Riv. Mat. Univ. Parma (3) 2 (1973), 121-124

BRUNO D'AMORE (*)

Sulle trasformazioni (1, 1, 2) osculatrici una corrispondenza fra tre piani proiettivi. (**)

1. – Recentemente, M. VILLA ha iniziato lo studio delle trasformazioni puntuali fra tre piani proiettivi (1). Valendoci della trattazione del VILLA stesso, determineremo sotto quali condizioni esistano trasformazioni (1, 1, 2) osculatrici di una corrispondenza fra tre piani proiettivi in una terna regolare di punti corrispondenti.

2. – Sia $\mathscr{C}$ una corrispondenza puntuale fra tre piani proiettivi π_1, π_2, π_3 ed O_1, O_2, O_3 una terna regolare di punti corrispondenti in $\mathscr{C}$ (2) che assumeremo come origini delle coordinate proiettive x_1, x_2 (in π_1), y_1, y_2 (in π_2), z_1, z_2 (in π_3).

Le equazioni della corrispondenza $\mathscr{C}$ sono del tipo:

$$(1) \qquad \begin{cases} z_1 = f_1(x_1, x_2; y_1, y_2), \\ z_2 = f_2(x_1, x_2; y_1, y_2), \end{cases}$$

dove le funzioni f_1, f_2 si suppongono sviluppabili in serie di potenze nell'intorno dei punti O_1, O_2 (3).

(*) Indirizzo: Istituto di Geometria, Piazza di Porta S. Donato, 40127 Bologna, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del C.N.R. (G.N.S.A.G.A.) — Ricevuto: 23-XI-1973.

(1) M. VILLA, *Sulle corrispondenze fra tre piani*, Ann. Mat. pura e appl. (4) **71** (1966), 351.

(2) Si veda in particolare il n. **2** del lavoro cit. in (1).

(3) Si veda la nota (3) del lavoro cit. in (1), p. 353.

Detta $\mathscr{P}_i$ la proiettività che la trasformazione puntuale T_i subordina fra i fasci di direzioni di centri O_h, O_k $(i, h, k = 1, 2, 3;\ i \neq h,\ i \neq k,\ h \neq k)$ ed assumendo come rette $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $z_1 = z_2$ le rette rispettivamente corrispondenti delle rette $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = x_2$ nella $\mathscr{P}_2$ e come rette $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_1 = y_2$ le rette rispettivamente corrispondenti delle rette $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $z_1 = z_2$ nella $\mathscr{P}_1$ (4), le equazioni della $\mathscr{C}$ diventano del tipo:

$$(2)\qquad \begin{cases} z_1 = \alpha x_1 + \beta y_1 + A_1(x_1, x_2) + B_1(y_1, y_2) + C_1(x_1, x_2;\ y_1, y_2) + [3]\,, \\[2ex] z_2 = \alpha x_2 + \beta y_2 + A_2(x_1, x_2) + B_2(y_1, y_2) + C_2(x_1, x_2;\ y_1, y_2) + [3]\,, \end{cases}$$

dove:

$$\begin{aligned} A_j(x_1, x_2) &= \sum_{r,s} a^j_{rs} x_r x_s\,, \\ B_j(y_1, y_2) &= \sum_{r,s} b^j_{rs} y_r y_s\,, \\ C_j(x_1, x_2;\ y_1, y_2) &= \sum_{r,s} c^j_{rs} x_r y_s\,, \end{aligned}$$

dove $a^j_{rs} = a^j_{sr}$, $b^j_{rs} = b^j_{sr}$, $\alpha\beta \neq 0$ $(j, r, s = 1, 2)$, mentre con [3] si indicano i termini di grado superiore al secondo.

3. – In un altro recente lavoro (5), il VILLA ha espresso una corrispondenza fra tre piani proiettivi che, fissato un punto di π_1 (π_2) è una omografia fra i piani π_2 e π_3 $(\pi_1$ e $\pi_3)$; fissato un punto di π_3 è, in generale, una trasformazione quadratica tra π_1 e π_2 (6).

Le equazioni della detta trasformazione sono del tipo:

$$(3)\qquad \begin{cases} z_1 = \dfrac{a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + m_1x_1 + n_1x_2 + p_1y_1 + q_1y_2 + r_1}{c_{11}x_1y_1 + c_{12}x_1y_2 + c_{21}x_2y_1 + c_{22}x_2y_2 + m_3x_1 + n_3x_2 + p_3y_1 + q_3y_2 + r_3} \\[3ex] z_2 = \dfrac{b_{11}x_1y_1 + b_{12}x_1y_2 + b_{21}x_2y_1 + b_{22}x_2y_2 + m_2x_1 + n_2x_2 + p_2y_1 + q_2y_2 + r_2}{c_{11}x_1y_1 + c_{12}x_1y_2 + c_{21}x_2y_1 + c_{22}x_2y_2 + m_3x_1 + n_3x_2 + p_3y_1 + q_3y_2 + r_3} \end{cases},$$

dove le a, b, c, m, n, p, q, r sono costanti.

---

(4) Con tale scelta dei sistemi di riferimento, una terna di direzioni corrispondenti in $\mathscr{C}$ è data da $x_2 = px_1$ in π_1, $y_2 = py_1$ in π_2, $z_2 = pz_2$ in π_3.

(5) M. VILLA, *Le omografie fra tre piani proiettivi*, Boll. Un. Mat. Ital. (IV) **4** (1971), p. 239.

(6) Una siffatta corrispondenza ha assunto il nome di *trasformazione*: (1, 1, 2) nel lavoro citato nella (5), il VILLA dà le condizioni affinchè tale trasformazione sia una omografia anche tra π_1 e π_2.

