Riv. Mat. Univ. Parma (3) 2 (1973) 213-231

MAURO DILIGENTI (*)

Una teoria delle collezioni (**)

Nel presente lavoro presento due formulazioni di una teoria degli insiemi, nella quale sia possibile collezionare le classi (anche proprie) di **GB** e le collezioni.

L'intento ultimo è quello di fornire una teoria più flessibile di **GB**, quindi più adatta a fornire una fondazione per una porzione abbastanza ampia della teoria delle categorie.

In vista di ciò, le esigenze fondamentali da soddisfare sono le seguenti:

1) per ogni bf di **GB**, avere la collezione di tutte le classi che la soddisfano;
2) poter collezionare non solo classi, ma anche collezioni di classi etc.

La prima delle due formulazioni riflette in modo più diretto le suaccennate esigenze. La seconda, più semplice e più «scoperta», si presta meglio al confronto con altre teorie, in particolare **GB** e **ZFU** (cioè **ZF** più l'esistenza di un universo). Il lavoro si articola perciò nelle seguenti parti:

1) Prima formulazione della teoria (teoria **TC**).
2) Seconda formulazione della teoria (teoria $\mathbf{TC}_1$).
3) Equipollenza fra **TC** e $\mathbf{TC}_1$.
4) Interpretazione di **GB** in **TC**.
5) Interpretazione di **TC** in **ZFU**.

1. - La teoria TC.

Nella teoria **TC** (del primo ordine con uguaglianza) che vogliamo costruire, si hanno i due predicati primitivi, $\in$ (binario) e Cl (unario).

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R. Ricevuto: 13-III-1973.

La bf atomica $\mathrm{Cl}(x)$ si leggerà: « x è una classe ».

Per poter elencare gli assiomi occorrono delle definizioni preliminari. Diamo anzitutto la definizione di « insieme »:

Definizione 1.

$$\mathrm{S}(x) \leftrightarrow (\exists y)(\mathrm{Cl}(y) \wedge x \in y) ,$$

cioè x è un *insieme* se e solo se appartiene a qualche classe.

Definizione 2. Una bf φ è *predicativa* quando le variabili quantificate si riferiscono ad insiemi, in altri termini, il quantificatore universale compare in φ solo in sottoformule della forma:

$$(\forall x)(\mathrm{S}(x) \to \psi)$$

e quello esistenziale solo in sottoformule della forma:

$$(\exists x)(\mathrm{S}(x) \wedge \psi) .$$

Definizione 3. Una bf φ è *semipredicativa* quando le variabili quantificate si riferiscono o a classi o a insiemi: le presenze in φ dei quantificatori sono delle seguenti forme:

$$(\forall x)(\mathrm{Cl}(x) \to \psi) \qquad (\forall x)(\mathrm{S}(x) \to \psi)$$

$$(\exists x)(\mathrm{Cl}(x) \wedge \psi) \qquad (\exists x)(\mathrm{S}(x) \wedge \psi) .$$

Passiamo ora all'elencazione degli assiomi. Come di consueto, dopo l'enunciazione dei primi assiomi, dimostreremo qualche teorema prima di enunciare gli altri.

Assioma 0. $(\forall x)(\mathrm{S}(x) \to \mathrm{Cl}(x))$.

Ogni insieme è una classe.

Assioma 1. *Assioma di Estensionalità*

$$(\forall z)(\forall y)((\forall x)(x \in y \leftrightarrow x \in z) \to y = z) .$$

Assiamo 2. (1° *Schema d'assioma di comprensione*): *Sia $\varphi(x)$ una formula predicativa le cui variabili libere cadono tra $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$; allora è un assioma*

$$\mathrm{Cl}(y_1) \wedge \mathrm{Cl}(y_2) \wedge \ldots \wedge \mathrm{Cl}(y_n) \to (\exists z)(\mathrm{Cl}(z) \wedge (\forall x)(x \in z \leftrightarrow S(x) \wedge \varphi(x))) ;$$

se $n = 0$ allora l'assioma assume la seguente forma:

$$(\exists z)\big(\mathrm{Cl}(z) \wedge (\forall x)(x \in z \leftrightarrow \mathrm{S}(x) \wedge \varphi(x))\big) .$$

