

C. FERRERO COTTI (*)

Sugli stems il cui prodotto è distributivo rispetto a se stesso. (**)

Introduzione.

Ricordando che in un anello di BOOLE il prodotto è distributivo rispetto a se stesso (che cioè un anello di BOOLE è distributivo) viene spontaneo studiare più in generale gli anelli distributivi. Questo è stato fatto in [10], anche sfruttando proprietà dei semigruppoidi distributivi. Vari gruppoidi distributivi sono stati studiati in [11]. Anche tenendo presente [3], abbiamo allora studiato gli stems (= near-rings) distributivi, per vedere quanto dei risultati precedenti potesse essere esteso ad essi.

Così nel secondo paragrafo abbiamo potuto determinare in modo completo gli stems distributivi semisemplici e nel terzo paragrafo abbiamo ottenuto per gli stems distributivi bilateri l'analogo del teorema principale di [10].

Abbiamo inoltre mostrato che uno stem bilatero S distributivo possiede un ideale T , tale che $T^3 = 0$ ed S/T è un anello di BOOLE (Corollario 10). Un esempio mostra che tale risultato è in un certo senso il migliore possibile. Allo scopo di ottenere risultati analoghi in casi più generali, abbiamo introdotto (Definizione B) il concetto di catena speciale.

Nei Teoremi 14 (16) abbiamo individuato gli stems distributivi dotati di una catena speciale il cui primo elemento è nullo ed in cui tutti gli elementi non nulli del secondo elemento sono unità sinistre (in esso). Tali considerazioni preparano il terreno ad una soluzione parziale del problema che ci siamo proposti. Nel paragrafo 6 abbiamo chiamato speciali gli stems che possiedono una

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche. — Ricevuto: 15-X-1971.

catena speciale propria $T_1 \subset \dots \subset T_n = S$ il cui primo elemento T_1 è uno zero-stem e tale che S/T_{n-1} è privo di annullatori propri. Uno stem speciale distributivo possiede sempre un ideale T , tale che $T^3 = 0$ e tutti gli elementi non nulli di S/T sono unità sinistre (Teorema 22).

È allora naturale chiamare speciale un ideale T di uno stem S tale che $T^3 = 0$ e tutti gli elementi non nulli di S/T sono unità sinistre.

Nel Teorema 25 si caratterizzano infine gli stems speciali distributivi.

§ 1. - Generalità.

1. - Ricordiamo anzitutto che uno stem (sinistro) S è un sistema con due leggi di composizione (somma e prodotto) che è un gruppo rispetto alla somma, un semigruppato rispetto al prodotto e tale che inoltre, $(\forall x, y, z \in S)$ si abbia $x(y + z) = xy + xz$ ⁽¹⁾.

Definizione A. Diciamo distributivo ⁽²⁾ uno stem S il cui semigruppato moltiplicativo è distributivo ⁽³⁾ tale che cioè, $(\forall x, y, z \in S)$ valgono le:

$$(1) \quad \begin{cases} xyz = xyxz \\ xyz = xzyz. \end{cases}$$

Ovviamente gli stems distributivi formano una varietà in quanto, come subito si controlla, i sottostems, le immagini omomorfe e le somme dirette ⁽⁴⁾ di stems distributivi sono distributivi e dunque la classe degli stems distributivi soddisfa al teorema di BIRKHOFF ⁽⁵⁾.

Indichiamo con φ_a la funzione $x \rightarrow ax$ ($a, x \in S$). Si ha subito, dalla prima della (1) che se S è distributivo ciascuna φ_a è un endomorfismo di S . Indichiamo con $A_s(a)$, l'annullatore di un elemento $a \in S$ ⁽⁶⁾. Ovviamente $A_s(a)$, nucleo

⁽¹⁾ Per le prime nozioni nell'argomento si veda per esempio [1], [2], [3]. Osserviamo però che spesso viene aggiunta l'ulteriore condizione $0 \cdot S = 0$, cfr. [1], [2].

⁽²⁾ Altri autori chiamano distributivi gli stems in cui il prodotto è distributivo rispetto alla somma sia a destra che a sinistra (cfr. per esempio [3]).

Chiameremo (nel § 3), *bilateri* tali stems, in accordo con [5].

⁽³⁾ Cfr. per esempio [1].

⁽⁴⁾ Cfr. per esempio [2], [4].

⁽⁵⁾ Cfr. [4], p. 170.

⁽⁶⁾ L'insieme, cioè, degli $x \in S$ appartenenti al nucleo della φ_a : $x \rightarrow ax$; in altri termini $A_s(a)$ è l'insieme degli $x \in S$ tali che $ax = 0$ (cfr. per esempio [7], p. 650). Generalmente l'indice S viene ommesso perchè si lavora in un solo stem. Qui noi non possiamo ometterlo perchè questo potrebbe più oltre essere fonte di ambiguità.

dell'endomorfismo φ_a , è un ideale ⁽⁷⁾ di S . Chiameremo annullatore di un sottoinsieme $X \subseteq S$, l'intersezione degli annullatori degli elementi di X ; lo indicheremo con $A_s(X)$; si tratta ancora evidentemente di un ideale di S . Ovviamente $A_s(S)$ è uno zero-stem ⁽⁸⁾. Diremo, per abuso di linguaggio, che un ideale I di S è annullatore in S se è annullatore di almeno un elemento di S .

Siano S uno stem e A, B due suoi sottoinsiemi. Indicheremo con $A \cdot B$ il sottogruppo additivo generato dagli elementi di S della forma ab ($\forall a \in A, b \in B$). Indicheremo con S^n il sottogruppo additivo generato dagli elementi che sono prodotti di n elementi qualunque di S . Scriveremo spesso « 0 » in luogo di $\{0\}$ ⁽⁹⁾.

Un sottostem I di S si dice ideale destro (Right modul in [1]) di S se $I \cdot S \subseteq I$ ⁽¹⁰⁾.

Si chiama, ovviamente, nilpotente ogni sottostem S' una cui (opportuna) potenza sia nulla.

2. – Alcune osservazioni, molto semplici, sugli stems distributivi preparano il terreno alle considerazioni successive.

Osservazione 1. *Se S è uno stem distributivo, il prodotto di tre suoi elementi qualunque è idempotente.*

Per l'ovvia dimostrazione, che interessa solo la struttura moltiplicativa di S , cfr. [10] pag. 1.

Osservazione 2. *Se S è uno stem distributivo, i suoi elementi che non dividono lo zero a sinistra ⁽¹¹⁾ sono unità sinistre.*

Ponendo $x=y=a$ e $z=c$ nella prima delle (1) si ha $a^2(c-ac)=0$ ($\forall c \in S$). Se a non divide lo zero a sinistra se ne deduce subito che $ac=c$ e dunque a è unità sinistra.

