Riv. Mat. Univ. Parma (3) 1 (1972). 125-142

GIOVANNI FERRERO (*)

Deformazioni, raffinamenti e composizioni di funzioni di Steiner. (I) (**)

Introduzione.

Numerare e classificare i sistemi di Steiner di dato ordine dà luogo a difficili problemi a proposito dei quali si conoscono per ora soltanto risultati parziali (1). Ai sistemi di Steiner regolari sono strettamente legate le funzioni di Steiner (2); vogliamo qui continuare le ricerche in proposito raccogliendo considerazioni che permettono di costruire funzioni di Steiner a partire da funzioni di Steiner date: numerare e classificare le funzioni di Steiner definite su un dato gruppo (ed indicare i rispettivi moltiplicatori) può infatti contribuire allo studio anche numerativo dei sistemi di Steiner regolari. Pare che anche a questo proposito tuttavia si possano ottenere per ora soltanto risultati parziali.

Nella presente pubblicazione, dette egualmente fini due funzioni di Steiner α, α' tali che i gruppi di Steiner Σ_α, $\Sigma_{\alpha'}$ ammettano le stesse traiettorie, noi riusciamo fra l'altro ad indicare tutte le funzioni di Steiner fini quanto una funzione data. I sistemi di Steiner associati ad una funzione α' fine quanto la α potranno essere detti ottenuti per *deformazione* dal sistema di Steiner associato ad α.

Considerazioni complementari permetteranno di generalizzare un recente risultato relativo all'esistenza di sistemi di Steiner isomorfi e disgiunti (3), di fornire una risposta al problema II di DOYEN [5], e di discutere i problemi I, IV, di detto lavoro.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito con il contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro applicazioni. — Ricevuto: 21-IX-1972.

(1) Cfr. [**3**], [**4**], [**5**] per notizie storiche.

(2) Cfr. [**8**], [**9**], [**10**], ma anche [**1**].

(3) Cfr. [**2**]; una generalizzazione analoga è ottenuta con altro metodo in [**5**], cui anche rimandiamo per notizie storiche sulla questione.

Altri metodi per costruire funzioni di Steiner [4] ed altre applicazioni saranno pubblicati nella seconda parte del lavoro.

Molti dei nostri risultati saranno espressi per brevità in forma numerativa, anche se per ora siamo soprattutto interessati ai problemi di costruzione e classificazione. Alcuni complementi hanno lo scopo di suggerire vie per migliorare i nostri risultati; noi ci siamo astenuti dal perseguire quei miglioramenti che, per quanto immediati, avrebbero portato ad enunciati più complessi ma comunque non definitivi.

1. - Richiami e Premesse.

1. – Richiamiamo anzitutto qualche considerazione di [**8**] e [**9**]. Sia G un gruppo additivo [5]. Chiamiamo funzione di Steiner definita su G ogni involuzione α di G su G [6] la quale tenga fermo l'elemento neutro 0 di G e tale che $(\forall x \in G)$ soddisfi alla condizione

$$\alpha(-x) = \alpha(x) - x\,. \tag{F'}$$

Se G è un gruppo ed α è una funzione di Steiner definita su G, allora le terne $\{a, b, \alpha(b-a)+a\}$ $(a \neq b;\ a, b \in G)$ formano un sistema (di terne) di Steiner il quale ammette come gruppo di automorfismi il cayleiano destro di G [7]. Pertanto, nel caso finito, l'ordine di G è congruo ad 1 oppure a 3 modulo 6. Abbiamo mostrato in [**10**] che ampie classi di gruppi (eventualmente non abeliani) ammettono funzioni di Steiner; ricordiamo che tuttavia il gruppo ciclico di ordine 9 non ammette funzioni siffatte, anche se il suo ordine è congruo a 3 modulo 6.

Dato un gruppo additivo G indichiamo con i (e chiamiamo inversione) la funzione che manda ogni elemento di G nel suo opposto. Se α è una funzione di Steiner definita in G chiamiamo gruppo di Steiner associato ad α il gruppo Σ_α (di permutazioni sul sostegno di G) generato da α e dall'inversione i. Un gruppo di Steiner è un gruppo non abeliano di ordine 6 oppure un gruppo di ordine 2, come risulta subito dal teorema 1 di [**9**]. Pertanto le sue traiettorie sono formate da 6,2 oppure un solo elemento [8].

---

(4) E in particolare quello di *raffinamento*, piuttosto prevedibile dopo quanto ora pubblichiamo.

(5) Non necessariamente abeliano.

(6) Che, salvo eccezioni, non sarà un automorfismo di G. Cfr. il teorema 6 di [**8**].

(7) Cfr. [**8**]. Dobbiamo tuttavia osservare che solo ora ci siamo accorti che tale osservazione era già stata introdotta ed utilizzata nell'appendice di [**1**].

(8) Cfr. il corollario 3 di [**9**].

Chiamiamo traiettorie *fini* quelle costituite da due elementi, traiettoria *banale* l'unica traiettoria formata da un solo elemento (9). Gli elementi di una traiettoria fine di Σ_α hanno tutti caratteristica (10) tre, e la funzione α li scambia tra loro (11). Nel caso finito un gruppo di Steiner ammette traiettorie fini se e solo se l'ordine del gruppo G su cui è definito è congruo a 3 modulo 6 (12).

Chiamiamo moltiplicatori della funzione di Steiner α definita su G tutti gli automorfismi di G permutabili con α (13). Chiaramente i moltiplicatori di una funzione di Steiner data formano (con l'ordinario prodotto di composizione) un gruppo, non necessariamente abeliano.

2. – Un primo mezzo (non estremamente efficace) per costruire funzioni di Steiner a partire da una funzione di Steiner data è fornito dalla

Osservazione 1. *Siano G un gruppo, α una funzione di Steiner definita su G, e sia φ un automorfismo di G. Allora la funzione $\alpha^\varphi = \varphi \bigcirc \alpha \bigcirc \varphi^{-1}$ è ancora una funzione di Steiner definita su G. Inoltre il sistema di Steiner associato ad α^φ (14) è isomorfo a quello associato ad α. Il gruppo dei moltiplicatori di α^φ è simile (15) a quello di α.*

Si vede immediatamente che α^φ è una involuzione che tiene fermo lo zero di G. Inoltre

$$\alpha^\varphi(-x) = \varphi \bigcirc \alpha \bigcirc \varphi^{-1}(-x) = \varphi \bigcirc \alpha(-\varphi^{-1}(x)) = \\ = \varphi\big(\alpha(\varphi^{-1}(x)) - \varphi^{-1}(x)\big) = \alpha^\varphi(x) - x\,,$$

il che completa la dimostrazione della prima parte dell'enunciato.