Teorema 1. *Sia* φ *una* bf; *allora è un teorema:*

$$(\forall t)\big(t \in z \leftrightarrow \varphi(t)\big) \wedge (\forall t)\big(t \in y \leftrightarrow \varphi(t)\big) \rightarrow z = y .$$

Teorema 2. *Sia* φ *una* bf *predicativa le cui variabili libere cadono tra* $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$; *allora è un teorema:*

$$\mathrm{Cl}(y_1) \wedge \mathrm{Cl}(y_2) \wedge \ldots \wedge \mathrm{Cl}(y_n) \rightarrow (\exists ! z)\big(\mathrm{Cl}(z) \wedge (\forall x)(x \in z \leftrightarrow \varphi(x) \wedge \mathrm{S}(x))\big) .$$

Dimostrazione. L'esistenza della classe z si ha tenendo presente l'assioma 2, mentre l'unicità discende dal Teorema 1, prendendo come formula ben formata $\varphi(x) \wedge \mathrm{S}(x)$.

Teorema 3.

$$\mathrm{Cl}(x) \wedge \mathrm{Cl}(y) \rightarrow (\exists ! z)\big(\mathrm{Cl}(z) \wedge (\forall u)(u \in z \leftrightarrow \mathrm{S}(u) \wedge (u = x \vee u = y))\big) .$$

Dimostrazione. L'esistenza della classe z deriva dall'assioma 2, prendendo come bf la formula predicativa $u = x \vee u = y$. L'unicità di tale classe si ha ancora una volta dal Teorema 1, prendendo la stessa bf.

Assioma 3. *Assioma della coppia per insiemi*

$$\mathrm{S}(x) \wedge \mathrm{S}(y) \rightarrow (\exists z)\big(\mathrm{S}(z) \wedge (\forall u)(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)\big) .$$

Teorema 4.

$$\mathrm{S}(x) \wedge \mathrm{S}(y) \rightarrow (\exists ! z)\big(\mathrm{S}(z) \wedge (\forall u)(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)\big) .$$

Dimostrazione. L'esistenza dell'insieme z è assicurata dall'assioma 3, mentre l'unicità dal Teorema 1.

Teorema 5.

$$\mathrm{Cl}(x) \rightarrow (\exists ! z)\Big(\mathrm{Cl}(z) \wedge (\forall u)\big(u \in z \leftrightarrow (\exists y)(\mathrm{S}(y) \wedge u \in y \wedge y \in x) \wedge \mathrm{S}(u)\big)\Big) .$$

Dimostrazione. L'esistenza della classe z scende dall'assioma 2 prendendo la bf predicativa $(\exists y)(\mathrm{S}(y) \wedge u \in y \wedge y \in x)$, l'unicità ancora una volta si ha dal Teorema 1.

Assioma 4. *Assioma dell'unione per insiemi*

$$\mathrm{S}(x) \rightarrow (\exists z)(\mathrm{S}(z) \wedge (\forall u)(u \in z \leftrightarrow (\exists y)(u \in y \wedge y \in x))) .$$

Teorema 6.

$$\mathrm{S}(x) \rightarrow (\exists ! z)\big(\mathrm{S}(z) \wedge (\forall u)(u \in z \leftrightarrow (\exists y)(u \in y \wedge y \in x))\big) .$$

Dimostrazione. L'unicità discende dal Teorema 1 prendendo come bf $(\exists y)(u \in y \wedge y \in x)$.

Questo unico z sarà chiamato *l'unione dell'insieme x.*

Teorema 7.

$$\mathrm{Cl}(x) \rightarrow (\exists z)\big(\mathrm{Cl}(z) \wedge (\forall u)(u \in z \leftrightarrow \mathrm{S}(u) \wedge u \subseteq x)\big) .$$

Dimostrazione. L'esistenza della classe z discende dall'assioma 2 prendendo la bf predicativa $(\forall v)(\mathrm{S}(v) \rightarrow (v \in u \rightarrow v \in x))$.