Osservazione 3. *Uno stem distributivo S che possieda una unità sinistra è idempotente ⁽¹²⁾.*

Ponendo $x=y=a$ e $z=c$ nella seconda delle (1) si ha $a^2c=acac$. Se a è unità sinistra, ne risulta $c^2=c$ ($\forall c \in S$) da cui l'asserto.

Le Osservazioni 1, 2, 3 saranno spesso usate senza esplicito richiamo.

⁽⁷⁾ Chiameremo, conformemente alla nomenclatura più diffusa (cfr. per esempio [2]), ideale I di uno stem S , ogni suo sottoinsieme che sia nucleo di un omomorfismo di S in un altro (opportuno) stem. Tali ideali vengono invece detti *ideali-nuclei* in [6], p. 250.

⁽⁸⁾ Uno zero-stem è uno stem tale che $xy=0$ ($\forall x, y \in S$). Cfr. per esempio [5].

⁽⁹⁾ Cfr. per esempio [7].

⁽¹⁰⁾ Cfr. per esempio [5].

⁽¹¹⁾ Diciamo che x non divide lo zero a sinistra se e solo se φ_x è un automorfismo di S . Questo è possibile anche nel caso in cui $x=0$. Cfr. per esempio [7], p. 245.

⁽¹²⁾ Uno stem S si dice *idempotente* se tutti i suoi elementi sono idempotenti, se cioè è, $\forall x \in S, x^2=x$.

Corollario 4. *In uno stem distributivo S vale una almeno delle seguenti proprietà:*

- I) S è idempotente;
- II) S è tutto costituito da divisori dello zero a sinistra.

Questa è conseguenza immediata delle Osservazioni 2, 3.

Osservazione 5. *Sia S uno stem distributivo e T un suo sottostem i cui elementi siano tutti nilpotenti. Allora $(\forall x, y \in S, \forall z \in T)$ è $xyz = 0$.*

Sia infatti $z \in T$: esiste allora un $n \in \mathbb{N}$ tale che $z^n = 0$.

Applicando più volte le (1), si ha, $(\forall x, y \in S)$:

$$xyz = x(zyz) = xzyz = x(zyz)z = xzyzz = \dots = xzyz^n = 0.$$

Pertanto $xyz = 0$, da cui l'enunciato.

Tornerà molto utile nel seguito il

Teorema 6. *Lo stem distributivo S è privo di annullatori propri⁽¹³⁾ se e solo se vale una delle seguenti proprietà:*

- I) *Tutti gli elementi non nulli di S sono unità sinistre;*
- II) *S è uno zero-stem⁽¹⁴⁾.*

Riteniamo opportuno far precedere la dimostrazione da un commento all'enunciato; si osservi intanto che, com'è del resto noto, se gli elementi non nulli di uno stem S sono unità sinistre allora è $0 \cdot S = 0$, a meno che zero non sia unità sinistra⁽¹⁵⁾.

Perciò il caso I) del Teorema 6 si spezza in due casi:

- I') *tutti gli elementi di S sono unità sinistre;*
- I'') *tutti gli elementi non nulli di S sono unità sinistre e $0 \cdot S = 0$ ⁽¹⁶⁾.*

Ricordare questo fatto tornerà utile in alcune delle successive dimostrazioni.

Per dimostrare il Teorema 6, osserviamo che se S è privo di annullatori propri e distributivo allora ogni $\varphi_a: x \rightarrow ax$ ha nucleo coincidente con 0 o con S . Ne segue che, se $a \cdot S \neq 0$, l'elemento a è unità sinistra (Osservazione 2). Se pertanto S non è uno zero-stem, esso possiede una unità sinistra ed è idempotente

⁽¹³⁾ Diversi cioè da S e non ridotti al solo $0 \in S$.

⁽¹⁴⁾ Si nota subito che se valgono tanto la I) che la II) allora S si riduce al solo zero.

⁽¹⁵⁾ Infatti se $0 \neq a \in S$ e $0 \cdot a \neq 0$, allora $(\forall x \in S)$, $(0 \cdot a)x = x = 0 \cdot (ax) = 0x$. Ne segue che, se $0 \cdot S \neq 0$, allora zero è unità sinistra.

⁽¹⁶⁾ Questa scrittura indica che il prodotto dello zero per un qualunque elemento di S è sempre nullo. Cfr. per esempio [7].

(Osservazione 3). Da ciò segue, come poco sopra, che i suoi elementi non nulli sono unità sinistre.

Se viceversa tutti gli elementi non nulli sono unità sinistre è $0 \cdot S = 0$, a meno che lo zero non sia unità sinistra ⁽¹⁷⁾. In entrambi i casi si verifica direttamente, (ricordando anche che $S \cdot 0 = 0$) che lo stem è distributivo.

§ 2. - Caso semisemplice.

3. - Possiamo ora individuare facilmente gli stems distributivi semisemplici per mezzo del:

Teorema 7. *Uno stem S è distributivo e semisemplice ⁽¹⁸⁾ se e solo se è una somma diretta del tipo $S = S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_t$, ove $(\forall i \in \{1, \dots, t\})$, tutti gli elementi non nulli di S_i sono unità sinistre in S_i e $0 \cdot S_i = 0$.*

Infatti uno stem semisemplice S è somma diretta di un numero finito di stem semplici ⁽¹⁹⁾: scriviamo $S = S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_t$ (S_i stems semplici). Come osservato all'inizio del n. 1, se S è distributivo ciascun S_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) lo è. Ogni S_i è pertanto privo di annullatori propri ⁽²⁰⁾ e soddisfa pertanto alle condizioni del Teorema 6.

Inoltre, ora, $0 \cdot S_i = 0$ ⁽²¹⁾.

D'altra parte S_i non può essere uno zero-stem perchè uno zero-stem ⁽²²⁾ è ovviamente un ideale (di sé stesso) non ridotto al solo zero, ed annullato a destra da tutti i suoi elementi.

⁽¹⁷⁾ Come si è visto nel commento dell'enunciato.

⁽¹⁸⁾ Gli stems *semisemplici* sono stati definiti in [1], p. 775; sono (nella nostra terminologia) gli stems S privi di ideali destri nilpotenti non nulli e tali che inoltre:

I) $0 \cdot S = 0$;

II) gli ideali destri soddisfanno la condizione catenaria discendente. Cfr. anche [6] che si riferisce al caso finito.

Ricordiamo anche che da [2] risulta che S è semisemplice se e solo se il suo radicale $J_2(S)$ è nullo.

⁽¹⁹⁾ Questa affermazione riassume i teoremi 6, 10, 11 di [1].