Siano ora S, S^φ i sistemi di Steiner associati rispettivamente ad α e ad α^φ. La terna generica di S sarà dunque $\{a, b, \alpha(b-a)+a\}$, con $a \neq b$; a, $b \in G$. La terna generica di S^φ può essere scritta nella forma

$$\{\varphi(a), \varphi(b), \alpha^\varphi(\varphi(b) - \varphi(a)) + \varphi(a)\}\,.$$

Si osserva rapidamente che

$$\varphi \bigcirc \alpha \bigcirc \varphi^{-1}(\varphi(b) - \varphi(a)) + \varphi(a) = \varphi \bigcirc \alpha(b-a) + \varphi(a) = \varphi(\alpha(b-a) + a)\,.$$

(9) Che è allora l'elemento neutro di G.
(10) Parliamo di caratteristica anzichè di ordine perchè il gruppo G è additivo.
(11) Cfr. il teorema 2 di [**9**].
(12) Cfr. il corollario 4 di [**9**].
(13) Cfr. [**6**], [**7**], [**9**] anche per precisazioni sull'interesse di tale concetto.
(14) Costruito cioè a partire da α^φ secondo quanto detto nel n. **1**.
(15) Come gruppo di permutazioni sul sostegno di G.

Pertanto φ manda la generica terna di S in una terna di S^φ. Analogamente si vede che φ^{-1} manda la generica terna di S^φ in una terna di S, e questo dimostra la seconda parte dell'enunciato [16].

L'ultima asserzione segue dal fatto che se m è un moltiplicatore di α, allora $\varphi \bigcirc m \bigcirc \varphi^{-1}$ è permutabile con α^φ ed è un automorfismo di G: si tratta dunque di un moltiplicatore di α^φ. Il gruppo dei moltiplicatori di α^φ è dunque il trasformato del gruppo dei moltiplicatori di α fatto mediante φ.

È naturale a questo punto dare la

Definizione I. *Le funzioni α, α' definite sul gruppo G sono coniugate se esiste un automorfismo φ di G tale che $\alpha' = \alpha^\varphi$ $(= \varphi \bigcirc \alpha \bigcirc \varphi^{-1})$.*

L'Osservazione 1 dice allora che una funzione coniugata ad una funzione di Steiner è ancora una funzione di Steiner. Di qui ovviamente il

Corollario 2. *Siano G un gruppo, α una funzione di Steiner definita su G. Sia h l'indice del gruppo M dei moltiplicatori di α entro l'automorfismo A di G. Allora G ammette (almeno) h funzioni di Steiner distinte.*

Si tratta evidentemente delle funzioni coniugate alla α: i dettagli della dimostrazione possono essere omessi.

Le precedenti considerazioni (non certo imprevedibili) segnalano che, se le funzioni di Steiner con molti moltiplicatori sono interessanti dal punto di vista di HALL [17], quelle con pochi moltiplicatori possono meglio contribuire ad ottenere limiti inferiori per il numero delle funzioni di Steiner definite in un gruppo dato.

2. – Continuando la classificazione delle traiettorie di un gruppo di Steiner [18] formuliamo ora la seguente

Definizione II. *Sia T una traiettoria di un gruppo di Steiner Σ_α definito su un gruppo G.*

Diciamo che T è una traiettoria abeliana se i suoi elementi sono due a due permutabili; diciamo che è deformabile se è abeliana ma non fine e non banale.

Diciamo che T è una traiettoria raffinabile se è costituita da sei elementi tutti di caratteristica tre [19].

---

(16) Ricordiamo che un isomorfismo dal sistema di Steiner S al sistema di Steiner S' è una biiezione di S su S' tale che le terne di S' siano tutte e sole le immagini delle terne di S.

(17) Cfr. [**6**], [**7**].

(18) Iniziata in [**9**].

(19) L'ultima parte della definizione, che collochiamo qui per completezza, sarà usata solo nella seconda parte del lavoro.

Ricordiamo (20) che ogni traiettoria fine è abeliana in quanto costituita da due elementi opposti tra loro.

Un elemento $x \in G$ *appartiene ad una traiettoria abeliana* del gruppo di Steiner Σ_α associato alla funzione di Steiner α *se e solo se* x *è permutabile con* $\alpha(x)$. Si verifica infatti subito che la traiettoria T di Σ_α rappresentata da x è formata dagli elementi

$$\text{(E)}\quad x,\, -x,\, \alpha(x),\, -\alpha(x),\, \alpha(-x) = \alpha(x) - x,\, -\alpha(-x) = \alpha(-\alpha(x)) = x - \alpha(x)\,.$$

Tali elementi sono due a due permutabili se e solo se x è permutabile con $\alpha(x)$ (21).

Se tutti gli automorfismi interni del gruppo G sono moltiplicatori per la funzione di Steiner α, *allora tutte le traiettorie di* Σ_α *sono abeliane.* Infatti allora, $\forall x \in G$ vale la $x + \alpha(x) - x = \alpha(x)$ e dunque gli elementi x, $\alpha(x)$ sono permutabili. In particolare, tutte le traiettorie di un gruppo di Steiner definito su un gruppo abeliano sono abeliane.

Un elemento x appartenente ad una traiettoria deformabile T di Σ_α appartiene ad una traiettoria raffinabile se e solo se tanto x che $\alpha(x)$ hanno caratteristica tre. Infatti allora tutti gli elementi di T hanno caratteristica 3, come si verifica subito ad esempio ricordando la precedente enumerazione (E) degli elementi di T.

Definizione III. *Siano* α, α' *due funzioni di Steiner definite sullo stesso gruppo G. Diciamo che* α, α' *sono egualmente fini se i relativi gruppi di Steiner* Σ_α, $\Sigma_{\alpha'}$ *hanno le stesse traiettorie. Diciamo che* α *è meno fine di* α' *se ogni traiettoria di* $\Sigma_{\alpha'}$ *è contenuta in una traiettoria di* α (22). *Se inoltre* α, α' *non sono egualmente fini diremo che* α *è propriamente meno fine di* α'.

In generale due funzioni di Steiner definite sullo stesso gruppo non sono confrontabili dal punto di vista della finezza. Tuttavia si può notare che i sistemi fini di **[9]** (23) provengono da funzioni di Steiner più fini di ogni altra funzione di Steiner definita sullo stesso gruppo; questo giustifica dunque la terminologia di **[9]**.

