZF (5) si possa ottenere una categoria prendendo le applicazioni come morfismi e la consueta composizione peirciana come composizione. Si osservi, tuttavia, che pur lasciando cadere alcuni assiomi di ZF, è ancora possibile dare ad E una struttura di categoria. Per semplicità conviene includere nel linguaggio, oltre il predicato binario $\in$, i simboli funzionali binari $\{x, y\}$, $x \circ y$, $x \times y$, i simboli funzionali unari $\mathrm{P}(x)$, $\mathrm{D}(x)$, $\mathrm{C}(x)$, $\cup x$, $x^\wedge$, Δx, e la costante individuale $\emptyset$.

Diciamo T la teoria con uguaglianza avente i seguenti assiomi specifici:

Assioma dell'insieme vuoto:

$$x \notin \emptyset\,. \tag{A0}$$

Assioma di estensionalità:

$$(\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y\,. \tag{A1}$$

(5) Per questo e per gli altri concetti insiemistici, cfr. ad esempio [2].

Assioma della coppia:

(A2) $$z \in \{x, y\} \leftrightarrow z = x \vee z = y \ . \ ^{(6)}$$

Assioma dell'unione:

(A3) $$y \in \cup x \leftrightarrow (\exists z)(z \in x \wedge y \in z) \ .$$

Con gli assiomi precedenti, possiamo definire, come di consueto, il simbolo funzionale unario $\{x\} =_{df} \{x, x\}$ e il simbolo funzionale binario

$$\langle x, y \rangle =_{df} \{\{x\}, \{x, y\}\} \ ,$$

e il predicato binario $\subseteq$.

Assioma della potenza:

(A4) $$y \in \mathrm{P}(x) \leftrightarrow y \subseteq x \ .$$

Assioma del prodotto cartesiano:

(A5) $$z \in x \times y \leftrightarrow (\exists u)(\exists v)(u \in x \wedge v \in y \wedge z = \langle u, v \rangle) \ .$$

Assioma del prodotto peirciano:

(A6) $$z \in y \circ x \leftrightarrow (\exists u)(\exists v)(\exists w)(\langle u, v \rangle \in x \wedge \langle v, w \rangle \in y \wedge z = \langle u, w \rangle) \ .$$

Assioma del dominio:

(A7) $$y \in \mathrm{D}x \leftrightarrow (\exists z)(\langle y, z \rangle \in x) \ .$$

---

(6) Talvolta si chiama «assioma della coppia» la seguente formula, più debole della (A2):

(A2′) $$(\exists z)(x \in z \wedge y \in z) \ .$$

La (A2′) equivale alla (A2) sotto l'isolamento. Analoghe considerazioni valgono per gli altri assiomi. Potremmo dunque dire che gli assiomi di T comprendono alcune istanze dello schema di isolamento.

Assioma del codominio:

(A8) $$y \in \mathrm{C\!I}x \leftrightarrow (\exists z)(\langle z, y\rangle \in x) .$$

Assioma dell'inverso:

(A9) $$t \in x^{\wedge} \leftrightarrow (\exists y)(\exists z)(\langle z, y\rangle \in x \wedge t = \langle y, z\rangle) .$$

Assioma della diagonale:

(A10) $$y \in \Delta x \leftrightarrow (\exists z)(z \in x \wedge y = \langle z, z\rangle) .$$

Si possono ora dare le consuete definizioni di «relazione», «funzione», «applicazione» ecc. In particolare, con $A \overset{a}{\to} B$ intenderemo: $(\exists f)(f$ è funz.$\wedge$ $\wedge \mathrm{D}f = A \wedge \mathrm{C\!I}f \subseteq B \wedge a = \langle B, f\rangle)$.

È chiaro ora come si possa dare una struttura di categoria ad ogni modello E di T. Basterà porre:

1) $E[A, B] = \{a \mid A \overset{a}{\to} B\}$;

2) se $A \overset{a}{\to} B$ e $B \overset{b}{\to} C$, con $a = \langle B, f\rangle$ e $b = \langle C, g\rangle$, allora $ba =_{df} \langle C, g \circ f\rangle$;

3) $1_A =_{df} \langle A, \Delta A\rangle$.

Osservazione. È interessante osservare che gli assiomi di T sono ancora sufficienti a dimostrare che *i monomorfismi* (= cancellabili a sinistra) *di* E *sono tutte e sole le applicazioni iniettive.*

Ci proponiamo di studiare le relazioni, in T, fra i seguenti quattro assiomi:

(I) Assioma di isolamento (schema di assiomi): *Per ogni formula ben formata* $\mathcal{A}(x_0)$ *di* T, *è un assioma*

$$(\exists B)(\forall x_0)\big(x_0 \in B \leftrightarrow x_0 \in A_0 \wedge \mathcal{A}(x_0)\big) .$$

(I*) Assioma di isolamento debole (schema di assiomi). *Come* (I), *ma solo per le formule associate a diagrammi finiti* (*nel senso del* n. 4).

