Riv. Mat. Univ. Parma (3) 2 (1973), 55-59

DAVID LOWELL LOVELADY (*)

Sulla stabilità asintotica di un'equazione differenziale non lineare perturbata. (**)

1. - Introduzione.

Sia Y uno spazio lineare di dimensione finita con la norma $|\ |$, sia D un aperto di Y tale che 0 è in D, e sia R_+ l'intervallo $[0\ \infty)$. Siano F e G funzioni continue da $R^+ \times D$ a Y tale che $F(t, 0) = G(t, 0) = 0$ se t è in R^+. Per studiare la stabilità asintotica della soluzione del problema

$$(1) \qquad u'(t) = F(t, u(t)) + G(t, u(t)) \ ; \qquad u(0) = z \ ,$$

secondo una tecnica comune occorre:

i) trovare una funzione continua scalare β su R^+ tale che le soluzioni di

$$(2) \qquad v'(t) = F(t, v(t)) \ ; \qquad v(0) = z$$

siano limitate dalle soluzioni di

$$\varphi'(t) = \beta(t)\varphi(t) \ ; \qquad \varphi(0) = |z| \ ,$$

ii) trovare una funzione continua scalare γ su R^+ tale che $|G(t, x)| \leqslant \leqslant \gamma(t)|x|$ se (t, x) è in $R^+ \times D$ e x è sufficientemente piccolo. Allora, se

$$(3) \qquad \lim_{t \to \infty} \exp\left[\int_0^t \beta(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \gamma(s)\,\mathrm{d}s\right] = 0 \ ,$$

(*) Indirizzo: Department of Mathematics, Florida State University, Tallahassee, Florida 32306, U.S.A..

(**) Ricevuto: 21-V-1973.

ogni soluzione di (1), con valori iniziali sufficientemente piccoli ha limite 0 per $t \to \infty$. Teoremi vari di questo tipo sono conosciuti. (Cfr. C. CORDUNEANU [**5**], [**6**], A. STRAUSS e J. A. YORKE [**9**], F. BRAUER [**1**], [**2**], BRAUER e STRAUSS [**3**], e questo autore [7].) In [**5**] e [**6**] i risultati furono ottenuti mediante le funzioni di LYAPUNOV, e in [**1**], [**2**], e [**3**] F è supposta continuamente differenziabile. In questo lavoro elimineremo l'ipotesi della differenziabilità mediante un metodo simile a quello di [7], inoltre la condizione su G sarà indebolita come in [7] e [**8**].

2. - Continuazione e stabilità.

Teorema 1. *Sia θ un numero positivo e siano ω e λ funzioni continue scalari su $R^+ \times [0, \theta)$. Supponiamo*: $c \geqslant 0$, (t, x) in $R^+ \times D$, $|x| < \theta$,

$$|x - cF(t, x)| \geqslant |x| - c\omega(t, |x|) \tag{4}$$

e

$$|x - cG(t, x| \geqslant |x| - c\lambda(t, |x|)\,. \tag{5}$$

Inoltre, supponiamo che per $\varepsilon > 0$ esista un $\delta > 0$ tale che se $0 \leqslant \xi < \delta$ la soluzione ϱ di

$$\varrho'(t) = \omega(t, \varrho(t)) + \lambda(t, \varrho(t))\,; \qquad \varrho(0) = \xi \tag{6}$$

esiste su R^+, abbia i suoi valori in $[0, \varepsilon]$, e soddisfi alla relazione $\lim\limits_{t \to \infty} \varrho(t) = 0$. *Allora, per $\varepsilon > 0$ c'è un $\delta > 0$ tale che se $0 \leqslant |z| < \delta$, ogni soluzione u di* (1) *esiste su R^+, soddisfa $|u(t)| \leqslant \varepsilon$ per ogni t in R^+, e soddisfa alla relazione* $\lim\limits_{t \to \infty} u(t) = 0$.

Si osserva che (4) e (5) non richiedono che ω e λ abbiano valori solamente non-negativi. In ([**8**], Teoremi 1, 2), questo autore dimostrò che se $|z| \leqslant \xi$ allora $|u(t)| \leqslant \varrho(t)$ purchè u e ϱ esistano. Così il Teorema 1 è evidente.

Se $\{\,,\}$ è un prodotto scalare e $|\;|$ è data da $|x|^2 = \{x, x\}$, allora (4) è equivalente a $\operatorname{Re}\{x, F(t, x)\} \leqslant |x|\,\omega(t, |x|)$ per ogni (t, x) in $R^+ \times D$ con $|x| < \theta$. Se, come nel Teorema 2 di [**8**], ω è della forma $\omega(t, r) = r\beta(t)$, allora (4) è equivalente a $\operatorname{Re}\{x, F(t, x)\} \leqslant \beta(t)|x|^2$ per ogni (t, x) in $R^+ \times D$ con $|x| < \theta$. Così vediamo che (4) limita F. Procedimenti analoghi si applicano a G e (5), risultando così indebolite significativamente le condizioni solite sulla norma di G.