Una funzione di Steiner propriamente più fine di un'altra è certamente associata ad un gruppo di Steiner dotato di traiettorie fini; pertanto nel caso finito la seconda parte della Definizione III ha interesse solo quando si trattino gruppi il cui ordine è congruo a 3 modulo 6 (24).

---

(20) Cfr. **[9]**.
(21) Cfr. anche la prima parte di **[9]** per un ulteriore inquadramento della situazione.
(22) E, in tali condizioni, diremo anche che α' è più fine di α.
(23) Corrispondenti al caso in cui Σ_α ha ordine 2 e cioè $\alpha = i$.
(24) Si ricordi il corollario 4 di **[9]**.

2. - Deformazioni.

3. – Vogliamo ora individuare tutte le funzioni di Steiner fini quanto una data funzione di Steiner α: diremo, all'occasione, che tali funzioni possono essere costruite per *deformazione* della funzione iniziale α.

Lemma 3. *Sia α una funzione di Steiner definita sul gruppo additivo G. Sia T una traiettoria del gruppo di Steiner Σ_α associato ad α. Si consideri la funzione α' che opera come la α su $G-T$* (25) *e che opera come la $i \bigcirc \alpha \bigcirc i$ su T. Allora α' è una funzione di Steiner (che risulta fine quanto la α) se e solo se T è una traiettoria abeliana* (26).

Si nota subito che in ogni caso α' è una involuzione che tiene fermo lo zero di G. Se inoltre $x \in G-T$ è $\alpha'(-x) = \alpha'(x) - x$ perchè anche $-x$ appartiene a $G-T$ (27), e dunque $\alpha'(-x) = \alpha(-x)$. Se invece $x \in T$ è, per le posizioni iniziali, $\alpha'(x) = -\alpha(-x) = x - \alpha(x)$.

Supponiamo ora che T sia una traiettoria abeliana, e sia sempre $x \in T$. Si vede che allora $\alpha'(-x) = -\alpha(x)$. D'altra parte $\alpha'(x) - x = x - \alpha(x) - x = -\alpha(x)$, per quanto sopra osservato e perchè T è una traiettoria abeliana. L'ultima formula vale anche per $x \in G-T$ perchè α è di Steiner e in definitiva, $\forall x \in G$ è $\alpha'(-x) = \alpha(x) - x$. Ne segue infine che anche α' è di Steiner.

Inoltre α, α' sono egualmente fini perchè la T è ancora una traiettoria di $\Sigma_{\alpha'}$, come subito si verifica. La prima parte dell'enunciato è così dimostrata.

Supponiamo viceversa che α' sia una funzione di Steiner. Allora, per $x \in T$ è $\alpha'(-x) = \alpha'(x) - x$ e dunque $-\alpha(x) = -\alpha(-x) - x$. Di qui segue che $\alpha(x) = x + \alpha(-x)$. Ma per la (F′) è anche $\alpha(x) = \alpha(-x) + x$, e dunque x è permutabile con $\alpha(-x)$. Naturalmente allora anche $-x$ è permutabile con $\alpha(-x)$ e (se vogliamo, per una delle osservazioni che commentano la Definizione II) l'elemento $-x$ appartiene ad una traiettoria abeliana di $\sum_\alpha$. Poichè del resto $-x \in T$ (28) risulta che T è abeliana, come volevamo dimostrare.

Lemma 4. *Sia G un gruppo additivo. Siano α, α' due funzioni di Steiner definite in G. Sia T una traiettoria comune a Σ_α e $\Sigma_{\alpha'}$. In tali condizioni la α' opera su T come la α oppure come la $i \bigcirc \alpha \bigcirc i$.*

---

(25) Qui, come altrove, $A-B$ è l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B.

(26) Naturalmente se T è fine o banale, allora $\alpha = \alpha'$ e l'enunciato perde di interesse. Cfr. il teorema 2 di [**9**].

(27) Si ricordi che l'inversione i appartiene a tutti i gruppi di Steiner e che $G-T$ è unione di traiettorie di Σ_α, oppure si tenga presente (E).

(28) Ricordando come sopra per esempio la (E) e l'osservazione che la precede.

Se T è banale o fine la cosa è ovvia, tosto che si ricordino i richiami del n. **1**.

In generale osserviamo ora che *l'azione di α' in T è perfettamente individuata dall'elemento* $\alpha'(x) = y$ e dall'ipotesi che α' è di Steiner.

Si ha infatti di qui che

$$\alpha'(x) = y\,, \qquad \alpha'(y) = x\,;$$

$$\alpha'(-x) = \alpha'(x) - x = y - x\,, \qquad \alpha'(y - x) = -x\,;$$

$$\alpha'(x - y) = \alpha(y - x) - (y - x) = -x + x - y = -y\,, \qquad \alpha'(-y) = x - y\,.$$

Ora l'insieme degli elementi sopra considerati è appunto la traiettoria di $\Sigma_{\alpha'}$ rappresentata da x (29), e dunque coincide con T. Questo basta a dimostrare l'asserto.

Per dimostrare il Lemma osserviamo anzitutto che esso è, (dopo quanto detto) senz'altro verificato nei casi in cui $\alpha'(x) = x$ oppure $\alpha'(x) = -\alpha(-x)$. Per completare la dimostrazione occorre ancora *considerare le altre quattro possibilità* (30).

1) Se $\alpha'(x) = x$ l'elemento x, tenuto fisso dalla funzione di Steiner α', coincide con l'elemento neutro 0 di G (31), dunque T è banale (32) ed il Lemma è verificato.

2) Se $\alpha'(x) = -x$ la traiettoria T è fine ed il Lemma è verificato (33).

3) Se $\alpha'(x) = \alpha(-x)$ anche $\alpha'(-x) = \alpha'(x) - x = \alpha(x) - 2x$ appartiene a T. Procediamo ancora per casi.

Per i casi in cui $\alpha'(-x) = x$ oppure $\alpha'(-x) = -x$ è sufficiente scrivere $-x$ in luogo di x nei casi 2, 1 precedentemente trattati per vedere che ancora il Lemma è verificato.

Per $\alpha'(-x) = \alpha(-x)$ oppure $\alpha'(-x) = -\alpha(x)$ (34) è sufficiente ricordare la osservazione iniziale (eventualmente scrivendo ancora $-x$ in luogo di x) per constatare che ancora la α' opera su T come la α o rispettivamente come la $i \bigcirc \alpha \bigcirc i$.

