Riv. Mat. Univ. Parma (3) 1 (1972), 189-194

DANIELA MONTEVERDI (*)

SH relative e pseudolimiti. (**)

Introduzione.

In [1] si dimostra che il concetto di verità di una SH in una $\mathscr{L}$-struttura (in $\mathscr{K}$) non è del tutto adeguato a trattare gli pseudolimiti. Ciò suggerisce l'idea di considerare una classe più vasta di formule, quelle delle SH relative, che qui introduciamo. Il nome deriva dall'analogia con le formule « relativamente prenesse », nel cui prefisso siano ammesse quantificazioni universali « relative » cioè del tipo $(\underset{P}{\forall} x_1, .., x_n)$, dove P è un predicato n-ario.

Per quanto concerne il confronto con gli pseudolimiti, ci si limita all'esame di un esempio, per evitare complicazioni formali; in esso appare che esiste un insieme di due SH relative atto a caratterizzare lo pseudolimite in questione.

1. - Formule SHR.

Sia $\mathscr{L}$ un linguaggio dei predicati del primo ordine, privo di simboli funzionali. Diremo *tipo* ogni successione finita $\tau = (P_1, P_2, ..., P_k)$ tale che, per ogni $i = 1, 2, ..., k$, P_i è un predicato oppure il simbolo 1. Il numero k chiamasi il *rango* di τ.

Se $\tau = (P_1, P_2, ..., P_k)$ è un tipo, si dirà *tipo parziale* di τ ogni segmento iniziale $\sigma = (P_1, P_2, ..., P_r)$ di τ, con $1 \leqslant r \leqslant k$; ovviamente un tipo parziale di un tipo è ancora un tipo.

Sia $\mathscr{L}^*$ il linguaggio che si ottiene da $\mathscr{L}$ aggiungendo, per ogni tipo τ, un'infinità numerabile $f_1^\tau, f_2^\tau, ..., f_n^\tau, ...$ di simboli, detti *simboli funzionali di tipo* τ. Definiamo ora i *termini di tipo* τ.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.
(**) Ricevuto: 14-III-1972.

1) Se P_i è un predicato n-ario, allora i simboli $\varepsilon^{\tau}_{i,1}, \varepsilon^{\tau}_{i,2}, \dots, \varepsilon^{\tau}_{i,n}$ sono termini di tipo τ.

2) Se P_i è 1, allora ε^{τ}_i è un termine di tipo τ.

3) Se $\sigma = (P_1, P_2, \dots, P_r)$ è un tipo parziale di τ e se f è un simbolo funzionale di tipo σ, allora:

3′) se $r > 1$, $f^{\sigma}\{\varepsilon^{\tau}_1, \varepsilon^{\tau}_2, \dots, \varepsilon^{\tau}_r\}$ è un termine di tipo τ;

3″) se $r = 1$, $f^{\sigma}\varepsilon^{\tau}_1$ è un termine di tipo τ.

4) Sono termini di tipo τ solo quelli descritti in 1), 2) e 3).

Chiameremo formula *atomica di tipo* τ ogni espressione della forma $P(t_1, t_2, \dots, t_m)$, dove P è un predicato m-ario e $t_1, \dots, t_m$ sono termini di tipo τ.
Definiamo ora le SH *elementari relative* (SHRE) (1):

i) ogni formula atomica di tipo τ è una SHRE di tipo τ;

ii) ogni congiunzione di formule atomiche di tipo τ è una SHRE di tipo τ;

iii) se $H_1, H_2, \dots, H_r, H$ sono formule atomiche di tipo τ, allora l'espressione $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_r \rightarrow H$ è una SHRE di tipo τ,

iv) niente altro è una SHRE.

Definizione. Sono SHR di tipo τ tutte le SHRE di tipo τ e tutte le congiunzioni di SHRE di tipo τ.

2. - Interpretazioni.

Sia $\mathscr{K}$ una categoria con prodotti finiti. Consideriamo un oggetto A di $\mathscr{K}$ ed una funzione Φ^* che associ a ciascun predicato m-ario una relazione m-aria su A (cfr. [4]) e a ciascun simbolo funzionale f di tipo $\tau = (P_1, \dots, P_k)$, un morfismo $\Phi^*(f)\colon R_1 \times R_2 \times \dots \times R_k \rightarrow A$, dove

i) se P_i è un predicato, P, e $\Phi^*(P)$ è rappresentata da $R_P \xrightarrow{u_P} A^m$, allora R_i è R_P;

ii) se P_i è 1, allora R_i è A.