La definizione di *stem semplice* data in [1], p. 780 si può enunciare (nella nostra terminologia) nel modo seguente: Uno stem $S \neq 0$ è *semplice* se non ha ideali propri e se inoltre:

I) $0 \cdot S = 0$;

II) gli ideali destri soddisfanno la condizione catenaria discendente;

III) non ha ideali destri (non ridotti al solo zero) annullati a destra da tutti gli elementi di S . Cfr. anche [6].

⁽²⁰⁾ Perchè come abbiamo osservato, gli annullatori di uno stem distributivo sono ideali, ed ogni S_i è privo di ideali poichè semplice.

⁽²¹⁾ Perchè per ipotesi $0 \cdot S = 0$.

⁽²²⁾ Costituito da più di un elemento.

Ricordato il Teorema 6 si ha allora che uno stem distributivo e semisemplice può essere *decomposto in una somma diretta* come indicato nell'enunciato.

Consideriamo ora un numero finito di stems S_1, \dots, S_t tali che gli elementi non nulli di ciascun S_i siano unità sinistre e $0_i \cdot S_i = 0_i$ ⁽²³⁾; ciascun S_i è dunque privo di ideali destri propri e risulta pertanto semplice ⁽²⁴⁾; inoltre è ovviamente distributivo. Lo stem $S = S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_t$ è allora distributivo ⁽²⁵⁾.

D'altra parte la somma diretta di stems semplici è semisemplice ⁽²⁶⁾, e tale è dunque S . Questo completa la dimostrazione dell'enunciato.

Osserviamo anche che, come risulta dalla precedente dimostrazione, *uno stem S è distributivo e semplice se e solo se tutti i suoi elementi non nulli sono unità sinistre e $0 \cdot S = 0$.*

§ 3. - Caso bilatero.

4. - Allo scopo di indicare i legami tra gli stems distributivi e gli anelli di BOOLE ⁽²⁷⁾ è utile la seguente:

Osservazione 8. *Uno stem bilatero ⁽²⁸⁾ S distributivo con unità è un anello di Boole ⁽²⁹⁾.*

Infatti uno stem S bilatero con unità è un anello (cfr. [5] p. 14).

Inoltre, per l'Osservazione 3, è idempotente.

Un importante risultato relativo agli anelli distributivi ⁽³⁰⁾ può essere in un certo senso generalizzato nel:

Teorema 9. *Uno stem S bilatero distributivo possiede un ideale I con $I^2 = 0$ tale che S/I è somma diretta di un anello di Boole B e di un anello R tale che $R^3 = 0$.*

⁽²³⁾ Indichiamo con 0_i lo zero di S_i .

⁽²⁴⁾ Visto che le condizioni II), III) della definizione di stem semplice riportata nella annotazione ⁽¹⁹⁾ sono automaticamente soddisfatte e la I) vale per ipotesi. Inoltre negli stems in cui vale la I) ogni ideale è anche ideale destro (cfr. per esempio [1], [6]); S è pertanto privo di ideali dal momento che è privo di ideali destri.

⁽²⁵⁾ Si ricordino ancora le Osservazioni iniziali del n. 1.

⁽²⁶⁾ Per il teorema 14 di [1].

⁽²⁷⁾ Diciamo qui anello di BOOLE un anello tutti i cui elementi sono idempotenti. Osserviamo che altri autori chiedono ancora che B contenga l'unità. (Cfr. per esempio [9], p. 25). Ricordiamo che un anello di BOOLE è un 2-anello (cfr. per esempio [12].)

⁽²⁸⁾ In cui cioè vale anche la proprietà distributiva destra del prodotto rispetto alla somma.

⁽²⁹⁾ Questa osservazione potrebbe essere utilizzata in ricerche assiomatiche sugli anelli di BOOLE.

⁽³⁰⁾ Cfr. [10], teorema 2: *Un anello A è distributivo se e solo se è somma diretta di un anello di Boole e di un anello con cubo nullo.*

Sia S uno stem bilatero distributivo. Indichiamo con I il derivato di S^+ . Chiamamente I è un sottogruppo normale di S^+ . Inoltre $SI \subseteq I$ e $IS \subseteq I$ perchè $(\forall x, a, b \in S)$ risulta $x(a + b - a - b) = xa + x(b - a - b) = xa - xa = 0 \in I$ ⁽³¹⁾. In modo analogo si verifica che $(a + b - a - b)x = 0 \in I$. Pertanto I è un ideale di S ⁽³²⁾ ed è uno zero-stem. Allora S/I è un anello distributivo ⁽³³⁾.

Pertanto S/I risulta somma diretta di un anello di BOOLE B e di un anello R tale che $R^3 = 0$, per il già citato teorema 2 di [10].

Un esempio ci convince che il nostro risultato è, in un certo senso, il migliore possibile. Sia S^+ un gruppo non abeliano di ordine 6.

Si consideri un elemento $a \in S^+$ che abbia caratteristica 2.

Definiamo in S^+ una operazione di prodotto dicendo che il prodotto di due qualunque elementi di caratteristica 2 è eguale ad a , e che tutti gli altri prodotti sono nulli. Si vede subito che il prodotto è commutativo ed associativo. Parimenti immediato il fatto che le $\varphi_y: x \rightarrow yx$ non nulle sono omomorfismi di S^+ in sè stesso ⁽³⁴⁾. Ne segue che la struttura S così ottenuta è uno stem commutativo e dunque bilatero.

Si può verificare facilmente che valgono le (1). Nonostante tutto questo S non è un anello perchè la somma non è commutativa.

L'insieme I dei 3-elementi di S^+ è un ideale di S ed è uno zero-stem; S/I è un anello di BOOLE di ordine 2.

Corollario 10. Uno stem bilatero S distributivo possiede un ideale T , tale che $T^3 = 0$ e S/T è un anello di Boole.

Sia S bilatero e distributivo ⁽³⁵⁾. Sia T l'insieme degli elementi di S che l'omomorfismo canonico $S \rightarrow S/I$ manda nell'anello R di cui al Teorema 9. Per ragioni di algebra generale ⁽³⁶⁾ T è un ideale di S .

Siano $x, y, z \in T$. Poichè $R^3 = 0$ ⁽³⁷⁾ si ha che $xyz \in I$.

D'altra parte $xyz = (xyz)^2$ (Osservazione 1); poichè $I^2 = 0$, $xyz = 0$ e dunque $T^3 = 0$.

Inoltre S/T è un anello (perchè T contiene I); è sufficiente ora mostrare che S/T è idempotente che cioè $\forall x \in S, x - x^2 \in T$. Osserviamo ora che

⁽³¹⁾ Ricordiamo il lemma 3 di [5]: In uno stem bilatero G si considerino due elementi x, y e due elementi x', y' i quali siano rispettivamente coniugati di x, y entro il gruppo additivo di G . Risulta $xy = x'y'$.

⁽³²⁾ Cfr. [6], p. 250.