Per $\alpha'(-x) = \alpha(x)$ è $\alpha(x) - 2x = \alpha(x)$ e dunque $2x = 0$. Pertanto $x = 0$ (35), e dunque T è banale, ed il Lemma è verificato.

---

(29) Perchè ottenuto trasformando x con gli elementi di $\Sigma_{\alpha'}$.
(30) Tenendo presente la precedente enumerazione (E).
(31) Cfr. l'osservazione 3 di [**8**].
(32) Cfr. [**9**].
(33) Cfr. [**9**].
(34) E dunque $\alpha'(-x) = i \bigcirc \alpha \bigcirc i(x)$.
(35) Per il corollario 4 di [**8**], già ricordato.

Per $\alpha'(x) = -\alpha(-x) = x - \alpha(x)$, ricordando che ora è anche $\alpha'(x) = \alpha(x) - x$, si ha che è anche $\alpha'(-x) = -\alpha'(x)$. Di qui segue che T è fine (cfr. [**9**]).

4) Se $\alpha'(x) = -\alpha(x)$ si vede rapidamente ([36]) che il Lemma è verificato per i casi in cui $\alpha'(-x)$ è eguale ad x, $-x$, $\alpha(-x)$, $-\alpha(x)$.

Per $\alpha'(-x) = \alpha(x)$ basta scrivere $-x$ in luogo di x nell'ultimo sottocaso trattato al punto 3.

Per $\alpha'(-x) = -\alpha(-x)$ consideriamo l'elemento $\alpha'(\alpha(x))$. Ricordando i casi già trattati si ha subito che il Lemma è verificato salvo al più per $\alpha'(\alpha(x)) = -\alpha(\alpha(x)) = -x$. Ma allora $-\alpha(-x) = -x$, e la traiettoria T è banale.

Avendo esaurito i casi ed i sottocasi possibili il Lemma è ora dimostrato.

Corollario 5. *Siano α, α' due funzioni di Steiner definite su uno stesso gruppo G. Supponiamo che Σ_α, $\Sigma_{\alpha'}$ abbiano una traiettoria comune T, ma che α, α' non operino allo stesso modo su T. Allora la traiettoria T è deformabile.*

Infatti allora la α' opera sulla T come la $i \bigcirc \alpha \bigcirc i$ per il Lemma 4. Ricordato che α è di Steiner si vede facilmente che T è una traiettoria abeliana. Inoltre T è addirittura deformabile perchè se fosse banale o fine la α e la $i \bigcirc \alpha \bigcirc i$ vi opererebbero allo stesso modo.

4. – Abbiamo ora gli strumenti per individuare tutte le funzioni di Steiner fini quanto una funzione data.

Teorema 6. *Siano G un gruppo additivo, α una funzione di Steiner definita su G. Supponiamo che Σ_α ammetta (esattamente) k traiettorie deformabili* ([37]). *Allora G possiede esattamente 2^k funzioni di Steiner fini quanto la α* ([38]).

Consideriamo intanto le 2^k funzioni che vanno dall'insieme delle traiettorie deformabili di Σ_α ad un insieme costituito da due elementi distinti f, d. Per ciascuna di tali funzioni φ possiamo definire una funzione α_φ da G a G che operi come la $i \bigcirc \alpha \bigcirc i$ sull'unione D delle traiettorie che φ manda in d e che operi come la α su tutti gli altri elementi di G. Dal Lemma 3 ([39]) si ha subito che ciascuna α_φ è una funzione di Steiner definita su G ([40]). Inoltre al variare di D le funzioni α_φ sopra definite sono tutte distinte perchè in nessuna

---

([36]) Ragionando come poco sopra o ricordando i casi già trattati.

([37]) Qui k è un numero cardinale non necessariamente finito.

([38]) Le funzioni in questione risulteranno anzi individuate nel corso della dimostrazione del Teorema.

([39]) O, se vogliamo, scrivendo D in luogo di T nella prima parte della dimostrazione del Lemma 3.

([40]) Perchè le traiettorie che φ manda in d sono tutte traiettorie deformabili di Σ_α, grazie alle posizioni fatte.

traiettoria deformabile la $i \bigcirc \alpha \bigcirc i$ può operare come la α [41]. Ancora per il Lemma 3 ciascuna α_φ risulta fine quanto la α. *Abbiamo così costruito 2^k funzioni di Steiner fini quanto la α.*

Sia ora α' una funzione di Steiner definita in G e fine quanto la α. Allora ogni traiettoria T di Σ_α è una traiettoria di $\Sigma_{\alpha'}$. Pertanto la α' opera su T come la α oppure come la $i \bigcirc \alpha \bigcirc i$, per il Lemma 4. Se anzi T è banale, fine o non abeliana [42] la α' opera su T esattamente come la α (Corollario 5). Si consideri ora la funzione φ che manda in f le traiettorie deformabili di Σ_α su cui α' opera come la α e manda in d le traiettorie su cui α' opera come la $i \bigcirc \alpha \bigcirc i$. Chiaramente allora $\alpha' = \alpha_\varphi$, e dunque α' è una delle funzioni sopra costruite.

Questo completa la dimostrazione del Teorema.

Corollario 7. *La cardinalità dell'insieme delle funzioni di Steiner definite su un gruppo abeliano infinito G dotato soltanto di un numero finito di elementi di caratteristica 3 è — se non nulla — maggiore di quella del gruppo stesso.*

È sufficiente studiare il caso in cui G ammette una funzione di Steiner α infatti allora la cardinalità k dell'insieme delle traiettorie deformabili di Σ_α è eguale a quella di G stesso [43]; il Corollario è dunque una immediata conseguenza del Teorema 6.

Corollario 8. *Sia α una funzione di Steiner definita su un gruppo finito G di ordine $6k+1$. Supponiamo che tutti gli automorfismi interni di G siano moltiplicatori per la α. Allora G possiede esattamente 2^k funzioni di Steiner fini quanto la α.*

Si nota subito che Σ_α non possiede traiettorie fini [44]; d'altra parte tutte le sue traiettorie sono abeliane [45] perchè gli automorfismi interni di G sono moltiplicatori della α. Ne segue che tutte le traiettorie non banali di Σ_α sono deformabili; poichè ciascuna di tali traiettorie è formata da sei elementi esse sono chiaramente in numero di k. Il Teorema 6 fornisce pertanto subito l'enunciato.

In effetti, per la validità della tesi del Corollario 8, è sufficiente chiedere che tutte le traiettorie di Σ_α siano abeliane.

---

(41) Altrimenti ivi la α opererebbe come la i (per il teorema 1 di [**9**]), e allora la traiettoria in questione sarebbe fine, come più volte osservato.

