Riv. Mat. Univ. Parma (3) 2 (1973), 97-102

BRUNO D'AMORE (*)

Concetto di biclique e di biriempimento nell'ambito della teoria dei grafi bipartiti e loro estensioni. (**)

Scopo del presente lavoro è quello di introdurre i concetti di biclique e di n-clique nell'ambito della teoria dei grafi polipartiti, studiarne alcune proprietà e presentare relazioni numeriche tra i cardinali delle classi definenti le biclique stesse. Sarà preciso impegno di un altro lavoro quello di mostrare un modo di usare i risultati ottenuti, dopo aver interpretato, in un modello strutturalmente identico, i concetti della teoria dei grafi in termini di teoria dei giochi. Il lavoro che conclude la ricerca ha per titolo: *Alcune considerazioni sui QT-grafi interpretati come grafi polipartiti in relazione alla teoria dei giochi*, e verrà pubblicato sugli « Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Università di Modena ». (***) Si sono volute mantenere staccate le ricerche, dato il loro diverso carattere, sopra precisato.

1. - Alcune definizioni.

Sia $G(X, \Omega)$, $\Omega \subseteq \mathscr{P}(X^2)$, un grafo finito semplice (1).

1) Com'è noto, G è detto bipartito completo, se è bipartito (2) e se, detti X', X'' i sottoinsiemi di X in cui sono separati i vertici dalla bipartizione, e dette n', n'' le loro rispettive cardinalità, m la cardinalità di Ω, è $m = n' \cdot n''$.

(*) Indirizzo: Istituto di Geometria, Piazza di Porta S. Donato, 40127 Bologna, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G. N. S. A. G. A., del C. N. R.. — Ricevuto: 27-II-1973.

(***) Il lavoro è stato nel frattempo pubblicato nel volume XXI, f. I, 1-7, 1972.

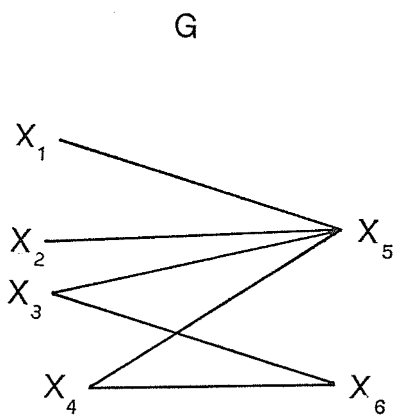
(1) Cfr. [1], p. 5 e [2]. In questa nota, ogni grafo è supposto semplice, anche se ciò non verrà rilevato di volta in volta.

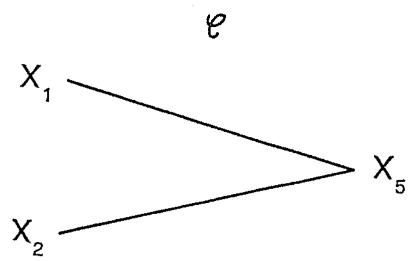
(2) Cfr. [1], p. 7 e [2].

2) Il grafo $\mathscr{C}(Y, \mathscr{O})$, sottografo di G, $Y \subseteq X$, $\mathscr{O} \subseteq \Omega$, è detto *clique* se è completo.

3) In [2] è definito il concetto di grafo bicomplementare di uno dato: se $G(X, \Omega)$ è un grafo bipartito e $G^{\diamond}(X, \Delta)$ è tale che $G \cup G^{\diamond}$ è bipartito completo, allora $G^{\diamond}$ è detto bicomplementare di G (3).

4) Se $G(X, \Omega)$ è un grafo bipartito e $\mathscr{C}(Y, \mathscr{O})$ è un sottografo di G bipartito completo, allora chiamiamo $\mathscr{C}$ *biclique*.





2. - Alcune proprietà.

Se $\mathscr{C}$ $(Y, \mathscr{O})$ è una biclique, Y' ed Y'' sono i sottoinsiemi in cui è diviso Y della bipartizione, e p', p'', s sono rispettivamente le cardinalità di Y', Y'', $\mathscr{O}$ si ha immediatamente $s = p' \cdot p''$.