⁽³³⁾ È infatti uno stem bilatero distributivo con somma commutativa, visto che, il suo gruppo additivo è il quoziente di un gruppo rispetto al suo derivato.

⁽³⁴⁾ Questo assicura che vale la proprietà distributiva sinistra del prodotto rispetto alla somma.

⁽³⁵⁾ E si continuano ad usare le notazioni del Teorema 9.

⁽³⁶⁾ Cfr. [4].

⁽³⁷⁾ Cfr. Teorema 9.

$(x-x^2)^3=0$ ⁽³⁸⁾. Ne segue che $(x-x^2)+I$ ha cubo nullo e perciò appartiene ad R ⁽³⁹⁾. Pertanto $x-x^2 \in T$, grazie alle posizioni precedenti.

Dato uno stem S , un suo sottostem B e un suo ideale T , diciamo che S è somma semidiretta di B e T se S^+ è somma semidiretta di B^+ e T^+ e se inoltre riesce $BT=0$.

Ciò premesso possiamo dimostrare il seguente:

Teorema 11. *Uno stem bilatero S è distributivo se e solo se è somma semidiretta di un anello di Boole B e di uno stem T a cubo nullo.*

Infatti se S è bilatero e distributivo, possiede (Corollario 10) un ideale T tale che $T^3=0$. Consideriamo il sottostem S^3 (definito nel n. 1) ed osserviamo che $S^3 \cdot S \subseteq S^3$ ed $S \cdot S^3 \subseteq S^3$. Ricordando che se x, y sono generatori di S^3 risulta $2x=0$ e $xy=yx$ (cfr. [10] pag. 851), risulta subito che $(x+y)^3=x^3+y^3$; per l'Osservazione 1 si ha anche $x^3+y^3=x+y$ (x, y generatori di S^3) onde $(x+y)^3=x+y$. Questo basta per dimostrare che $S^3 \cap T=0$, da ciò e dall'Osservazione precedente segue anche che $S^3 \cdot T=0$. D'altra parte, $\forall a \in S$, riesce $(-a^3+a)^3=0$ e (si ricordi l'annotazione 39) dunque $(-a^3+a) \in T$ onde, dalla $a=a^3+(-a^3+a)$, segue che S è somma semidiretta di S^3 e T . Poichè poi S/T (anello di Boole per il corollario 10) è isomorfo ad S^3 , S^3 è un anello di Boole e questo completa la dimostrazione della parte diretta. Per dimostrare la parte inversa basta osservare che se S è somma semidiretta di un anello di Boole B e di uno stem T a cubo nullo, si ha $B \cdot T=0$ e dunque un calcolo diretto mostra che S è distributivo.

§ 4. - Catene speciali.

5. - Introduciamo il concetto di catena speciale:

Definizione B. Sia S uno stem. Diciamo catena speciale di S una catena di ideali di S : $T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_{n-1} \subset T_n = S$ ⁽⁴⁰⁾ tale che l'insieme degli annullatori in T_{i+2}/T_i ⁽⁴¹⁾ si riduca ($\forall i \in \{1, \dots, n-2\}$) ad un sottoinsieme di $\{T_{i+1}/T_i, T_{i+2}/T_i\}$ o di $\{T_i/T_i, T_{i+2}/T_i\}$.

Se $S = T_2$ la catena $T_1 \subset S$ è banalmente speciale: chiameremo *catena speciale banale* una tale catena. Osserviamo che ogni stem possiede la catena speciale banale $0 \subset S$.

⁽³⁸⁾ Infatti per la (1) $x^3 = x^{3+n}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Ne segue visto che S è bilatero che $(x-x^2)^3 = (x-x^2)(x-x^2)(x-x^2) = (x^2-x^3)(x-x^2) = x^3-x^4-x^4+x^5 = 0$.

⁽³⁹⁾ Perchè se la sua prima componente nella decomposizione $S/I = B \oplus R$ di cui al Teorema 9 non fosse nulla, il suo cubo avrebbe ancora prima componente non nulla.

⁽⁴⁰⁾ Il simbolo \subset indica, per noi, inclusione propria.

⁽⁴¹⁾ Tale scrittura ha senso perchè un ideale T di uno stem S è ideale in ogni sottostem di S che lo contenga. Cfr. per esempio [1], [2], [3]. Si veda ancora nel n. 1 per quanto riguarda gli annullatori.

Chiameremo propria una catena speciale che contenga più di due elementi.

Se $T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_n = S$ è una catena speciale, ovviamente ogni suo segmento $T_j \subset T_{j+1} \subset \dots \subset T_n = S$ ($j \in \{1, \dots, n\}$) è una catena speciale.

Osservazione 12. Siano S, S' due stems, φ un omomorfismo di S su S' e $\Phi = \text{Ker } \varphi$. Siano $T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_{n-1} \subset T_n = S$ una catena speciale di S e T_j il più piccolo elemento di tale catena tale che $\Phi \subseteq T_j$ ⁽⁴²⁾. Allora $\varphi(T_j) \subset \varphi(T_{j+1}) \subset \dots \subset \varphi(S) = S'$ è una catena speciale di S' .

Infatti se $T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_n = S$ è una catena speciale, anche $T_j \subset T_{j+1} \subset \dots \subset T_n = S$ è speciale e così pure è speciale la catena $T_j/\Phi \subset T_{j+1}/\Phi \subset \dots \subset T_n/\Phi$ perchè ($\forall k \geq j$) $(T_{k+2}/\Phi)/(T_k/\Phi)$ è isomorfo a T_{k+2}/T_k ⁽⁴³⁾. Allora la catena $\varphi(T_j) \subset \varphi(T_{j+1}) \subset \dots \subset \varphi(T_n) = S'$ è speciale in S' perchè ($\forall k \geq j$) $\varphi(T_{k+2})/\varphi(T_k)$ è isomorfo a $(T_{k+2}/\Phi)/(T_k/\Phi)$ ⁽⁴⁴⁾.

Osservazione 13. Sia S uno stem e sia $0 = T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_{n-1} \subset T_n = S$ una catena speciale propria. Allora T_2 è privo di annullatori propri.

Poichè la catena in questione è propria, essa contiene più di due elementi e dunque $T_2 \neq S$. Supponiamo esista un $x \in T_2$ tale che $A_{T_2}(x)$ sia contenuto propriamente in T_2 . Consideriamo $A_{T_3}(x)$.

Dal momento che $T_2 \subset T_3$ è ovviamente $A_{T_2}(x) \subseteq A_{T_3}(x)$.

Per quanto supposto però $A_{T_3}(x)$ non può contenere T_2 . Ne segue, in base alla Definizione B, che $A_{T_3}(x) = 0$ e dunque $A_{T_2}(x) = 0$.