(42) Avremo modo di incontrare più tardi esempi di gruppi di Steiner dotati di traiettorie non abeliane, costruiti a partire da sistemi fini.

(43) Visto che tutte le traiettorie non banali e non fini di Σ_α sono deformabili, e che le traiettorie fini sono in numero finito.

(44) Per il corollario 4 di [**9**]: sia G un gruppo finito. Un gruppo di Steiner definito in G ammette traiettorie fini se e solo se l'ordine di G è congruo a 3 modulo 6.

(45) Per uno dei commenti alla Definizione II.

Consideriamo, *a titolo di esempio*, un gruppo G non abeliano di ordine pq (p, q numeri primi congrui ad 1 modulo 6). Ciascuno dei suoi sottogruppi proprii, avendo ordine p oppure q, ammetterà una funzione di Steiner (46). L'unione di tali funzioni è una funzione di Steiner definita su tutto G (per il corollario 10 di [**10**]). Inoltre tutte le traiettorie non banali di Σ_α sono chiaramente abeliane (47).

Poichè $pq = 6k + 1$ possiamo asserire che G ammette 2^k funzioni di Steiner egualmente fini.

5. – Prepariamo ora altro materiale per le successive applicazioni e ricerche.

Osservazione 9. *Siano α, α' due funzioni di Steiner egualmente fini definite sul gruppo G. Supponiamo che ogni elemento di G sia dimezzabile in modo unico* (48). *Sia D l'insieme degli elementi di G su cui α, α' non operano allo stesso modo. Allora i moltiplicatori comuni ad α, α' sono i moltiplicatori di α che lasciano fermo D* (49).

Sia φ un moltiplicatore comune ad α ed α', e sia d un elemento di D. Mostriamo anzitutto che $\varphi(d)$ appartiene a D.

Si calcola (50) che è allora

$$\varphi \bigcirc \alpha'(d) = \varphi(-\alpha(-d)) = -\varphi(\alpha(-d)) = -\varphi(\alpha(d) - d) =$$
$$= -(\varphi \bigcirc \alpha(d) - \varphi(d)) = \varphi(d) - \varphi \bigcirc \alpha(d)\,.$$

Pertanto se fosse $\alpha \bigcirc \varphi(d) = \alpha \bigcirc \varphi(d)$ sarebbe

$$\alpha' \bigcirc \varphi(d) = \varphi(d) - \varphi \bigcirc \alpha(d) = \alpha \bigcirc \varphi(d) = \varphi \bigcirc \alpha(d)$$

e dunque $\alpha(d) = 2(\varphi \bigcirc \alpha(d))$, cioè $d = 2\alpha(d)$. Ripetendo il calcolo dopo aver scambiato α, α' si otterrebbe analogamente $d = 2\alpha'(d)$. Poichè ci siamo messi nella condizione in cui ogni elemento di G è dimezzabile in modo unico (51) sarebbe allora $\alpha(d) = \alpha'(d)$, contro la posizione $d \in D$.

---

(46) Cfr. il teorema 1 di [**10**], essenzialmente dovuto a PETELSON.

(47) Perchè α tiene fermi tutti i sottogruppi di G.

(48) Questa ipotesi è senz'altro verificata se G è finito. Cfr. per es. il lemma 3 di [**10**].

(49) Di qui segue fra l'altro che se φ è un moltiplicatore comune ad α, α', allora D è unione di traiettorie del gruppo generato da i, α, φ. I gruppi in questione possono essere visti — in un certo senso — come generalizzazioni dei gruppi di STEINER.

(50) Ricordando il Lemma 4 e le considerazioni che portano al Teorema 6.

(51) [Aggiunto sulle bozze: con lettera del 11/10/73 il Prof. ZAPPA osserva che con altra, più semplice dimostrazione, l'ipotesi che ogni elemento di G sia divisibile, in modo unico può essere evitata]

Da tutto questo segue che $\alpha'(\varphi(d)) \neq \alpha(\varphi(d))$, per ogni $d \in D$, e che dunque anche $\varphi(d)$ appartiene a D. Poichè anche φ^{-1} è un moltiplicatore comune ad α, α' possiamo senz'altro dedurre che $\varphi(D) = D$.

Sia *viceversa* φ un moltiplicatore di α che lascia fisso D.

Come sopra si vede che $\varphi \bigcirc \alpha'(d) = \varphi(d) - \varphi \bigcirc \alpha(d)$, ma ora possiamo anche dire che

$$\alpha' \bigcirc \varphi(d) = -\alpha(-\varphi(d)) = -(\alpha \bigcirc \varphi(d) - \varphi(d)) = \varphi(d) - \alpha \bigcirc \varphi(d) .$$

Ricordando che φ è un moltiplicatore di α se ne deduce che, $\forall d \in D$ è $\varphi \bigcirc \alpha'(d) = \alpha' \bigcirc \varphi(d)$. D'altra parte ovviamente è, per ogni $x \in G - D$,

$$\varphi \bigcirc \alpha'(x) = \alpha' \bigcirc \varphi(x) = \varphi \bigcirc \alpha(x) = \alpha \bigcirc \varphi(x) \text{ (52)} ,$$

e dunque φ è un moltiplicatore di α'.

Teorema 10. *Sia G un gruppo finito, e sia α una funzione di Steiner definita in G. Supponiamo che tutte le traiettorie di α siano abeliane. Allora la funzione $\alpha^0 = i \bigcirc \alpha \bigcirc i$ è una funzione di Steiner fine quanto la α e dotata degli stessi moltiplicatori* (53).

Per vedere che α^0 è di Steiner basta applicare ripetutamente il Lemma 3 o ragionare come nel Teorema 6: ne seguirà anche che α, α^0 sono egualmente fini. Sia ora D l'insieme degli elementi su cui α, α^0 agiscano in modo diverso: esso non è chiaramente altro che l'unione delle traiettorie deformabili di Σ_α.

Osservato che tutti gli elementi di G sono dimezzabili in modo unico (54) e ricordata l'Osservazione 9 basta ora mostrare che D è tenuto fermo dai moltiplicatori di α e da quelli di α^0.

Sia pertanto $x \in G$ un elemento appartenente ad una traiettoria fine o banale di Σ_α. È allora, per cose note, $\alpha(x) = -x$. Pertanto $\varphi \bigcirc \alpha(x) = \varphi(-x) = -\varphi(x)$ e dunque $\alpha \bigcirc \varphi(x) = -\varphi(x)$. Ne segue che anche $\varphi(x)$ appartiene ad una traiettoria fine o banale di Σ_α, e che, dunque φ (insieme a φ^{-1}) tiene fermo $G - D$, e dunque D stesso. Ogni moltiplicatore di α tiene dunque fermo D. In modo analogo si vede che ogni moltiplicatore di α^0 tiene fermo D, e questo completa la dimostrazione.