Sia $G^{\diamond}(X, \Omega^{\diamond})$ il bicomplementare di un dato grafo $G(X, \Omega)$ bipartito. Si avrà che $G \cup G^{\diamond}(X, \Omega \cup \Omega^{\diamond})$ è bipartito completo per definizione. Sia $\mathscr{C}$ una biclique di $G \cup G^{\diamond}$ che si ripartisce in due sottografi $\mathscr{C}'$ e $\mathscr{C}''$ rispettivamente sottografi di G e di $G^{\diamond}$; sarà $\mathscr{C}' \cup \mathscr{C}'' = \mathscr{C}$, se e solo se è lecito operare, tramite $\cup$, su $\mathscr{C}'$ e $\mathscr{C}''$, cioè se e solo se gli insiemi dei vertici di $\mathscr{C}'$ e di $\mathscr{C}''$ coincidono.

Se $\mathscr{C}'(A, \mathscr{A})$, $\mathscr{C}''(B, \mathscr{B})$, A e B sono divisi rispettivamente dalle bipartizioni di G e $G^{\diamond}$ (che si riflettono pure in A e B) nei sottoinsiemi A', A'' e B', B''; siano $a = \operatorname{card} A$, $a' = \operatorname{card} A'$, $a'' = \operatorname{card} A''$, $\alpha = \operatorname{card} \mathscr{A}$, $b = \operatorname{card} B$, $b' =$

(3) Con il segno $G \cup G^{\diamond}$ abbiamo inteso indicare la nota operazione di «unione tra grafi», definita, per es., in L. MURACCHINI, *Introduzione alla teoria dei grafi*, Torino, 1967, p. 50. Si noti che, poichè il grafo $G \cup G^{\diamond}$ deve essere semplice, Δ non contiene elementi di Ω. Si noti pure che $G^{\diamond}(X, \Delta)$ può non essere connesso.

$= \operatorname{card} B'$, $b'' = \operatorname{card} B''$, $\beta = \operatorname{card} \mathscr{B}$. Si ha:

$$\alpha \cdot \beta = \operatorname{card}(A' \cup B') \cdot \operatorname{card}(A'' \cup B'') .$$

Diciamo che $\mathscr{C}''$ è un *biriempimento di* $\mathscr{C}'$ *in* $\mathscr{C}$. *Classe* del biriempimento di $\mathscr{C}'$ in $\mathscr{C}$ è il numero β, che varia al variare della scelta di $\mathscr{C}'$ in $\boldsymbol{G}$. Vale allora la seguente proprietà:

Dato $\boldsymbol{G}$ bipartito, se $\max\limits_{\mathscr{C}'} \beta = \min\limits_{\mathscr{C}'} \beta$, allora $\boldsymbol{G}$ è bipartito completo; e viceversa. La dimostrazione è immediata.

Consideriamo ora, dato $\boldsymbol{G}(X, \Omega)$, il grafo $\overline{\boldsymbol{G}}(X, \mathscr{P}(X^2) - \Omega)$ detto complementare di $\boldsymbol{G}$ (4).

Consideriamo una biclique $\mathscr{C}_1(T_1, \mathcal{T}_1)$. Siano T_1', T_1'' i sottoinsiemi di T_1 ottenuti dalla bipartizione del grafo di cui $\mathscr{C}_1$ è sottografo. Siano poi t_1', t_1'', τ_1 le cardinalità di T_1', T_1'', $\mathcal{T}_1$. Evidentemente $\overline{\mathscr{C}}_1$ non è connesso, ma si divide in due grafi connessi $\overline{\mathscr{C}}_1'$ e $\overline{\mathscr{C}}_2'$. Se, analogamente, consideriamo $\mathscr{C}_2(T_2, \mathcal{T}_2)$ e i e i numeri naturali di evidente significato t_2', t_2', $\mathcal{T}_2$, supposto che $\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2 = \mathscr{C}$, vediamo in quali condizioni si può dire che $\mathscr{C}$ è connesso bipartito ed è una biclique.