Abbiamo così dimostrato che un annullatore in T_2 che non coincide con T_2 è nullo; di qui l'asserto.

§ 5. - Stems distributivi con una catena speciale.

6. - Nel tentativo di ottenere risultati analoghi a quelli relativi agli stems bilateri distributivi (e tenendo particolarmente presente il Corollario 10), iniziamo lo studio degli stems distributivi dotati di una catena speciale.

Teorema 14. Sia S uno stem distributivo e sia $0 = T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_n = S$ una sua catena speciale. Se T_2 è tutto costituito da unità sinistre (in T_2 stesso) allora anche S è tutto costituito da unità sinistre.

Se la catena è banale (cioè $S = T_2$) la cosa è ovvia.

Altrimenti incominciamo col dimostrare che ($\forall k \in \{3, \dots, n\}$) T_k/T_{k-2} è tutto costituito da unità sinistre. Facciamo la dimostrazione per induzione.

Per verificare che quanto affermato vale nel caso in cui $k = 3$ è sufficiente mostrare che tutti gli elementi di T_3 sono unità sinistre (in T_3) ⁽⁴⁵⁾, perchè da questo

⁽⁴²⁾ Un tale T_j esiste senz'altro: eventualmente coincide con S .

⁽⁴³⁾ Cfr. per esempio [4].

⁽⁴⁴⁾ Cfr. per esempio [4].

⁽⁴⁵⁾ Tenendo presente l'ipotesi che tutti gli elementi di T_2 sono unità sinistre in T_2 .

segue subito che tutti gli elementi di T_3/T_2 sono ivi unità sinistre. Ricordiamo infatti che, in base alla Definizione B, gli annullatori in T_3 appartengono ad uno dei due insiemi $\{T_2, T_3\}, \{0, T_3\}$. Ma T_2 non può essere annullatore in T_3 perchè altrimenti T_2 sarebbe il più piccolo annullatore proprio in T_3 e allora $T_2 = A_{T_3}(T_3)$. In questo caso T_2 dovrebbe essere uno zero-stem e questo contraddice l'ipotesi.

Così T_3 non ha annullatori propri. Visto che T_3 non è uno zero-stem ⁽⁴⁶⁾, tutti i suoi elementi non nulli sono in esso unità sinistre per il Teorema 6.

Possiamo ora scrivere:

$$(2) \quad xy = y \quad \forall x \in T_3 - \{0\}, \forall y \in T_3$$

$$(3) \quad 0 \cdot x = x \quad \forall x \in T_2.$$

Applicando successivamente la (2), la (3) e la (2) abbiamo $(\forall x \in T_2 - \{0\}, \forall y \in T_3)$

$$y = xy = (0x)y = 0(xy) = 0y,$$

e dunque anche lo zero è unità sinistra in T_3 ⁽⁴⁷⁾, T_3 risulta così tutto costituito da unità sinistre.

Assumiamo ora, come ipotesi induttiva, che T_h/T_{h-2} ($\forall h \in \{3, \dots, k-1\}$) sia tutto costituito da unità sinistre. Ne segue che T_h/T_{h-1} è tutto costituito da unità sinistre. Ragionando come sopra, si dimostra allora che T_{h+1}/T_{h-1} è tutto costituito da unità sinistre, cioè T_k/T_{k-2} è tutto costituito da unità sinistre. Per induzione anche S/T_{n-2} è tutto costituito da unità sinistre.

Possiamo ora dimostrare che T_k ($\forall k \in \{1, \dots, n\}$) è tutto costituito da unità sinistre ⁽⁴⁸⁾. Assumiamo come ipotesi induttiva che T_{k-2} ($\forall k \in \{3, \dots, n\}$) sia tutto costituito da unità sinistre e dimostriamo che allora T_k è tutto costituito da unità sinistre (in sè stesso).

Infatti, qualunque siano $x, y \in T_{k-2}, z \in T_k$, si ha:

$$yz = xyz = (xyx)z = xz \text{ }^{(49)},$$

da cui

$$(6) \quad xz = yz, \quad \forall x, y \in T_{k-2}, \forall z \in T_k.$$

Dalla (6) segue che tutti gli elementi di T_{k-2} hanno lo stesso annullatore in T_k : $\forall x \in T_{k-2}$ è cioè $A_{T_k}(x) = A_{T_k}(T_{k-2})$.

⁽⁴⁶⁾ Perchè altrimenti anche T_2 sarebbe uno zero-stem.

⁽⁴⁷⁾ Si noti che nella dimostrazione abbiamo dovuto usare il fatto che gli elementi non nulli di T_3 sono unità sinistre: ci troveremo ancora in situazioni analoghe.

⁽⁴⁸⁾ Per $k = 1, 2$ l'affermazione è vera per ipotesi, per $k = 3$ è già stata dimostrata.

⁽⁴⁹⁾ Ricordiamo che T_{k-2} è tutto costituito da unità sinistre in sè stesso.

Ricordato che T_k/T_{k-2} è tutto costituito da unità sinistre ⁽⁵⁰⁾ possiamo scrivere

$$(7) \quad (x + T_{k-2})[(y + z) + T_{k-2}] = (y + z) + T_{k-2} \quad \forall x, y, z \in T_k.$$

D'altra parte, qualunque siano $x, y \in T_{k-2}, \forall z \in A_{T_k}(T_{k-2})$

$$(8) \quad (x + T_{k-2}) \cdot [(y + z) + T_{k-2}] = (xy + xz) + T_{k-2} = T_{k-2} \quad (51).$$

Confrontando la (7) con la (8) otteniamo, $\forall y \in T_{k-2}, \forall z \in A_{T_k}(T_{k-2}), y+z \in T_{k-2}$ e dunque $z \in T_{k-2}$. Poichè $T_{k-2} \cap A_{T_k}(T_{k-2}) = 0$ (visto che T_{k-2} è tutto costituito da unità sinistre in sè), se ne deduce che $(\forall z \in A_{T_k}(T_{k-2}))$ è $z = 0$ e cioè $A_{T_k}(T_{k-2}) = 0$. Pertanto gli elementi di T_{k-2} non dividono lo zero a sinistra in T_k e sono unità sinistre in T_k (Osservazione 2). Di qui si ha che lo zero è unità sinistra in T_k e dunque tutti gli elementi di T_k sono unità sinistre ⁽⁵²⁾. Per induzione $S = T_n$ è allora tutto costituito da unità sinistre, come volevasi dimostrare.

Corollario 15. *sia S uno stem distributivo e sia $T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_{n-1} \subset T_n = S$ una sua catena speciale.*

Se tutti gli elementi dello stem T_{j+1}/T_j (per qualche $j \in \{1, \dots, n\}$) sono in esso unità sinistre, lo stesso può dirsi per quelli dello stem S/T_j .