---

(52) Chiaramente se φ tiene fermo D tiene fermo anche $G - D$, visto che anche φ^{-1} tiene fisso D.

(53) Per il caso in cui G è abeliano la tesi segue anche dall'Osservazione 1.

(54) Cfr. la prima annotazione relativa all'Osservazione 9.

L'interesse della funzione α^0 ora considerata dipende (55) dalla ovvia

Osservazione 11. *Siano G un gruppo α, α' due funzioni di Steiner definite su G. I gruppi di Steiner Σ_α, $\Sigma_{\alpha'}$ coincidono se e solo se $\alpha = \alpha'$ oppure $\alpha' = \alpha^0 = i \bigcirc \alpha \bigcirc i$. Nel secondo caso tutte le traiettorie di Σ_α sono abeliane.*

Chiaramente se $\Sigma_\alpha = \Sigma_{\alpha'}$ i gruppi Σ_α, $\Sigma_{\alpha'}$ hanno le stesse traiettorie e allora (Lemma 4) deve essere $\alpha = \alpha'$ oppure $\alpha' = i \bigcirc \alpha \bigcirc i$. Poichè per ipotesi α' è di Steiner segue dal Lemma 3 che tutte le traiettorie di Σ_α sono abeliane.

3. - Prime applicazioni.

6. – Due sistemi (di terne) di Steiner S, S^0 definiti sullo stesso insieme (di punti) si dicono *disgiunti* se non hanno terne in comune (56). Una coppia di sistemi di Steiner disgiunti può essere utilizzata per costruire cappi totalmente non simmetrici (57) o, se si vuole, quasigruppi non commutativi idempotenti soddisfacenti alla identità $(xy)x = x(yx) = x$.

Allo scopo di costruire strutture siffatte si dimostra in [**2**] (58) che se v è potenza di un numero primo e $v = 6k + 1$, allora esiste una coppia di sistemi di Steiner disgiunti su un insieme di v elementi (59).

Vogliamo qui generalizzare tale risultato (60); le applicazioni a cappi e semigruppi si ottengono semplicemente ripetendo i ragionamenti di [**2**], e possono essere lasciate al lettore. Incidentalmente forniremo risposte a problemi aperti enunciati in [**5**].

Lemma 12. *Siano α, α' due funzioni di Steiner definite sul gruppo G, e sia v l'ordine di G. Sia h il numero degli elementi non nulli di G su cui α, α' operano allo stesso modo. Allora i sistemi di Steiner S, S' individuati da dette funzioni* (61) *hanno in comune esattamente $vh/6$ terne.*

Sia infatti x un elemento non nullo di G tale che $\alpha(x) = \alpha'(x)$, e sia a un elemento qualunque di G. È allora $\alpha'(x + a - a) + a = \alpha(x) + a$, e dunque la terna $\{a, x + a, \alpha(x) + a\}$ appartiene tanto ad S che ad S'. Viceversa se la terna $\{a, b, c\}$ è comune ai due sistemi deve essere $c = \alpha(b - a) + a =$

(55) Oltre che dalle applicazioni successive.
(56) Cfr. per es. [**2**], [**5**].
(57) Cioè cappi, in cui:
1) se $a \neq b$ allora $ab = ba$ implica che uno almeno degli elementi a, b sia neutro;
2) valga, $\forall x, y$, la identità $(xy)x = x(yx)$. Cfr. [**2**], [**13**].
(58) Teorema.
(59) Cfr. anche [**5**] per risultati analoghi e notizie storiche.
(60) Cfr. i successivi Teoremi 16, 17.
(61) A norma del n. 1 o meglio, di [**8**].

$=\alpha'(b-a)+a$, e dunque $\alpha(b-a)=\alpha'(b-a)$; pertanto $b=(b-a)+a$ è somma di un elemento non nullo x tale che $\alpha(x)=\alpha'(x)$ e di a. Ne segue che le terne comuni ad S, S' sono tutte e sole le terne (non ordinate) della forma $\{a, x+a, \alpha(x)+a\}$, con $a, x \in G$; $x \neq 0$ e $\alpha(x)=\alpha'(x)$; tali terne sono chiaramente in numero di $vh/6$, ed il Lemma è dimostrato.

Tale lemma sembra prestarsi allo studio dei problemi aperti indicati al termine di [**5**]; noi indichiamo al momento soltanto le applicazioni più immediate in tale direzione.

Corollario 13. *Sia G un gruppo ciclico di ordine $6k+3$. Siano S, S' due sistemi di Steiner che ammettano come gruppo di automorfismi il cayleiano destro di G. Allora S, S' hanno $2k+1$ terne in comune.*

Infatti G contiene un solo sottogruppo H di ordine tre. Una qualunque funzione di Steiner definita su G ammette almeno una traiettoria fine (per il corollario 4 di [**9**]), Questa, essendo costituita da elementi di caratteristica tre, coincide con l'insieme degli elementi non nulli di H. Ne segue che due qualunque funzioni di Steiner definite su G operano allo stesso modo sugli elementi non nulli di H (62). I sistemi di Steiner associati a tali funzioni hanno pertanto in comune almeno $(6k+3)2/6=2k+1$ terne in comune. Ricordando che ogni sistema di Steiner ammettente il cayleiano destro di G come gruppo di automorfismi è associato ad una funzione di Steiner definita su G si ha subito l'enunciato.

Ora in [**5**] si indica con $D_c^*(v)$ il numero dei sistemi di Steiner ciclici due a due disgiunti ed isomorfi aventi ordine v. Nel *secondo* dei problemi aperti ivi proposti si chiede se è vero che $D_c^*(6k+3)\geqslant 0$ per ogni $k \geqslant 2$. Se, come pare, si intende che i sistemi siano ciclici rispetto allo stesso gruppo (63) *la risposta è dunque negativa* (64), anche se si lasci cadere l'ipotesi che i sistemi siano isomorfi.

Si noti inoltre che la tesi del Corollario 13 continua a valere anche se si chiede soltanto che G contenga un solo sottogruppo di ordine 3: in questo senso abbiamo dunque risolto un problema più generale di quello posto da DOYEN.