Intanto, se p' e p'' hanno il senso specificato, dalle considerazioni precedenti segue che:

$$p' = t_1' + t_2' - \operatorname{card}(T_1' \cap T_1'')$$

$$p'' = t_1'' + t_2'' - \operatorname{card}(T_2' \cap T_2'')$$

e quindi $s = p' \cdot p'' - \operatorname{card}[(T_1' \Delta T_2') \times (T_1'' \Delta T_2'')]$ essendo $\times$ il simbolo della operazione di prodotto cartesiano e Δ quello della differenza simmetrica.

Sia ora $\mathscr{C}(Y, \mathcal{O})$ una biclique. Sia $\mathscr{C}''(B, \mathscr{B})$ il biriempimento di $\mathscr{C}'(A, \mathscr{A})$ in $\mathscr{C}$. Siano A' e A'' i sottoinsiemi di A ottenuti dalla bipartizione di A in $\mathscr{C}'$; siano B' e B'' gli analoghi sottoinsiemi di B. Siano rispettivamente a', a'', b', b'' le loro cardinalità. Siano infine Y', Y'' i sottoinsiemi analoghi di Y e n', n'' le loro cardinalità. Si ha, per definizione, $s = n' \cdot n''$ e quindi:

$$s = [a' + b' - \operatorname{card}(A' \cap B')] \cdot [a'' + b'' - \operatorname{card}(A'' \cap B'')] . \tag{1}$$

Inoltre, da ovvie considerazioni segue che:

$$s = a' a'' + b' b'' - \operatorname{card}(A' \cap B') \cdot \operatorname{card}(A'' \cap B'') . \tag{2}$$

Dalla uguaglianza tra i secondi membri delle (1) e (2) segue la

(4) Cfr. [**1**], p. 277 e [**2**].

$$[a' + b' - \text{card}\,(A' \cap B')] \cdot [a'' + b'' - \text{card}\,(A'' \cap B'')] =$$

$$= a' a'' + b' b'' - \text{card}\,(A' \cap B') \cdot \text{card}\,(A'' \cap B'') ,$$

da cui:

$$a' b'' + a'' b' - a' \,\text{card}\,(A'' \cap B'') - b' \,\text{card}\,(A'' \cap B'') - a'' \,\text{card}\,(A' \cap B') -$$

$$- b'' \,\text{card}\,(A' \cap B') + 2 \,\text{card}\,(A' \cap B') \cdot \text{card}\,(A'' \cap B'') = 0 .$$

La definizione, e ogni altra considerazione, può essere estesa come segue. Sia $\boldsymbol{G}$ un grafo n-partito, $\boldsymbol{G}(X, \Omega)$. Sia $\mathscr{C}$ un sottografo di $\boldsymbol{G}$, n-partito completo. Diremo $\mathscr{C}$ una n-clique. Siano poi $\boldsymbol{G}_1^\diamond, \boldsymbol{G}_2^\diamond, \ldots, \boldsymbol{G}_n^\diamond$ sottografi tali che $\boldsymbol{G}_1^\diamond \cup \boldsymbol{G}_2^\diamond \cup \ldots \cup \boldsymbol{G}_n^\diamond = \boldsymbol{G}$. siano $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \ldots, \mathscr{C}_n$ dei sottografi $\mathscr{C}_1 \subseteq \boldsymbol{G}_1^\diamond$, $\mathscr{C}_2 \subseteq \boldsymbol{G}_2^\diamond$, ..., $\mathscr{C}_n \subseteq \boldsymbol{G}_n^\diamond$ tali che $\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2 \cup \ldots \cup \mathscr{C}_n = \mathscr{C}$, essendo $\mathscr{C}$ una n-clique (5). Siano $\mathscr{C}_1(A, \mathscr{A}_1), \ldots, \mathscr{C}_n(A, \mathscr{A}_n)$, A p-partito in n maniere in generale distinte. Sia α il cardinale comune a ciascun insieme di vertici di $\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_n$. Si ha:

$$n\alpha = \text{card}\,(A_{11} \cup A_{21} \cup \ldots \cup A_{n1}) \cdot \text{card}\,(A_{12} \cup A_{22} \cup \ldots \cup A_{n2}) +$$

$$+ \text{card}\,(A_{11} \cup A_{21} \cup \ldots \cup A_{n1}) \cdot \text{card}\,(A_{13} \cup A_{23} \cup \ldots \cup A_{n3}) + \ldots$$