Se la catena è banale (cioè $T_2 = S$) la cosa è ovvia.

In generale per quanto osservato subito dopo la Definizione B, anche

$$T_j \subset T_{j+1} \subset \dots \subset T_n = S$$

è una catena speciale e, per l'Osservazione 12, è speciale anche la catena $T_j/T_j \subset T_{j+1}/T_j \subset \dots \subset T_{n-1}/T_j \subset S/T_j$.

Ora lo stem T_{j+1}/T_j è tutto costituito da unità sinistre per ipotesi e dunque (Teorema 14) S/T_j è tutto costituito da unità sinistre.

7. – Tenendo sempre presente il caso I del Teorema 6 è naturale enunciare il:

Teorema 16. *Sia S uno stem distributivo e sia $0 = T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_{n-1} \subset T_n = S$ una sua catena speciale. Se gli elementi non nulli di T_2 sono sue unità sinistre e $0 \cdot T_2 = 0$, allora $T_2 = S$ cioè la catena è banale.*

⁽⁵⁰⁾ Come sopra dimostrato.

⁽⁵¹⁾ Infatti $x \cdot y \in T_{k-2}$ perchè ogni ideale è ideale sinistro e $xz = 0$ perchè $z \in A_{T_k}(T_{k-2})$.

⁽⁵²⁾ Se infatti in uno stem è, $(\forall x), 0 \cdot x = x$ è anche $(\forall y), yx = y0x = 0x = x$.

Infatti allora gli annullatori in T_3 appartengono all'insieme $\{T_2, T_3\}$ oppure all'insieme $\{0, T_3\}$ per la Definizione B. Se T_2 fosse annullatore in T_3 allora $T_2 = A_{T_3}(T_2)$ e sarebbe uno zero-stem, contro il supposto. Ne segue che T_3 soddisfa al Teorema 6. D'altra parte T_3 non può essere uno zero-stem, lo zero non può essere unità sinistra in T_3 ⁽⁵³⁾, allora, per il Teorema 6, tutti gli elementi non nulli di T_3 sono sue unità sinistre mentre $0 \cdot T_3 = 0$.

Tutti gli elementi non nulli di T_3/T_2 sono pertanto unità sinistre in T_3/T_2 . Si ha cioè che:

$$(9) \quad T_2(x + T_2) = (y + T_2)(x + T_2) = x + T_2 \quad \forall x \in T_3, \forall y \in T_2 - 0 \text{ }^{(54)},$$

e ovviamente

$$(10) \quad T_2(x + T_2) = (0 + T_2)(x + T_2) = T_2 \quad \forall x \in T_3 \text{ }^{(55)}.$$

Confrontando la (9) con la (10) si ha $x \in T_2$ e $T_2 = T_3$.

Poichè le inclusioni, in una catena speciale, sono, per definizione, proprie, si ha $T_2 = S$ e la catena in questione è banale.

Corollario 17. *Sia S uno stem distributivo e sia $T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_n = S$ una sua catena speciale. Se tutti gli elementi non nulli di T_{j+1}/T_j (per qualche $j \in \{1, \dots, n\}$) sono unità sinistre di T_{j+1}/T_j , e inoltre $T_j/T_j \cdot T_{j+1}/T_j = T_j/T_j$, allora $T_{j+1} = S$ (ed $n = j + 1$).*

Se la catena è banale (cioè $T_2 = S$) il corollario svanisce.

Per l'Osservazione 12, la catena $T_j/T_j \subset \dots \subset S/T_j$ è speciale e, per il precedente Teorema 16, T_{j+1}/T_j è l'ultimo elemento di tale catena. Allora $T_{j+1}/T_j = S/T_j$, da cui l'enunciato.

8. - Anche per preparare le considerazioni successive indichiamo qualche risultato relativo al caso in cui una catena speciale inizi con uno zero-stem.

Teorema 18. *Sia S uno stem distributivo. Sia $0 = T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_n = S$ una catena speciale di S tale che T_r (per qualche $r > 1$) sia privo di unità sinistre. Allora T_2 è uno zero-stem.*

Osserviamo intanto che T_2 è privo di annullatori propri (Osservazione 13) e soddisfa pertanto al Teorema 6.

⁽⁵³⁾ Perchè altrimenti lo zero sarebbe unità sinistra anche in T_2 .

⁽⁵⁴⁾ Poichè y è un elemento non nullo di T_2 .

⁽⁵⁵⁾ Poichè $(\forall x \in T_3) 0x = 0$.

Se T_2 fosse tutto costituito da unità sinistre ($r > 2$), allora S sarebbe tutto costituito da unità sinistre (Teorema 14) e questo è contro l'ipotesi ⁽⁵⁶⁾. Se invece gli elementi non nulli di T_2 fossero unità sinistre e $0 \cdot T_2 = 0$, allora $T_2 = S$ (Teorema 16). Questo è da escludersi perchè la catena in questione deve essere propria. L'unica possibilità che il ricordato Teorema 6 consenta è allora che T_2 sia uno zero-stem.

Se $r = 2$, T_2 soddisfa al Teorema 6, è privo di unità sinistre, e dunque è necessariamente uno zero-stem.

Teorema 19. *Sia S uno stem distributivo. Sia $T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_n = S$ una catena speciale di S tale che T_1 sia uno zero-stem. Se i quozienti T_{j+1}/T_j ($\forall j \in \{1, \dots, r-1\}$, per qualche $r \in \{1, \dots, n-1\}$) sono zero-stem, allora $T_r^3 = 0$.*

La dimostrazione può essere fatta per induzione. Infatti $T_1^3 = 0$ per ipotesi. Assumiamo come ipotesi induttiva che $T_j^3 = 0$ per qualche $j \in \{1, \dots, r-1\}$.

Poichè, per ipotesi, T_{j+1}/T_j è uno zero-stem, $T_{j+1}^3 \subset T_j$

D'altra parte, $\forall x, y, z \in T_{j+1}$, l'elemento xyz è idempotente (Osservazione 1), mentre, per l'ipotesi induttiva, T_j non ha idempotenti non nulli. Ne segue $T_{j+1}^3 = 0$. Per induzione $T_r^3 = 0$.

Si osservi che il teorema vale anche nel caso in cui la catena in questione sia banale.

9. - Raccogliendo i risultati precedenti giungiamo al:

Teorema 20. *Sia S uno stem dotato di unità sinistra. Sia $0 = T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_n = S$ una sua catena speciale propria. Allora S è distributivo se e solo se tutti i suoi elementi sono unità sinistre.*

Sia S distributivo e sia $0 = T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_n = S$ una sua catena speciale propria. Osserviamo anzitutto che T_2 non può essere uno zero-stem perchè S (e dunque T_2 stesso) è idempotente (Osservazione 3). Inoltre T_2 non possiede annullatori propri (Osservazione 13). Si ha allora (Teorema 6), che tutti gli elementi non nulli di T_2 sono unità sinistre in T_2 . Se lo zero è unità sinistra in T_2 , l'enunciato è conseguenza immediata del Teorema 14. Rimane la possibilità che sia $0 \cdot T_2 = 0$, ma allora, (Teorema 16), la catena risulterebbe banale contro l'ipotesi. E così dimostrata la prima parte dell'enunciato. L'inverso è ovvio.