4. – Ci proponiamo ora di determinare le condizioni affinchè le (3) osculino, in una terna regolare di punti corrispondenti O_1, O_2, O_3, le (2). Imponendo alle (3) di osculare in O_1, O_2 le (2), otteniamo dopo aver posto, come è lecito, $r_3 = 1$:

$$(4)\quad \begin{cases} m_1 = n_2 = \alpha\,, \qquad p_1 = q_2 = \beta\,, \qquad n_1 = q_1 = m_2 = p_2 = 0\,. \\ m_3 = -a^1_{11}/\alpha\,, \quad n_3 = -2a^1_{12}/\alpha\,, \quad p_3 = -b^1_{11}/\beta\,, \quad q_3 = -2b^1_{12}/\beta\,, \\ a_{11} = c^1_{11} - \dfrac{\beta}{\alpha}\,a^1_{11} - \dfrac{\alpha}{\beta}\,b^1_{11}\,, \\ a_{12} = c^1_{12} - 2\dfrac{\alpha}{\beta}\,b^1_{12}\,, \quad a_{21} = c^1_{21} - 2\dfrac{\beta}{\alpha}\,a^1_{12}\,, \quad a_{22} = c^1_{22}\,, \quad b_{11} = c^2_{11}\,, \\ b_{12} = c^2_{11} - \dfrac{\beta}{\alpha}\,a^1_{11}\,, \\ b_{21} = c^2_{21} - \dfrac{\alpha}{\beta}\,b^1_{11}\,, \quad b_{22} = c^2_{22} - 2\dfrac{\beta}{\alpha}\,a^1_{12} - 2\dfrac{\alpha}{\beta}\,b^1_{12}\,, \end{cases}$$

purchè siano soddisfatte le seguenti condizioni:

$$(5)\quad a^1_{22} = b^1_{22} = a^2_{11} = b^2_{11} = 0\,, \quad a^1_{11} = 2a^2_{12}\,, \quad a^2_{22} = 2a^1_{12}\,, \quad b^1_{11} = 2b^2_{12}\,, \quad b^2_{22} = 2b^1_{12}\,.$$

Possiamo dunque concludere che, in generale, non vi sono trasformazioni (1, 1, 2) osculatrici la (2) nell'intorno dei punti O_1, O_2. Se, però, si verificano le (5), in base alle (4) e (5), possiamo concludere che esiste una ed una sola trasformazione (1, 1, 2) osculatrice la $\mathscr{C}$, di equazioni:

$$(6)\quad \begin{cases} z_1 = \alpha x_1 + \beta y_1 + a^1_{11} x_1^2 + 2a^1_{12} x_1 x_2 + b^1_{11} y_1^2 + 2b^1_{12} y_1 y_2 + \\ \qquad + c^1_{11} x_1 y_1 + c^1_{12} x_1 y_2 + c^1_{21} x_2 y_1 + c^1_{22} x_2 y_2 + [3]\,, \\ z_2 = \alpha x_2 + \beta y_2 + a^1_{11} x_1 x_2 + 2a^1_{12} x_2 + b^1_{11} y_1 y_2 + 2b^1_{12} y_2 + \\ \qquad + c^2_{11} x_1 y_1 + c^2_{12} xy + c^2_{21} x_1 y_2 + c^2_{22} x_2 y_2 + [3]\,. \end{cases}$$

5. – Il risultato ottenuto in **4** è facilmente interpretabile; esso porta alla seguente proposizione:

condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una trasformazione (1, 1, 2) *che oscula una corrispondenza $\mathscr{C}$ fra tre piani proiettivi in una terna regolare di punti corrispondenti è che siano indeterminate le direzioni caratteristiche delle* T_1 *e* T_2, dove T_i è la corrispondenza subordinata dalla $\mathscr{C}$ fra i piani π_h e π_k $(i, h, k = 1, 2, 3;\ i \neq h,\ i \neq k,\ h \neq k)$.

Infatti, le equazioni di T_1 e T_2 sono, rispettivamente:

$$T_1 \begin{cases} z_1 = \beta y_1 + B_1(y_1, y_2) + [3] , \\ z_2 = \beta y_2 + B_2(y_1, y_2) + [3] , \end{cases} \qquad T_2 \begin{cases} z_1 = \alpha x_1 + A_1(x_1, x_2) + [3] , \\ z_2 = \alpha x_2 + A_2(x_1, x_2) + [3] . \end{cases}$$

L'equazione complessiva delle direzioni caratteristiche di T_1 è

$$b^2_{11} y^3_1 + (2b^2_{12} - b^1_{11}) y^2_1 y_2 + (b^2_{22} - 2b^1_{12}) y_1 y^2_2 - b^1_{22} y^3_2 = 0 \tag{7}$$

mentre quella delle direzioni caratteristiche di T_2 è:

$$a^2_{11} x^3_1 + (2a^2_{12} - a^1_{11}) x^2_1 x_2 + (a^2_{22} - 2a^1_{12}) x_1 x^2_2 - a^1_{22} x^3_2 = 0 . \tag{8}$$

È immediato constatare che condizione necessaria affinchè le (7) e (8) siano indeterminate è che valgano le (5); d'altra parte, se valgono le (5), e dunque esiste ed è unica la trasformazione (1, 1, 2) che oscula la $\mathscr{C}$ nella terna regolare O_1, O_2, O_3, allora le (7) e (8) sono indeterminate.

Summary

We determine the conditions for a correspondence (1, 1, 2) *osculates a point correspondence among three projective planes in a regular tern of corresponding points.*

* * *