Teorema 2. *Siano β e γ funzioni continue scalari su R^+. Siano dati ω e λ con $\omega(t, r) = r\beta(t)$ e $\lambda(t, r) = r\gamma(t)$. Sia θ un numero positivo e supponiamo che* (4) *e* (5) *siano soddisfatti per $c \geqslant 0$, (t, x) in $R^+ \times D$, e $|x| < \theta$. Supponiamo che* (3) *sia soddisfatto. Allora le conclusioni del Teorema* 1 *sono valide.*

Dimostrazione. Si deve dimostrare solamente che (6) soddisfa le ipotesi di Teorema 1. Sia σ un numero tale che

$$\exp\left[\int_0^t [\beta(s) + \gamma(s)]\, ds\right] \leqslant \sigma$$

per ogni t in R^+. Sia ε un numero positivo, e sia $\delta = \min\{\varepsilon/\sigma, \theta/\sigma\}$. Poichè $\sigma \geqslant 1$, abbiamo $\delta \leqslant \theta$. Supponiamo che $0 \leqslant \xi < \delta$ e che ϱ sia la soluzione di (6). Allora ϱ è dato da

$$\varrho(t) = \xi \exp\left[\int_0^t [\beta(s) + \gamma(s)]\, ds\right],$$

da cui $\varrho(t) \leqslant \xi\sigma < \delta\sigma \leqslant \varepsilon$ per ogni t in R^+, e $\lim_{t\to\infty} \varrho(t) = 0$. La dimostrazione è completa.

3. - Discussione.

Malgrado la semplicità apparente di Teorema 2, esso include risultati noti vari. Sia A l'algebra delle funzioni lineari da Y a Y con la norma $\|\ \|$ e la identità I. Sia μ la «misura» di W. A. Coppel ([4], p. 41):

$$\mu[A] = \lim_{\delta \to 0_+} (1/\delta)\left(\|I + \delta A\| - 1\right).$$

Se F è continuamente differenziabile e $\mu[(\partial/\partial x)F(t, x)] \leqslant \beta(t)$ per ogni (t, x) in $R^+ \times D$, allora (4) è soddisfatto con ω preso come nel Teorema 2. (Cfr. [7], Proposition). Con ciò abbiamo eliminato la condizione di differenziabilità usata in [1], [2], e [3]. Inoltre, si noti che (5) è assicurato mediante la disuguaglianza $|G(t, x)| \leqslant \lambda(t, |x|)$. Con ciò abbiamo indebolito le condizioni solite sulla norma di G.

Ci sono due combinazioni, particolarmente utili, di ipotesi su β e γ che assicurano (3).

Proposizione 1. Supponiamo che

$$\limsup_{t\to\infty} (1/t) \int_0^t \beta(s)\, ds \tag{7}$$

e

$$\limsup_{t\to\infty} (1/t) \int_0^t \gamma(s)\,ds$$

esistano, e che la loro somma sia negativa. Allora (3) è valido.

Proposizione 2. Supponiamo che

$$\lim_{t\to\infty} \exp\Big[\int_0^t \beta(s)\,ds\Big] = 0$$

e che esista un numero η tale che

$$\int_0^t \gamma(s)\,ds \leqslant \eta$$

per ogni t in R^+. Allora (3) è valido.

Le proposizioni possono essere dimostrate con calcoli elementari. Una conseguenza della Proposizione 1 è che, se (7) esiste ed è negativo, se c'è un numero positivo θ tale che per $\delta < \theta$ e γ è dato da $\gamma(t) = \delta$, allora (3) è valido. Brauer [1], [2] e questo autore [7] hanno usato questa idea. Corduneanu [5], [6] ha usato idee analoghe a quelle della Proposizione 1 essendo formulate mediante le funzioni di Lyapunov e limiti esponenziali sulle soluzioni di (2).

La Proposizione 2 dimostra che se (2) ha una stabilità esponenziale particolare allora quella stabilità non è disturbata per una perturbazione con «la parte positiva» in $L^1(R^+)$. Si noti che la Proposizione 2 *non* richiede che γ sia in $L^1(R^+)$. (Cfr. [7], Theorem 2).

Bibliografia.

[1] F. Brauer, *Perturbations of nonlinear systems of differential equations* **I**, J. Math. Anal. Appl. **14** (1966), 198-206.

[2] F. Brauer, *Perturbations of nonlinear systems of differential equations* II, J. Math. Anal. Appl. **17** (1967), 418-434.

[3] F. Brauer e A. Strauss, *Perturbations of nonlinear systems of differential equations* III, J. Math. Anal. Appl. **31** (1970), 37-48.

[4] W. A. Coppel, *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*, D. C. Heath and Co., Boston 1965.

[5] C. CORDUNEANU, *Asupra stabilitatii asimptotice* II, Acad. R. P. R. Fil. Iași Stud. Cerc. Ști. Mat. **10** (1959), 209-213.

[6] C. CORDUNEANU, *Sur la stabilité asymptotique*, An. Ști. Univ. « A. I. Cuza », Iași Sect. I a Mat. **5** (1959), 37-40.

[7] D. L. LOVELADY, *Nonlinear differential equations with logarithmically small perturbations*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **6** (1972), 11-19.

[8] D. L. LOVELADY, *Un'estensione del metodo di confronto per equazioni differenziali ordinarie*, An. Ști. Univ. « Al. I. Cuza » Iași **20** (1974), 35-38.

[9] A. STRAUSS e J. A. YORKE, *Perturbing uniform asymptotically stable nonlinear systems*, J. Differential Equations **6** (1969), 452-483.

Summary

A general asymptotic stability theorem is given for the equations $u'(t) = F(t, u(t)) + G(t, u(t))$. *It is indicated that the theorem includes many known results.*

* * *