

LAURA BERTANI (\*)

## Costruzione di disegni regolari. (\*\*)

### Introduzione.

Nella prima parte del presente lavoro — vagamente ispirato dalla costruzione di STANTON e SPOTT [3] — e proseguendo [5], costruiamo un'ampia classe di disegni geometrici che contiene quelle individuate nei teoremi 9 di [3] e [5]. Nella seconda parte, osservato che finora non era mai stato esplicitamente considerato alcun disegno che avesse un gruppo di moltiplicatori (nel senso di [3]) non abeliano, costruiamo un disegno che ammette un gruppo di moltiplicatori isomorfo al gruppo dei quaternioni.

Per una generica introduzione all'argomento rimandiamo senz'altro a [1] ed a [3].

### 1. - Notazioni e premesse.

Siano  $G_0, G_1, \dots, G_n$  gruppi additivi, e sia  $G = G_0 + G_1 + \dots + G_n$  la loro somma diretta: potremo scrivere il generico  $g \in G$  come  $g = g_0 + g_1 + \dots + g_n$ , con  $g_i \in G_i$  per ogni  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Siano ora  $\Phi^i$  gruppi di automorfismi di  $G_i$ , e supponiamo che i  $\Phi^i$  siano isomorfi tra loro. Possiamo allora affermare che per ogni  $i$  esiste un isomorfismo  $f_i: \Phi^0 \rightarrow \Phi^i$ . Possiamo allora (per ogni  $\varphi^0 \in \Phi^0$ ) considerare la funzione  $f(\varphi^0)$  che associa all'elemento  $g = g_0 + g_1 + \dots + g_n$  di  $G$  l'elemento  $g' = f(\varphi^0)(g)$  definito dalla

$$f(\varphi^0)(g) = f_0(\varphi^0)(g_0) + f_1(\varphi^0)(g_1) + \dots + f_n(\varphi^0)(g_n).$$

Si vede immediatamente che  $f(\varphi^0)$  è un automorfismo di  $G$  e che anzi l'insieme  $f(\Phi^0)$  è un gruppo di automorfismi di  $G$ . Scriviamo  $f(\Phi^0) = \Phi$ . Si nota

---

(\*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(\*\*) Ricevuto: 20-XI-1971.

inoltre che  $\Phi$  è un gruppo di automorfismi tutti privi di coincidenze ogniqualevolta lo è ciascuno dei  $\Phi^i$ . Infatti  $g_0 + g_1 + \dots + g_n$  è una coincidenza per  $\varphi = f(\varphi^0)$  se e solo se (per ogni  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ ) l'elemento  $g_i$  è una coincidenza per  $f_i(\varphi^0)$ . È quindi ovvio che se tutti gli automorfismi (non identici) dei  $\Phi^i$  sono privi di coincidenze, lo stesso può dirsi per gli elementi di  $\Phi$ .

Vediamo ora cosa si può dire a proposito degli elementi di prima categoria di  $G$  rispetto a  $\Phi$  <sup>(1)</sup>. Sia  $g \in G$  di prima categoria rispetto a  $\Phi$ . Siano  $\pi_i$  le proiezioni canoniche di  $G$  sui fattori  $G_i$  <sup>(2)</sup>. Poichè tali proiezioni sono omomorfismi, le immagini  $\pi_i(\Phi_0 g)$  del gruppo  $\Phi_0 g$  secondo le  $\pi_i$  sono ancora gruppi. Ma nelle nostre condizioni è senz'altro  $\pi_i(\Phi_0 g) = \Phi_0^i g_i$ . Ne segue subito che  $g_i \in G_i$  è di prima categoria rispetto a  $\Phi^i$ . Possiamo allora pensare che  $G$  è privo di elementi non nulli di prima categoria rispetto a  $\Phi$  se e solo se ciascuno dei  $G_i$  è privo di elementi non nulli di prima categoria rispetto a  $\Phi^i$ .