$$\ldots + \text{card}\,(A_{11} \cup A_{21} \cup \ldots \cup A_{n1}) \cdot \text{card}\,(A_{1n} \cup A_{2n} \cup \ldots \cup A_{nn}) +$$

$$+ \text{card}\,(A_{12} \cup A_{22} \cup \ldots \cup A_{n2}) \cdot \text{card}\,(A_{13} \cup A_{23} \cup \ldots \cup A_{n3}) + \ldots ,$$

con ovvio significato dei termini A_{ij} ciascuno dei quali rappresenta un elemento della polipartizione di A in $\mathscr{C}_i$.

Si trovano immediatamente, per le biclique, alcune proprietà generalizzabili alle n-clique:

1) se $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$, in generale $\mathscr{C}$ è non connesso tetrapartito completo, se $A_1' \cap A_2' = A_1'' \cap A_2'' = \emptyset$; in tal caso, però, non è eseguibile l'operazione di unione e quindi basterà scartare questa situazione;

2) se $A_1' \cap A_2' \neq \emptyset$ o $A_1'' \cap A'' \neq \emptyset$ (o entrambi i casi), $\mathscr{C}$ è bipartito connesso non completo; ma $\mathscr{C}$ non è allora una biclique, dunque basterà scartare anche questo caso;

---

(5) Valgono, naturalmente, le restrizioni relative alla applicabilità della operazione $\cup$, già fatte notare in precedenza nel caso $n = 2$.

3) dunque se e solo se $A_2' \subseteq A_1'$ o viceversa e $A_2'' \subseteq A_1''$ o viceversa, allora $\mathscr{C}$ è una biclique.

Definiamo ora l'operazione di concatenazione ([6]) tra biclique che indicheremo con il segno $\boxplus$. Se $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ sono due clique, intenderemo come « concatenazione » di $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ il grafo $\mathscr{C}_1 \boxplus \mathscr{C}_2 = \mathscr{C}(T, \Gamma)$ essendo $T = (T_1' \cup T_2') \cup \cup (T_1'' \cup T_2'')$ e $\Gamma = \mathscr{T}_1 \cup \mathscr{T}_2 \cup \mathscr{T}_3$ dove $\mathscr{T}_3$ è l'insieme degli spigoli congiungenti elementi di $T_1' \Delta T_2'$ con elementi di $T_1'' \Delta T_2''$.

Evidentemente, quali che siano $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$, si ha che $\mathscr{C}_1 \boxplus \mathscr{C}_2 = \mathscr{C}$ è una biclique. Se $t_1 = \operatorname{card}(T_1' \cup T_2')'$, $t_2 = \operatorname{card}(T_1'' \cup T_2'')$ ed $s = \operatorname{card} \Gamma$, si ha sempre $s = t_1 \cdot t_2$.

L'operazione $\boxplus$ gode della proprietà associativa e commutativa, come è facile verificare. Inoltre, se $\mathscr{C}$ è l'insieme delle biclique, la struttura $(\mathscr{C}, \boxplus)$ è chiusa rispetto a $\boxplus$, dato che gli elementi di $\mathscr{C}$ sono biclique e $\boxplus$ associa a coppie di elementi di $\mathscr{C}$ ancora un elemento di $\mathscr{C}$, per definizione.

Consideriamo il grafo particolare $\mathscr{C}_\Phi(Y, \Omega)$ con $Y = \emptyset$; si può pensare $\mathscr{C}_\Phi$ come una biclique. Se si ammette che $\mathscr{C}_\Phi \in \mathscr{C}$, allora $\mathscr{C}_i \boxplus \mathscr{C}_\Phi = \mathscr{C}_i = \mathscr{C}_\Phi \boxplus \mathscr{C}_i$. Dunque la struttura $(\mathscr{C}, \boxplus)$ è quella di monoide abeliano.

L'operazione $\boxplus$ investe, nella teoria delle biclique, una particolare importanza sia dal punto di vista strutturale, sia dal punto di vista applicativo.