Chiameremo *interpretazione* ogni coppia $\mathscr{A}^* = \langle A, \Phi^* \rangle$, con A e Φ^* soddisfacenti le condizioni sopra indicate.

(1) Per l'abbreviazione SH si veda [4].

La definizione di interpretazione *associata* ad una $\mathscr{L}$-struttura, rimane formalmente quella data in [4].

Data una interpretazione $\mathscr{A}^* = \langle A, \Phi^* \rangle$ associata ad $\mathscr{A} = \langle A, \Phi \rangle$, estendiamo Φ^* a tutti i termini come segue.

1) Se P_i è un predicato n-ario e $\Phi(P_i)$ è rappresentata da $R \rightarrowtail^{u} A^n$ allora $\Phi^*(\varepsilon^{\tau}_{i,m})$, con $1 \leqslant m \leqslant n$, è il morfismo

$$\Phi^*(\varepsilon^{\tau}_{i,m}) = \varepsilon_m u \varepsilon_i^{(R_1, R_2, \ldots, R_k)} \colon R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_k \to A \,,$$

dove ε_m è la m-esima proiezione di A^n.

2) Se P_i è 1, allora $\Phi^*(\varepsilon^{\tau}_{i})$ è il morfismo

$$\Phi^*(\varepsilon^{\tau}_{i}) = \varepsilon_i^{(R_1, R_2, \ldots, R_k)} \colon R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_k \to A \,.$$

3) L'interpretazione del termine $f^{\sigma}\{\varepsilon^{\tau}_1, \varepsilon^{\tau}_2, \ldots, \varepsilon^{\tau}_r\}$ è $\Phi^*(f^{\sigma}\{\varepsilon^{\tau}_1, \varepsilon^{\tau}_2, \ldots, \varepsilon^{\tau}_r\}) = \Phi^*(f^{\sigma})\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r\}$, essendo $\varepsilon_i \colon R_1 \times \ldots \times R_k \to R_i$ la i-esima proiezione.

Si osservi che se t è un termine di tipo τ, si ha in ogni caso:

$$\Phi^*(t) \colon R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_k \to A \,.$$

3. - Soddisfazione per le SHR.

Sia H una SHR atomica di tipo $\tau = (P_1, P_2, \ldots, P_k)$, diciamo $H = Q(t_1, t_2, \ldots, t_m)$; sia $\mathscr{A}^* = \langle A, \Phi^* \rangle$ una interpretazione e sia $g \colon X \to R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_k$ (3). Diremo che *H è soddisfatta in $\mathscr{A}^*$ da g* (in simboli: $\models_{\mathscr{A}^*} H[g]$) se

$$\{\Phi^*(t_1), \Phi^*(t_2), \ldots, \Phi^*(t_m)\} g \leqslant u_Q \,, \tag{1}$$

dove $u_Q \colon R_Q \rightarrowtail A^m$ è un rappresentante di $\Phi^*(Q)$. Come in [4] si ottiene poi il concetto di soddisfazione per una SHR qualunque, interpretando i connettivi $\wedge$ ed $\to$ nel modo consueto.

Sia H una SHR di tipo $\tau = (P_1, P_2, \ldots, P_k)$ ed $\mathscr{A}^* = \langle A, \Phi^* \rangle$ una interpretazione. Diremo che H è *vera in* $\mathscr{A}^*$ ($\models_{\mathscr{A}^*} H$) se per ogni $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}$ e per ogni $g \colon X \to R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_k$ si ha $\models_{\mathscr{A}^*} H[g]$.

---

(3) Col solito significato di $R_1, R_2, \ldots, R_k$.

Sia $\mathscr{A} = \langle A, \Phi \rangle$ una $\mathscr{L}$-struttura e sia H una SHR di tipo τ. Diremo che H è *vera in* $\mathscr{A}$ se esiste una interpretazione $\mathscr{A}^*$ associata ad $\mathscr{A}$ in cui H è vera. Si scriverà ancora $\models_{\mathscr{A}} H$.

Tutte queste definizioni si riducono a quelle date in [4] per le SH, nel caso che ci si limiti ai tipi $(P_1, P_2, \ldots, P_k)$ in cui $P_1 = P_2 = \ldots = P_k = 1$ (4).