(C) Assioma di scelta.

$$(\forall x)(\exists \varphi)\big(\mathrm{D}\varphi = \mathrm{P}(x) \wedge \varphi \textit{ è una funz.} \wedge (\forall y)(y \neq \emptyset \wedge y \subseteq x \to \varphi(y) \in y)\big).$$

(P) Paracompletezza finita (schema di assiomi). *Ogni diagramma finito ammette pseudolimite rispetto a ciascuno dei suoi vertici* (7).

Teorema 3: $(\mathrm{I}), (\mathrm{P}) \vdash_{T} (\mathrm{C})$.

Dimostrazione. Si osservi che nella teoria T' ottenuta da T con l'aggiunta dell'assioma (I), l'assioma (C) ammette la seguente formulazione equivalente (C′):

per ogni funzione f esiste una funzione g tale che $f \circ g = \Delta(\mathrm{C}f)$.

Sia dunque f una funzione. Si ponga $A = \mathrm{D}f$ e $B = \mathrm{C}f$; allora, posto $a = \langle B, f\rangle$, $A \xrightarrow{a} B$ è un diagramma in E. Per l'ipotesi (P), esso ammette uno pseudolimite, e sia

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "a"] & & B \\ & C \arrow[ul, "c"] \arrow[ur, tail, "b"'] & \end{tikzcd}$$

il relativo diagramma, con $b = \langle B, h\rangle$,

---

(7) Sebbene questa formulazione faccia riferimento ai modelli di T, si può in realtà dare una formulazione puramente sintattica delle varie istanze di (P). Si consideri ad esempio il seguente schema puntato di diagrammi:

$$\cdot \rightarrow \odot$$

Abbiamo già introdotto l'abbreviazione $y \xrightarrow{x} z$; usiamo ora il segno $\Rightarrow$ per l'implicazione, onde evitare equivoci. Se t, u, v sono variabili distinte da x, y, z, indichiamo con $\mathrm{Comp}(t, u, v)$ la seguente formula

$$t \xrightarrow{u} y \wedge t \xrightarrow{v} z \wedge x \circ u = v .$$

Con queste posizioni, il diagramma puntato preso in considerazione, fornisce il seguente assioma (da considerarsi appartenente allo schema (P)):

$$y \xrightarrow{x} z \Rightarrow (\exists t)(\exists u)(\exists v)\big(\mathrm{Comp}(t, u, v) \wedge (\forall w)(\forall r)(\forall s)(\mathrm{Comp}(w, r, s) \Rightarrow (\exists ! p)(w \xrightarrow{p} t \wedge v \circ p = s))\big).$$

Per rendere più trasparente l'assioma scritto, si tenga presente la seguente figura:

$$\begin{tikzcd} y \arrow[rr, "x"] & & z \\ & t \arrow[ul, "u"'] \arrow[ur, "v"] & \\ & w \arrow[uul, "r"] \arrow[uur, "s"'] \arrow[u, dashed, "p"] & \end{tikzcd}$$

$c = \langle A, k \rangle$. Poichè b è un monomorfismo, h è una funzione iniettiva e d'altra parte $\mathbb{C}h = B$. Ne segue che $\langle C, h^{\wedge} \rangle : B \to C$.

Si ponga $g = k \circ h^{\wedge}$; si ha:

$$f \circ g = (f \circ k) \circ h^{\wedge} = h \circ h^{\wedge} = \Delta B .$$

Teorema 4: (C), (I*) $\vdash_{\overline{T}}$ (P), *e* (C), (P) $\vdash_{\overline{T}}$ (I*) .

Dimostrazione. Ovvia, in virtù dei Teoremi 1 e 2.

Bibliografia.

[1] B. Mitchell, *Theory of Categories*, Academic Press, New York 1965.

[2] J. L. Krivine, *Théorie Axiomatique des Ensembles*, Presses Universitaires de France, Paris 1969.

[3] M. Servi, *Alcune proprietà delle Relazioni su un Oggetto di una Categoria*, Symposia Mathematica, vol. V Academic Press, New York 1971.

[4] M. Servi, *Questioni di algebra universale in una categoria astratta*, I, Ann. Univ. Ferrara **13** (1968), 93-116.

* * *