Chiameremo il grafo $\boldsymbol{H}(Z, \mathscr{T}_3)$, dove

$$Z = Z_1 \cup Z_2 = [T_1 - (T_1' \cup T_2')] \cup [T_2 - (T_1'' \cup T_2'')],$$

con ovvio significato dei simboli, « chiusura » di $\mathscr{C}$.

Seguono relazioni immediate tra il card Z ed il numero β, definito come biriempimento in precedenza.

Se $\boldsymbol{G}(X, \Omega)$ è un grafo bipartito, indicheremo con $\mathscr{D}(\boldsymbol{G})$ la *bidensità* di $\boldsymbol{G}$, cioè il max (card Y) ([7]), con $\mathscr{C}(Y, \mathscr{O})$. Ovviamente, se $\boldsymbol{G}$ è bipartito semplice connesso, $\omega(\boldsymbol{G}) = 2$ mentre $\mathscr{D}(\boldsymbol{G}) \geqslant 2$. Dunque: $\mathscr{D}(\boldsymbol{G}) \geqslant \omega(\boldsymbol{G})$, per ogni $\boldsymbol{G}$ bipartito semplice connesso. Da qui segue la coppia di relazioni:

$$\mathscr{D}(\boldsymbol{G}) \geqslant \omega(\boldsymbol{G}) = 2 .$$

Inoltre, per relazioni note e dimostrate in maniera interessante altrove ([8]):

$$\mathscr{D}(\boldsymbol{G}) \geqslant \frac{n^2}{n^2 - 2m} , \tag{3}$$

([6]) Distinta, come si vedrà, da quella di « attaccamento » tra grafi, definita, per es., in L. MURACCHINI, *op. cit.*, p. 49.

([7]) È chiaro il riferimento alla densità $\omega(\boldsymbol{G})$ di $\boldsymbol{G}$ intesa come massimo della cardinalità degli insiemi dei vertici delle clique in $\boldsymbol{G}$.

([8]) Cfr. M. OTTAVIANI, *Alcune relazioni notevoli tra parametri relativi ai grafi semplici*, Boll. U.M.I., (4) **5** (1972), p. 451.

essendo n ed m rispettivamente le cardinalità di X ed Ω.

La (3), dato che $\boldsymbol{G}$ è bipartito, connesso ed è $n \neq 2$, può essere scritta anche nella maniera seguente:

$$\mathscr{D}(\boldsymbol{G}) > \frac{(n'+n'')^2}{(n'+n'')^2 - 2m}\,, \tag{4}$$

con ovvio significato dei simboli numerici. Se $\boldsymbol{G}$ è bipartito completo, si ha:

$$\frac{(n'+n'')^2}{(n'+n'')^2 - 2m} = \frac{(n'+n'')^2}{(n'-n'')^2}\,; \tag{5}$$

ma è noto che

$$2 = \omega\,(\mathrm{G}) \geqslant \frac{(n'+n'')^2}{(n'-n'')^2}\,. \tag{6}$$

Si possono dunque avere due casi:

(i) $(n'+n'')^2 = 2(n'-n'')^2$, se $\omega(\mathrm{G}) = 2$;

(ii) $(n'+n'')^2 = (n'-n'')^2$, se $\omega(\mathrm{G}) = 1$.

È immediato constatare che entrambe le uguaglianze (i), (ii) portano a casi assurdi, incompatibili con le ipotesi di bipartizione, connessione e completezza fatte su $\boldsymbol{G}$.

Dunque, possiamo dedurre una restrizione alla validità della disuguaglianza (3), escludendo che valga nel caso $\omega(\mathrm{G}) = 2$.

Bibliografia.

[1] C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris 1970.

[2] B. D'Amore, *Alcune considerazioni circa i grafi bipartiti orientati*, Riv. Mat Univ. Parma, (3) (**1**) (1972), 247-251.

[3] L. Muracchini, *Introduzione alla teoria dei grafi*, Boringhieri, Torino 1967.

[4] M. Ottaviani, *Alcune notevoli relazioni tra parametri relativi ai grafi semplici*, Boll. Un. Mat. It. (4) **5** (1972), 451.

Summary.

We introduce the definition of «biclique» as complete bipartite subgraph of a bipartite graph and we study some of its properties.

* * *