Per completare la dimostrazione basta mostrare che se un solo  $g_i \in G_i$  è di prima categoria rispetto a  $\Phi_i$ , allora  $G$  stesso ammette elementi di prima categoria rispetto a  $\Phi$ . Ma questo è ovvio perchè, posto  $g = g_i$  risulta subito che, se  $g_i$  è di prima categoria,  $\Phi_0 g = \Phi_0^i g_i$  è un gruppo. In queste condizioni anche  $\Phi_0 g$  è un gruppo e  $g$  è di prima categoria rispetto a  $\Phi$ .

Ricordiamo ora il teorema 12 di [3], perno delle costruzioni del nostro lavoro. Se  $\Phi$  è un gruppo di automorfismi tutti privi di coincidenze del gruppo  $G$  e  $G$  è privo di elementi non nulli di prima categoria rispetto a  $\Phi$ , allora i blocchi  $\Phi_0 a + b$  ( $a \neq 0$ ;  $a, b \in G$ ) formano un disegno  $D$  regolare con  $k = \lambda = |\Phi| + 1$  <sup>(3)</sup>.

Vogliamo ora sfruttare il risultato sopra citato usando le osservazioni iniziali per costruire coppie  $(G, \Phi)$  soddisfacenti alle sue ipotesi, a partire da casi noti di gruppi  $G_i$  con gruppi di automorfismi  $\Phi^i$  privi di coincidenze, tutti tra loro isomorfi e tali che nessun  $G_i$  ammetta elementi non nulli di prima categoria rispetto a  $\Phi^i$ . Poichè faremo riferimento al teorema 9 di [5], possiamo anche dire che i disegni che otterremo sono costruiti componendo disegni in campi <sup>(4)</sup>.

<sup>(1)</sup> Ricordiamo che  $g \in G$  è di prima categoria rispetto a  $\Phi$  se e solo se  $\Phi_0 g = \Phi g \cup \{0\}$  è un gruppo. Cfr. per esempio [2].

<sup>(2)</sup> Sia cioè  $\pi_i(g_0 + g_1 + \dots + g_n) = g_i$ .

<sup>(3)</sup> Risulta inoltre, sempre da [3], che  $D$  ammette un gruppo di automorfismi simile al Cayleyano  $N$  di  $G$ , e che  $\Phi$  è un gruppo di moltiplicatori della struttura  $(D, N, O)$ .

Per brevità qui ci siamo rifatti alla terminologia dei lavori [2], [3] spesso citati. Per il lettore che non ne disponesse ricordiamo solo che si chiama *regolare* un disegno con un gruppo di automorfismi regolare e transitivo sui suoi punti, e che per noi i punti di  $D$  sono precisamente gli elementi di  $G$ .

<sup>(4)</sup> In [1] (p. 110) si parla di costruire disegni (a partire da altri disegni) con metodi di tipo combinatorio (si pensi ad esempio alla nota dimostrazione del teorema di HANANI). Qui parliamo di composizione in un senso diverso, perchè siamo più interessati all'aspetto grupppale delle questioni.

## 2. - Composizione di disegni in campi.

Ora possiamo dare una generalizzazione del teorema 10 di [5], che appare analoga al teorema 9 di [4], visto come generalizzazione del corollario 12 di [4].

**Teorema 1.** *Siano  $p_i^{n_i}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) delle potenze di numeri primi <sup>(5)</sup>. Sia  $d$  un divisore proprio di tutti i numeri della forma  $p_i^{n_i} - 1$ , e supponiamo che  $d$  non sia della forma  $d = p_i^m - 1$  ( $1 \leq m < n_i$ ). Allora esistono disegni con  $v = \prod_i p_i^{n_i}$ ,  $k = \lambda = d + 1$  e dotati di un gruppo abeliano di automorfismi transitivo e regolare (sui punti), i cui sottogruppi di Sylow sono tutti elementari.*

Per ogni  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  sia  $K_i$  un campo di ordine  $p_i^{n_i}$ . Scegliamo (sempre per ogni  $i$ ) un elemento  $y_i \in K_i$  che abbia ordine  $d$  <sup>(6)</sup>.