Il *quarto* dei problemi di [**5**] suggerisce di studiare più in generale quale possa essere il massimo numero dei sistemi di Steiner con un dato gruppo regolare e transitivo di automorfismi che abbiano due a due un dato numero di terne in comune. Una soluzione parziale può essere considerata la

---

(62) E precisamente scambiano ciascuno di essi con il suo inverso, per cose già richiamate.

(63) Abbiamo cioè uno stesso gruppo ciclico regolare e transitivo di automorfismi.

(64) Come del resto suggerito dall'osservazione che in [**5**] segue il teorema 4.

Osservazione 14. *Sia G un gruppo finito di ordine v. Sia α una funzione di Steiner definita su G, e sia d il numero delle traiettorie deformabili di Σ_α. Sia b il massimo numero delle funzioni di Steiner fini come la α e tali che due qualunque di esse operino allo stesso modo esattamente su $v-6\delta$ elementi di G; detto b è eguale al massimo numero di sottoinsiemi di un insieme di d elementi tali che la differenza simmetrica di due qualunque di essi contenga (esattamente) δ elementi* (65).

Come infatti risulta dal Teorema 6, una funzione fine come la α risulta determinata dall'insieme delle traiettorie di Σ_α su cui non opera come la α, ma opera come la $i\bigcirc\alpha\bigcirc i$. Due siffatte funzioni opereranno pertanto allo stesso modo esattamente su $v-6\delta$ elementi di G se e solo se la differenza simmetrica degli insiemi che le determinano come sopra indicato contiene esattamente δ elementi (66).

Corollario 15. *Siano α, α' due funzioni di Steiner definite sul gruppo G. I sistemi di Steiner da esse individuati sono disgiunti se e solo se il prodotto $\alpha\bigcirc\alpha'$ è privo di coincidenze non nulle. Se in particolare G ha ordine $6k+1$, allora α ed $\alpha^0 = i\bigcirc\alpha\bigcirc i$ forniscono sistemi disgiunti.*

Si nota infatti che $\alpha\bigcirc\alpha'$ è una funzione priva di coincidenze non nulle se e solo se α, α' non operano allo stesso modo su nessuno degli elementi non nulli di G (67). La prima parte dell'enunciato è dunque conseguenza immediata del Lemma 12.

Per dimostrare la seconda parte basta mostrare che se G ha ordine $6k+1$, allora $\alpha\bigcirc i\bigcirc\alpha\bigcirc i$ è priva di coincidenze non nulle. Se infatti x è una coincidenza per tale funzione è ovviamente $\alpha\bigcirc i(\alpha(-x)) = x$ e dunque $-\alpha(-x) = \alpha(x)$. In tali condizioni l'elemento x è nullo o appartiene ad una traiettoria fine di Σ_α. L'ultima possibilità è esclusa dal corollario 4 di [**9**] (già ricordato),

---

(65) Per brevità non esplicitiamo più il passaggio dalle funzione ai sistemi di Steiner. Notiamo solo che le funzioni dell'enunciato forniscono (per il Lemma 12) sistemi di Steiner aventi in comune $v(v-1)/6 - v\delta$ terne. Ricordiamo anche che (per il Corollario 5) il numero degli elementi su cui due funzioni di Steiner egualmente fini non operano allo stesso modo è sempre un multiplo di 6. Risultati più completi potranno del resto essere ottenuti più tardi quando parleremo anche di raffinamenti.

(66) Il caso numerico più elementare si ottiene ponendo $v = 13$ (e allora $d = 2$) e $\delta = 1$. Dalla precedente annotazione risulta allora che esistono due sistemi (ciclici) di Steiner di ordine tredici aventi (esattamente) tredici rette in comune due a due ed uno stesso gruppo transitivo e regolare di automorfismi.

(67) Perchè le funzioni di Steiner sono involutorie: $\alpha\bigcirc\alpha'(x) = x$ se e solo se $\alpha'(x) = \alpha(x)$.

grazie alla condizione sull'ordine di G. Con questo il Corollario è completamente dimostrato.

7. – Anche raccogliendo risultati precedenti possiamo ora giungere al principale risultato del presente paragrafo.

Teorema 16. *Sia G un gruppo di ordine $6k+1$. Supponiamo che G ammetta una funzione di Steiner α tale che tutte le traiettorie di Σ_α siano abeliane* (68). *Allora sul sostegno di G possono essere costruite 2^{k-1} coppie di sistemi di Steiner S, S^0 disgiunti. Ciascuno di questi sistemi ammette il cayleiano destro di G come gruppo di automorfismi e sistemi della stessa coppia ammettono gli stessi moltiplicatori* (69). *Se inoltre G è abeliano sistemi della stessa coppia risultano isomorfi.*

Prima di passare alla dimostrazione osserviamo che il presente risultato generalizza anche il teorema 4 di [**5**], che si riferisce al caso dei gruppi ciclici. Di qui inoltre si deduce che dato un qualunque sistema di Steiner *regolare* S avente ordine $6k+1$ è possibile costruire un sistema di Steiner S^0 isomorfo ad S e disgiunto da esso (70). Questo in parte risponde, limitatamente al caso dei sistemi regolari, al *primo* dei problemi aperti indicati in [**5**] (71).

Per la dimostrazione osserviamo intanto che il gruppo G ammette 2^k funzioni di Steiner fini quanto la α (grazie al Teorema 6 ed al fatto che Σ_α non ammette traiettorie fini). Ora la corrispondenza involutoria Φ che associa a ciascuna di tali funzioni α' la funzione di Steiner (72) $i \bigcirc \alpha' \bigcirc i$ ammette 2^{k-1} cicli (di ordine 2) (73).

Due funzioni appartenenti ad uno stesso di tali cicli forniscono due sistemi di Steiner disgiunti (Corollario 15). Tutti i sistemi di Steiner in questione ammettono come gruppo di automorfismi il cayleiano destro di G, come ricordato nei richiami iniziali. Inoltre funzioni dello stesso ciclo ammettono gli stessi moltiplicatori, per il Teorema 8; lo stesso si può pertanto dire (con abuso di linguaggio) — ove si ricordino le considerazioni finali di [**7**] e quelle iniziali di [**11**] — per i sistemi di Steiner associati a tali funzioni. Se inoltre G è abe-

---

(68) Tale ipotesi è certamente verificata per G abeliano e nei casi prospettati dai teoremi 8, 14 di [**10**].

(69) O, più precisamente, le strutture (N, S, O); (N, S^0, O) hanno gli stessi moltiplicatori. Cfr. [**6**], [**7**].

(70) Basta allo scopo utilizzare l'ormai consueto legame tra funzioni e sistemi regolari di Steiner.