Corollario 21. *Sia S uno stem distributivo e $T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_n = S$ una catena speciale propria tale che S/T_1 sia dotato di unità sinistra. Allora tutti gli elementi di S/T_1 sono unità sinistre.*

⁽⁵⁶⁾ Poichè ogni T_j sarebbe allora tutto costituito da unità sinistre.

Infatti allora la catena $T_1/T_1 \subset T_2/T_1 \subset \dots \subset S/T_1$ è una catena speciale propria (Osservazione 12). L'enunciato è dunque conseguenza immediata del Teorema 20.

§ 6. - Stems distributivi speciali.

10. - Tenuti presenti i Teoremi 18 e 20, allo scopo di ottenere un analogo del Corollario 10, è opportuno dare la seguente:

Definizione C. Uno stem S si dice *speciale* se possiede una catena speciale propria $T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_{n-1} \subset T_n = S$ soddisfacente alle seguenti condizioni:

- I) T_1 è uno zero-stem;
- II) S/T_{n-1} è privo di annullatori propri.

La Definizione C ci permette di ottenere il desiderato analogo del Corollario 10, espresso dal:

Teorema 22. *Sia S uno stem distributivo speciale. Allora S contiene un ideale T tale che tutti gli elementi non nulli di S/T sono unità sinistre e $T^3 = 0$.*

Siano S uno stem distributivo speciale e $T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_n = S$ una catena speciale propria soddisfacente le I), II) della Definizione C.

Mettiamoci dapprima nel caso in cui S possieda una unità sinistra.

Se $T_1 = 0$, tutti gli elementi di S (e dunque di S/T_1) sono unità sinistre (Teorema 20) e il Teorema 22 è verificato con $T = T_1$.

Se $T_1 \neq 0$ ed S ha unità sinistre, anche S/T_1 ha unità sinistre (perchè nessuna unità sinistra di S può appartenere a T_1 che per ipotesi è uno zero-stem). Allora tutti gli elementi di S/T_1 sono unità sinistre (Corollario 21). Anche in questo caso il teorema è verificato con $T = T_1$.

Possiamo pertanto supporre che S sia privo di unità sinistre: cominciamo col mostrare che allora tutti gli elementi non nulli dei quozienti T_{j+1}/T_j ($\forall j \in \{1, \dots, n-1\}$) che non sono zero-stem, risultano essere unità sinistre in essi.

Consideriamo ora T_{j+1}/T_j ($\forall j \in \{1, \dots, n-1\}$). Osserviamo che se T_{j+1}/T_j è annullatore in T_{j+2}/T_j ⁽⁵⁷⁾, allora, per la Definizione B, T_{j+1}/T_j è uno zero-stem visto che coincide con $A_{T_{j+2}/T_j}(T_{j+2}/T_j)$.

Se invece T_{j+1}/T_j non è annullatore in T_{j+2}/T_j (nel caso sempre che T_{j+2}/T_j esista), allora, per la Definizione B, T_{j+2}/T_j soddisfa alle condizioni del Teorema 6. Se T_{j+2}/T_j è uno zero-stem, lo è anche T_{j+1}/T_j . Se invece gli elementi

⁽⁵⁷⁾ Ovviamente se T_{j+2}/T_j esiste.

non nulli di T_{j+2}/T_j sono unità sinistre, lo sono anche quelli di T_{j+1}/T_j . L'osservazione è così dimostrata tranne che per il caso in cui T_{j+2}/T_j non esista. Ma allora ciò significa che $T_{j+1} = S$ e T_{j+1}/T_j è S/T_{n-1} . Allora, per la II) della Definizione C, S/T_{n-1} soddisfa alle condizioni del Teorema 6 e ancora l'affermazione è verificata. Ricordando poi che se, per qualche $h \in \{1, \dots, n-1\}$, T_{h+1}/T_h è tutto costituito da unità sinistre, lo stesso accade per S/T_h (Corollario 14) e che se tutti gli elementi non nulli di T_{k+1}/T_k sono unità sinistre e $T_h/T_h \cdot T_{h+1}/T_h = T_h/T_h$ (per qualche $h \in \{1, \dots, n-1\}$), allora $T_{h+1} = S$ (Corollario 16) possiamo concludere osservando che si possono avere solo i seguenti casi:

I) T_{j+1}/T_j è uno zero-stem per ogni $j = 1, \dots, n-1$. Allora $S^3 = 0$ (Teorema 19) e il teorema è verificato con $T = S$ perchè S/S è banalmente costituito da unità sinistre.

II) Esiste un indice $k \in \{2, \dots, n-1\}$, tale che per tutti gli $r \in \{2, \dots, k\}$ T_r/T_{r-1} è uno zero-stem e tutti gli elementi non nulli di T_{k+1}/T_k sono unità sinistre e $T_k/T_k \cdot T_{k+1}/T_k = T_k/T_k$. Allora $T_{k+1} = S$ (Corollario 16); $k+1 = n$ e $T_{n-1}^3 = 0$ (Teorema 19). Il teorema è ancora verificato con $T = T_{n-1}$.

III) Esiste un indice $k \in \{2, \dots, n-1\}$, tale che, per ogni $r \in \{2, \dots, k\}$ T_r/T_{r-1} è uno zero-stem e tutti gli elementi di T_{k+1}/T_k sono unità sinistre. Allora $T_k^3 = 0$ (Teorema 19) e tutti gli elementi di S/T_k sono unità sinistre (Corollario 14). Il teorema è verificato con $T = T_k$.

Quanto precede suggerisce di dare la seguente

Definizione D. Chiameremo ideale speciale di uno stem S un ideale T con $T^3 = 0$ e tale che tutti gli elementi non nulli di S/T siano unità sinistre di S/T .

Segue subito dal Teorema 22 che uno stem distributivo speciale possiede almeno un ideale speciale.

Osservazione 23. Sia S uno stem speciale distributivo, T un ideale speciale di S e sia $T/T \cdot S/T = T/T$. Allora $(\forall x \in S - T), A_s(x) \subseteq T$.

Infatti ora S/T è tutto costituito da unità sinistre e dal momento che $T/T \cdot S/T = T/T$ abbiamo non solo che $S \cdot T \subseteq T$ ma anche $T \cdot S \subseteq T$. Se $T = S$ la relazione è subito verificata. In caso contrario sia $x \in S - T$ e $y \in A_s(x)$. Se $y \in S - T$, avremmo $xy - y \in T$. D'altra parte, ora $xy = 0$ e dunque $y \in T$.