La  $\varphi_{y_i}: x \rightarrow y_i x$  genera allora un gruppo  $\Phi^i$  di automorfismi del gruppo additivo  $K_i^+$  di  $K_i$ . Come nella dimostrazione del teorema 10 di [5], si vede che  $\Phi^i$  è formato da automorfismi tutti privi di coincidenze e che  $K_i^+$  non possiede elementi di prima categoria rispetto a  $\Phi^i$ . Di più tutti i  $\Phi^i$  sono ciclici ed, essendo equipotenti, sono dunque isomorfi. Scegliamo (sempre per ogni  $i$ ) un isomorfismo  $f_i$  di  $\Phi^0$  su  $\Phi^i$ . Se ora costruiamo la somma diretta  $G$  dei gruppi  $K_i^+$  ci troviamo appunto nella situazione prospettata nel n. 1.

Possiamo pertanto ottenere, come ivi osservato, un gruppo  $\Phi$  (ciclico di ordine  $d$ ) di automorfismi di  $G$  tutti privi di coincidenze, e tale che  $G$  non abbia elementi non nulli di prima categoria rispetto a  $\Phi$ . Il già ricordato teorema 12 di [3] permette allora di ottenere un disegno un cui gruppo di automorfismi regolare e transitivo sui punti è simile al Cayleyano destro di  $G$ , cioè appunto il disegno indicato nell'enunciato.

## 3. - Un disegno anomalo.

Poichè nella letteratura consultata non abbiamo trovato disegni regolari che chiaramente possedessero un gruppo di moltiplicatori non abeliano <sup>(7)</sup>, chiamiamo anomali tali disegni e costruiamo un primo semplice esempio di disegno anomalo. A questo scopo premettiamo qualche osservazione sul quasi-corpo eccezionale di ordine 25 <sup>(8)</sup>.

<sup>(5)</sup> Non necessariamente distinte.

<sup>(6)</sup> Nel gruppo moltiplicativo degli elementi non nulli di  $K_i$ : la cosa è sempre possibile per il teorema dell'elemento primitivo.

<sup>(7)</sup> Ci riferiamo al concetto introdotto in [3] cui senz'altro rimandiamo.

<sup>(8)</sup> Cfr. per esempio [6], pp. 390-391.

Siano  $K$  il quasicorpo eccezionale di ordine 25,  $K^*$  il gruppo moltiplicativo dei suoi elementi non nulli, e  $K^+$  il suo gruppo additivo. Ovviamente  $K^+$  si può riguardare come uno spazio vettoriale  $V$  su  $Z_5$ ; ed un suo elemento generico si può scrivere come combinazione lineare, a coefficienti in  $Z_5$ , di due elementi  $\alpha$ ,  $\beta$  di una qualunque base di  $V$ . Fissata una tale base, indichiamo il generico elemento  $\alpha a + \beta b$  di  $K^+$  con il simbolo  $(a, b)$ . Scegliendo in modo opportuno la base  $\{\alpha, \beta\}$  si può fare in modo che il gruppo delle  $\varphi_x: a \rightarrow x a$  ( $x \in K^*$ ) sia generato dalle trasformazioni

$$A: (a, b) \rightarrow (-b, a),$$

$$B: (a, b) \rightarrow (a - 2b, -a - 2b) \text{ (9)}.$$

Si verifica facilmente che  $A, B$  hanno ordini rispettivi 4 e 3. Di qui si ha subito che gli elementi  $A, A^{-1}; B^{-1}AB, B^{-1}A^{-1}B; BAB^{-1}, BA^{-1}B^{-1}$  hanno ordine quattro. Parimenti si vede che tali elementi sono due a due distinti. Essi, insieme all'identità e ad  $A^2$  formano un sottogruppo normale di  $M$ . Per vederlo basta osservare che

$$A^2B = BA^2, \quad BA^{-1}B = A^{-1}B^{-1}A,$$

ed eseguire semplici verifiche. Chiamiamo  $\Phi$  tale gruppo: si osserva che  $\Phi$  ha ordine 8 e che ha un solo elemento di ordine 2. Si può dedurre che  $\Phi$  è isomorfo al gruppo dei quaternioni (10).