4. - Rapporti fra gli pseudolimiti e le SHR.

Applichiamo i concetti introdotti agli pseudolimiti (cfr. [1]). Per semplicità ci limiteremo a trattare il caso dello pseudolimite che fornisce la composizione di due relazioni binarie.

Sia $\mathscr{L}$ un linguaggio del primo ordine privo di simboli funzionali ed avente tre predicati binari P_1, P_2, P_3. Sia $\mathscr{A} = \langle A, \Phi \rangle$ la $\mathscr{L}$-struttura su $A \in \mathrm{Ob}\mathscr{K}$ tale che

$$\Phi(P_1) = [R_1 \overset{u_1}{\rightarrowtail} A^2]\,, \qquad \Phi(P_2) = [R_2 \overset{u_2}{\rightarrowtail} A^2]\,, \qquad \Phi(P_3) = [R_3 \overset{u_3}{\rightarrowtail} A^2]\,.$$

Consideriamo le seguenti SHR:

$$H_1 = P_1(\varepsilon^{\sigma'*}_{i,1}, f^{\sigma'*}\varepsilon^{\sigma'}_1) \wedge P_2(f^{\sigma'}\varepsilon^{\sigma'}_1, \varepsilon^{\sigma'}_{1,2}) \qquad \text{di tipo } \sigma' = (P_3),$$

$$H_2 = P_1(\varepsilon^{\sigma''}_1, \varepsilon^{\sigma''}_3) \wedge P_2(\varepsilon^{\sigma''}_3, \varepsilon^{\sigma''}_2) \longrightarrow P_3(\varepsilon^{\sigma''}_1, \varepsilon^{\sigma''}_2) \qquad \text{di tipo } \sigma'' = (1, 1, 1)$$

ottenute dalle formule

$$(\forall x)(\forall y)\big(P_3(x, y) \longrightarrow (\exists z)(P_1(x, z) \wedge P_2(z, y))\big)\,,$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big(P_1(x, z) \wedge P_2(z, y) \longrightarrow P_3(x, y)\big)$$

che, congiuntamente, definiscono la composizione. Si ha allora il seguente:

Teorema. $[u_3] = [u_2] \circ [u_1]$ *se e solo se* $\models_{\mathscr{A}} H_1$ *e* $\models_{\mathscr{A}} H_2$.

Dimostrazione. Sia $\models_{\mathscr{A}} H_1$ ed $\models_{\mathscr{A}} H_2$. Per ipotesi esiste un morfismo $f\colon R_3 \to A$ tale che, detta $\mathscr{A}^*$ l'interpretazione associata ad $\mathscr{A}$, ottenuta interpretando $f^{\sigma'}$ in f, sia $\models_{\mathscr{A}^*} H_1$. Si consideri il morfismo identico $R_3 \Longrightarrow R_3$; per

---

(4) Un tipo siffatto è completamente individuato dal suo rango k e il caso 1) della definizione di termine non si presenta.

ipotesi esistono due morfismi x_1: $R_3 \to R_1$ ed x_2: $R_3 \to R_2$ tali che

$$\{\varepsilon_1 u_3, f\} = u_1 x_1 \qquad \text{e} \qquad \{f, \varepsilon_2 u_3\} = u_2 x_2 .$$

Poniamo $j = \{x_1, x_2\}$: $R_3 \to R_1 \times R_2$. Si ha allora

$$\varepsilon_2 u_1 \varepsilon_1 j = \varepsilon_2 u_1 x_1 = \varepsilon_2\{\varepsilon_1 u_3, f\} = f; \qquad \varepsilon_1 u_2 \varepsilon_2 j = \varepsilon_1 u_2 x_2 = \varepsilon_1\{f, \varepsilon_2 u_3\} = f ,$$

quindi j ugualizza $\varepsilon_2 u_1 \varepsilon_1$ ed $\varepsilon_1 u_2 \varepsilon_2$. Inoltre si ha:

$$\alpha(u_1, u_2) j = \{\varepsilon_1 u_1 \varepsilon_1 , \varepsilon_2 u_2 \varepsilon_2\}\{x_1 , x_2\} = \{\varepsilon_1 u_1 x_1 , \varepsilon_2 u_2 x_2\} = \{\varepsilon_1 u_3 , \varepsilon_2 u_3\} = u_3 .$$