(71) Ove si chiede se dato un sistema di Steiner S esista sempre un sistema S' isomorfo ad S e disgiunto da S.

(72) Si ricordi il Teorema 10.

(73) Perchè Φ è priva di coincidenze. Se infatti fosse $\alpha' = i \bigcirc \alpha' \bigcirc i$ tutte le traiettorie di $\Sigma_{\alpha'}$ sarebbe fini. Cfr. [**9**].

liano l'inversione i è un suo automorfismo, ed i sistemi associati a un α' e ad $\alpha'^0 = i \bigcirc \alpha \bigcirc i$ risultano isomorfi grazie all'Osservazione 1.

Considerazioni analoghe possono essere fatte anche per il caso infinito (74).

Teorema 17. *Sia k un qualunque cardinale infinito. Sia G la somma diretta (discreta o completa) di k gruppi abeliani ammettenti funzioni di Steiner e privi di elementi di caratteristica 3. Allora esistono almeno 2^k coppie di sistemi di Steiner isomorfi e disgiunti legati a funzioni di Steiner definite su G.*

Grazie al teorema 7 di [**10**] possiamo affermare che G possiede senz'altro una funzione di Steiner α. Poichè nessun elemento di G ha caratteristica 3, il gruppo Σ_α è privo di traiettorie fini. Ragionando come nel Lemma 11 e ricordando l'Osservazione 1 possiamo dedurne che α, $i \bigcirc \alpha \bigcirc i$ forniscono una coppia di sistemi di Steiner isomorfi e disgiunti. Inoltre le traiettorie di Σ_α sono almeno in numero di k (75) e tutte deformabili (76). Ragionando come nel Teorema 6 (77) si ottengono le altre coppie richieste per la dimostrazione dell'enunciato.

8. – Si noti che le coppie di sistemi costruite nei precedenti Teoremi 16, 17 possono essere utilizzate per costruire *coppie di quadrati latini ortogonali* (78), almeno quando il gruppo di partenza è abeliano. Interpretiamo infatti i detti sistemi come quasigruppi idempotenti totalmente simmetrici (79): le tavole di Caylei di detti quasigruppi sono ovviamente quadrati latini. Sovrapponendoli otteniamo una matrice il cui elemento generico (corrispondente alla riga intestata a ed alla colonna intestata b) è la coppia

$$\langle \alpha(b-a)+a,\ \alpha^0(b-a)+a \rangle$$

ove, come nella Osservazione 11, si sia posto, $\alpha^0 = i \bigcirc \alpha \bigcirc i$.

Due di tali coppie possono coincidere se e solo se esistono elementi a, a', b, b' di G, con $a \neq a'$ e $b \neq b'$ tali che

$$\alpha(b-a)+a = \alpha(b'-a')+a', \qquad \alpha^0(b-a)+a = \alpha^0(b'-a')+a'.$$

(74) Noi ci mettiamo per semplicità in un caso particolare perchè la trattazione completa al momento non ci interessa, tanto più che non sappiamo ancora se il gruppo ciclico infinito ammetta o no funzioni di Steiner.

(75) Per fatti elementari di aritmetica trasfinita.

(76) Salvo, ovviamente, quella banale.

(77) E accettando senz'altro l'assioma della scelta.

(78) Cfr. [**12**], [**13**].

(79) Cfr. [**3**], [**8**].

Dalla seconda di tali formule segue allora che $-\alpha(a-b)+a=-\alpha(a'-b')-a'$. Ricordando la (F') si ha subito che l'ultima formula equivale alla $\alpha(b'-a')-\alpha(b-a)=b'-b$.
Ma dalla prima delle formule sopra messe in evidenza segue che

$$\alpha(b'-a')-\alpha(b-a)=a'-a.$$

Risulta dunque in definitiva che è $a'-a=b'-b$ e dunque $b'-a'=b-a$. Ma allora è

$$a'-a=\alpha(b'-a')-\alpha(b-a)=\alpha(b-a)-\alpha(b-a)=0$$

e pertanto $a=a'$. In modo analogo o ricordando ancora che $a'-a=b'-b$ si trova che è anche $b=b'$.

Pertanto coppie che hanno posti diversi nella matrice (greco-latina) sopra costruita sono distinte, e i quadrati latini in questione sono ortogonali.

Non approfondiamo perchè sono già annunciati in [**11**] più interessanti risultati sui legami tra i sistemi di Steiner ed i quadrati latini.

Bibliografia.

[1] R. H. Bruck, *What is a loop?*, M. A. A. Studies Math. **2** (1963), 59-99.

[2] J. W. Di Paola, *Steiner triples and totally non-symmetric loops*, Combinat. Struct. Appl. (Proc. Calgary Intern. Conf. Calgary Alta, 1969), Gordon and Breach, New York (1970), 59-61.

[3] J. Doyen, *Sur la structure de certain sistèmes triples de Steiner*, Math. Z. **111** (1969), 289-300.

[4] J. Doyen, *Sur la croissance du nombre de système triple de Steiner non isomorphes*, J. Combinatorial Theory **8** (1970), 424-441.

[5] J. Doyen, *Construction of disjunct Steiner triple systems*, Proc. Amer. Math. Soc. **32** (1972), 409-416.

[6] G. Ferrero, *Sui moltiplicatori (nel senso di Hall) e sui disegni ricchi di moltiplicatori*, Atti Conv. Geo. Comb. Appl. Perugia 1970, 223-237.

[7] G. Ferrero, *Sul concetto di moltiplicatore nel senso di Hall*, Riv. Mat. Univ. Parma, (2) **12** (1971), 83-95.

[8] G. Ferrero - A. Suppa, *Sistemi anelloidi e funzioni di Steiner*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **20** (1971), 272-280.

[9] G. Ferrero, *Gruppi di Steiner e sistemi fini*, Le Matematiche (Catania) **27** (1972), 167-190.

[10] G. Ferrero, *Sui gruppi che ammettono funzioni di Steiner*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste **4** (1972), 156-170.

[11] A. Hedajat, *An algebraic property of the totally symmetric loops associated with Kirkmann-Steiner triple systems*, Pacif. J. Math. **40** (1972), 305-309.

[12] H. J. Ryeser, *Combinatorial Mathematics*, Wiley, New York 1963.

[13] S. Vajda, *The Mathematics of Experimental Design*, Griffin, London 1967.

Riassunto.

Si presentano metodi per costruire funzioni di Steiner a partire da funzioni di Steiner date, utilizzandoli poi per risolvere o studiare problemi posti da altri Autori.

* * *