Utilizzando quanto osservato giungiamo al

**Teorema 2.** *Esiste un disegno  $D$  di parametri  $v = 25, b = 75, k = \lambda = 9, r = 28$  tale che*

- (1) *ammette un gruppo di automorfismi transitivo e regolare abeliano elementare,*
- (2) *il gruppo dei suoi moltiplicatori (11) contiene un gruppo isomorfo al gruppo dei quaternioni.*

Sia infatti  $K$  il quasicorpo eccezionale di ordine 25, e  $\Phi$  il gruppo quaternionico sopra individuato. Chiaramente  $\Phi$  ammette più di una traiettoria non

(9) Cfr. [6], p. 391.

(10) Cfr. [7], pp. 51-55.

(11) Cioè, per abuso di linguaggio, il gruppo dei moltiplicatori della struttura  $(D, N, O)$  ad esso legata.

banale e ciascuno dei suoi elementi è privo di coincidenze <sup>(12)</sup>. D'altra parte  $K^+$  non contiene sottogruppi propri tenuti fermi da  $\Phi$ . Infatti, se  $H$  fosse un tale sottogruppo (visto che le traiettorie non banali di  $\Phi$  sono equipotenti, per quanto sopra osservato) esso sarebbe unione di traiettorie di  $\Phi$ , e l'ordine di  $\Phi$  dovrebbe dividere l'ordine di  $H$  diminuito di uno, cioè 4. Questo è ovviamente assurdo e  $G$  non ha dunque sottogruppi propri tenuti fermi da  $\Phi$ : in particolare non possiede elementi non nulli di prima categoria rispetto a  $\Phi$ . Dunque <sup>(13)</sup> i blocchi  $\Phi_0 a + b$  ( $a \neq 0$ ;  $a, b \in K$ ) formano un disegno in cui  $k = \lambda = 9$  che è quello indicato dall'enunciato. Gli altri parametri del disegno si ricavano per esempio dalle formule:

$$r = \alpha_1 + (n + 1)\alpha_2, \quad b = (\alpha_1 + (n + 1)\alpha_2)/(n + 1)$$

dove  $\alpha_1, \alpha_2$  rappresentano rispettivamente il numero di traiettorie di  $\Phi$  formate da elementi di prima e non di prima categoria rispetto a  $\Phi$  <sup>(14)</sup>.

#### Bibliografia.

- [1] P. DEMBOWSKI, *Finite Geometries*, Springer, Berlin 1968.
- [2] G. FERRERO, *Osservazioni sugli elementi di prima categoria in un gruppo*, Riv. Mat. Univ. Parma (3) **1** (1972).
- [3] G. FERRERO, *Su certe geometrie gruppali naturali*, Riv. Mat. Univ. Parma (3) **1** (1972).
- [4] G. FERRERO, *Su una classe di nuovi disegni*, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A. **106** (1972), 419-430.
- [5] G. FERRERO, *Qualche disegno geometrico*, Matematiche (Catania) **26** (1971).
- [6] M. HALL, *The Theory of Groups*, MacMillan, New York 1959.
- [7] W. LEDERMAN, *Introduction to Theory of Finite Groups*, Oliver and Boyd, Cremonese, Roma 1961.
- [8] R. G. STANTON and D. A. SPROTT, *A family of difference sets*, Canad. J. Math. **10** (1968), 73-77.

---

<sup>(12)</sup> Perché  $\Phi$  è un gruppo di trasformazioni del tipo  $\varphi_y: x \mapsto yx$ , ed in un quasi-corpo tutti gli elementi non nulli sono dotati di inverso.

<sup>(13)</sup> Ancora per il teorema 12 di [3], già ricordato.

<sup>(14)</sup> Cfr. [3], osservazione 6.

## R i a s s u n t o .

*Diamo una costruzione di disegni regolari, e costruiamo un disegno che ammette un gruppo di moltiplicatori non abeliano.*

## S u m m a r y .

*We give a construction of regular BIB-designs and a construction of a BIB-design with a non-abelian group of multipliers.*

\* \* \*