Si consideri ora un qualunque morfismo j': $X \longrightarrow R_1 \times R_2$ che ugualizzi $\varepsilon_2 u_1 \varepsilon_1$ ed $\varepsilon_1 u_2 \varepsilon_2$; posto $g = \{\varepsilon_1 u_1 \varepsilon_1 j', \varepsilon_2 u_2 \varepsilon_2 j', \varepsilon_1 u_2 \varepsilon_2 j'\}$: $X \longrightarrow A^3$, si ha $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} g = \alpha(u_1, u_2) j'$ ed inoltre $\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\} g = u_1 \varepsilon_1 j' \leqslant u_1$, $\{\varepsilon_3, \varepsilon_2\} g = u_2 \varepsilon_2 j' \leqslant u_2$, quindi, per l'ipotesi che $\models_{\mathcal{A}} H_2$, $\alpha(u_1, u_2) j' = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} g \leqslant u_3 = \alpha(u_1, u_2) j$.

Viceversa, supponiamo che $[u_3] = [u_2]\cdot[u_1]$. Per tale ipotesi, esiste un morfismo j: $R_3 \longrightarrow R_1 \times R_2$ che ugualizza $\varepsilon_2 u_1 \varepsilon_1$ ed $\varepsilon_1 u_2 \varepsilon_2$, e tale che $\{\varepsilon_1 u_1 \varepsilon_1, \varepsilon_2 u_2 \varepsilon_2\} j = u_3$. Detta $\mathscr{A}^*$ l'interpretazione associata ad $\mathscr{A}$ ottenuta interpretando f^{σ_1} nel morfismo $f = \varepsilon_2 u_1 \varepsilon_1 j = \varepsilon_1 u_2 \varepsilon_2 j$, per ogni g: $X \longrightarrow R_3$, si ha:

$$\{\varepsilon_1 u_3, f\} g = \{\varepsilon_1 u_1 \varepsilon_1 j, \varepsilon_2 u_1 \varepsilon_1 j\} g = u_1 \varepsilon_1 j g \leqslant u_1 ,$$

$$\{f, \varepsilon_2 u_3\} g = \{\varepsilon_1 u_2 \varepsilon_2 j, \varepsilon_2 u_2 \varepsilon_2 j\} g = u_2 \varepsilon_2 j g \leqslant u_2 ,$$

quindi $\models_{\mathcal{A}^*} H_1$ e infine $\models_{\mathcal{A}} H_1$.

Si consideri ora un morfismo g: $X \longrightarrow A^3$ tale che $\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\} g \leqslant u_1$ ed $\{\varepsilon_3, \varepsilon_2\} g \leqslant u_2$, diciamo $\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\} g = u_1 y_1$ ed $\{\varepsilon_3, \varepsilon_2\} g = u_2 y_2$, con y_1: $X \longrightarrow R_1$ ed y_2: $X \longrightarrow R_2$.

Il morfismo $j' = \{y_1, y_2\}$: $X \longrightarrow R_1 \times R_2$, ugualizza $\varepsilon_2 u_1 \varepsilon_1$ ed $\varepsilon_1 u_2 \varepsilon_2$, perciò, in virtù dell'ipotesi, $\alpha(u_1, u_2) j' \leqslant \alpha(u_1, u_2) j = u_3$. Ma

$$\alpha(u_1, u_2) j = \{\varepsilon_1 u_1 \varepsilon_1, \varepsilon_2 u_2 \varepsilon_2\}\{y_1, y_2\} = \{\varepsilon_1 u_1 y_1 , \varepsilon_2 u_2 y_2\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} g ,$$

da cui $\models_{\mathcal{A}} H_2$.

Bibliografia.

[1] T. Montali, *Pseudolimiti e formule SH*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **12** (1971). 245-258.

[2] B. Pareigis, *Categories and Functors*, Academic Press, 1970.

[3] M. Servi, *Alcune proprietà delle relazioni su un oggetto di una categoria*, Symposia Mathematica **5** (1971), 150-165.

[4] M. Servi, *Una questione di teoria dei modelli nelle categorie con prodotti finiti*, Matematiche (Catania) **26** (1971), 307-324.

Sunto.

Si introduce il concetto di « SH relativa » che estende quello di SH e sembra, più di questo, atto a caratterizzare gli pseudolimiti.

Summary.

We extend the class of SH's (cfr. [4]*) to that of « relative SH's » and prove that these formulae seem to behave in a nicer way with respect to pseudolimits (see* [1]*).*

* * *