Osservazione 24. Sia S uno stem speciale distributivo, T un ideale speciale di S tale che inoltre T/T sia unità sinistra in S/T . Allora $(\forall x \in S), A_s(x) \subseteq T$.

Infatti, se $x, y \in S - T$, $xy - y \in T$; ma anche se $x \in T$ $xy - y \in T$ ⁽⁵⁸⁾. Abbiamo così, $\forall x \in S$, $xy - y \in T$. D'altra parte se $x \in S$ e $y \in A_s(x)$, risulta $xy = 0$ e dunque $y \in T$, da cui l'asserto.

Teorema 25. *Uno stem speciale S è distributivo se e solo se possiede un ideale speciale T tale che*

$$(11) \quad xyz = 0$$

se almeno sono degli elementi xz, yz appartiene a T .

$$(12) \quad xy - y^2 \in A_s(S) \quad \forall x, y \in S \text{ con } xy \notin T.$$

Sia S uno stem distributivo speciale. Come osservato conterrà un ideale speciale T . Se $T = S$ le (11), (12) sono banalmente verificate.

Sia $S - T \neq \emptyset$; poichè gli elementi non nulli di S/T sono unità sinistre e inoltre se non è $T/T \cdot S/T = T/T$, T/T è unità sinistra, possiamo dire che se $xy \notin T$, $xy - y \in T$.

Per dimostrare la (11) è sufficiente ricordare l'Osservazione 5 (nel caso $n = 3$) dopo aver osservato (nel caso $xz \in T$) che, grazie alla distributività di S , è sempre $xyz = xy(xz) = 0$ e analogamente (nel caso $yz \in T$) $xyz = xz(yz) = 0$.

Per dimostrare la (12) osserviamo che se $x, y, z \in S$ e $xy \notin T$, esiste, per quanto osservato in precedenza, un $t \in T$ tale che $xy = y + t$.

Ne segue che

$$zxy = zyx = zy(y + t) = zy^2 + zyt = zy^2 \text{ (59)}.$$

Abbiamo cioè, qualunque sia $z \in S$, $z(xy - y^2) = 0$ e pertanto $xy - y^2 \in A_s(S)$. Anche la (12) è così dimostrata.

Per mostrare la parte inversa del teorema, supponiamo che S sia uno stem speciale con un ideale speciale T per cui valgono le (11), (12).

Al solito, se $T = S$, $S^2 = 0$ ed S è distributivo.

Sia $T \neq S$ e dimostriamo che S è distributivo.

Siano infatti x, y, z elementi di S tali che valga una almeno delle seguenti condizioni $xz \in T$ o $yz \in T$.

Per la (11) abbiamo $xyz = 0$. Verifichiamo, nei due casi, che valgono le (1).

Se $xz \in T$, allora $x(xz) \in T$ ed essendo $x(yz) = 0$ (per la (11)), anche $x(yz) \in T$. Abbiamo dunque, sempre per la (11), $xy(xz) = xz(yz) = 0$ e valgono le (1).

⁽⁵⁸⁾ Perchè T/T è unità sinistra in S/T .

⁽⁵⁹⁾ Si noti che $zyt = 0$ perchè $t \in T$ (Osservazione 5).

Se $yz \in T$, allora $z(yz) \in T$ ed essendo $yxz = 0$ (per la (11)) perchè $yz \in T$, anche $y(xz) \in T$. Segue allora subito $xy(xz) = xz(yz) = 0$, da cui le (1).

Veniamo ora al caso in cui *nessuno degli elementi xz, yz appartiene a T* . Ricordando quanto osservato all'inizio della dimostrazione del presente teorema, abbiamo che, poichè T è speciale, esiste un $t \in T$ tale che $xz = z + t$ e un $t' \in T$ tale che $yz = z + t'$. Abbiamo così $xyxz = xy(z + t) = xyz$ ⁽⁶⁰⁾ e $xzyz = xz(z + t') = xz^2$ ⁽⁶¹⁾.

Ricordando la (12), abbiamo, poichè $yz \notin T$, $yz - z^2 \in A_s(S)$ e dunque, $\forall x \in S$, $x(yz - z^2) = 0$ cioè $xzyz = xz^2 = xyz$ da cui l'asserto.

Bibliografia.

- [1] D. W. BLACKETT, *Simple and semisimple near-rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 772-785.
- [2] G. BETSCH, *Struktursätze für Fastringe*, Dissertation, Tübingen 1963.
- [3] J. R. CLAY and D. A. LAWVER, *Boolean Near-Rings*, Canadian Math. Bull. **12** (1969), 265-273.
- [4] P. M. COHN, *Universal Algebra*, Harper & Row, New York 1965.
- [5] G. FERRERO, *Sulla struttura aritmetica dei quasi-anelli finiti*, Atti Accad. Sci. Torino **97** (1963), 1114-1130.
- [6] G. FERRERO, *Struttura degli « stems » p -singolari*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **7** (1966), 243-254.
- [7] G. FERRERO, *Sui problemi « tipo Sylow » relativi ai quasi-anelli finiti*, Atti Accad. Sci. Torino **100** (1965-66), 645-657.
- [8] A. FRÖHLICH, *Distributively generated near-rings (I, Ideal Theory)*, Proc. London Math. Soc. (3) **8** (1958), 76-94.
- [9] M. GRAY, *A Radical Approach to Algebra*, Addison Wesley P. C., London 1970.
- [10] M. PETRICH, *Structure des demi-groupes at anneaux distributifs*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A **268** (1969), 849-853.
- [11] J. RUEDIN, *Sur une décomposition des groupoïdes distributifs*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A **268** (1966), 985-988.
- [12] J. L. ZEMMER, *Some remarks on p -rings and their Boolean geometry*, Pacific J. Math. **6** (1956), 193-208.

⁽⁶⁰⁾ Per la (11).

⁽⁶¹⁾ Per la (11).

R i a s s u n t o .

Si studiano gli stems distributivi (cioè gli stems S in cui $\forall x, y, z \in S, xyz = xyxz = = xyxz$). Vengono caratterizzati gli stems distributivi semisemplici e quelli bilateri. La maggior parte del lavoro è dedicata allo studio degli stems distributivi dotati di una catena speciale (Definizione B).

S u m m a r y .

We study distributive near-rings (i.e. near-rings S with $xyz = xyxz = xzyx, \forall x, y, z \in S$) and two-sided distributive near-rings and semi-simple distributive near-rings are characterized. The main part of the paper is a study of distributive near-rings with a special-chain (in the sense of the Definition B).

* * *