Teorema 8.

$$\mathrm{Cl}(x) \rightarrow (\exists ! z)\big(\mathrm{Cl}(z) \wedge (\forall u)(u \in z \leftrightarrow \mathrm{S}(u) \wedge u \subseteq x)\big) .$$

Dimostrazione. L'unicità della classe z discende dal Teorema 1 prendendo la bf $\mathrm{S}(u) \wedge u \subseteq x$.

Assioma 5. *Assioma dell'insieme potenza*

$$\mathrm{S}(x) \rightarrow (\exists z)\big(\mathrm{S}(z) \wedge (\forall u)(u \in z \leftrightarrow \mathrm{S}(u) \wedge u \subseteq x)\big) .$$

Teorema 9.

$$\mathrm{S}(x) \rightarrow (\exists ! z)\big(\mathrm{S}(z) \wedge (\forall u)(u \in z \leftrightarrow \mathrm{S}(u) \wedge u \subseteq x)\big) .$$

L'insieme z è detto l'insieme potenza dell'insieme x.

Teorema 10.

$$(\exists z)\big(\mathrm{Cl}(z) \wedge (\forall u)(u \in z \leftrightarrow \mathrm{S}(u) \wedge u \neq u)\big) .$$

Dimostrazione. L'esistenza di z dipende dall'assioma 2. Possiamo inoltre scrivere l'enunciato del teorema nel modo seguente:

$$(\exists z)\big(\mathrm{Cl}(z) \wedge (\forall u)(u \notin z \leftrightarrow u = u)\big)$$

e poichè $u = u$ è un teorema logico, sarà anche: $(\exists z)\big(\mathrm{Cl}(z) \wedge (\forall u)(u \notin z)\big)$. Sfruttando anche il Teorema 1, si ha poi:

Teorema 11.

$$(\exists ! z)\big(\mathrm{Cl}(z) \wedge (\forall u)(u \notin z)\big)\,.$$

Questo unico z sarà la classe vuota, che verrà indicata con $\emptyset$.

Teorema 12.

$$\mathrm{Cl}(x) \to (\exists z)\Big(\mathrm{Cl}(z) \wedge (\forall u)\big(u \in z \leftrightarrow \mathrm{S}(u) \wedge (\forall y)(y \in x \to u \in y)\big)\Big)\,.$$

Dimostrazione. L'esistenza di tale classe discende dall'assioma 2, considerando la bf $(\forall y)(y \in x \to u \in y)$ che risulta equivalente ad una predicativa in quanto x è una classe.

Teorema 13.

$$\mathrm{Cl}(x) \to (\exists ! z)\Big(\mathrm{Cl}(z) \wedge (\forall u)\big(u \in z \leftrightarrow \mathrm{S}(u) \wedge (\forall y)(y \in x \to u \in y)\big)\Big)\,.$$

Assioma 6. *Assioma di rimpiazzamento per insiemi.*

Sia $\varphi(x, y)$ una bf predicativa avente libere solo le variabili $z_1, z_2, \ldots, z_n, x, y$; allora è un assioma:

$$\mathrm{Cl}(z_1) \wedge \ldots \wedge \mathrm{Cl}(z_n) \wedge \mathrm{S}(a) \wedge (\forall u)(\forall v)(\forall w)\cdot$$
$$\cdot\big(\mathrm{Cl}(u) \wedge \mathrm{Cl}(v) \wedge \mathrm{Cl}(w) \wedge \varphi(u, v) \wedge \varphi(u, w) \to v = w\big) \to$$
$$\to (\exists b)\Big(\mathrm{S}(b) \wedge (\forall y)\big(\mathrm{S}(y) \to \big(y \in b \leftrightarrow (\exists x)(x \in a \wedge \varphi(x, y))\big)\big)\Big)\,.$$

Teorema 14. (*Isolamento per insiemi*). *Siano a, b, x tre variabili distinte, sia $\varphi(x)$ una* bf *predicativa contenente libera x, ma non b, allora è un teorema*:

$$(\forall a)\Big(\mathrm{S}(a) \to (\exists b)\big(\mathrm{S}(b) \wedge (\forall x)(x \in b \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x))\big)\Big)\,.$$

Dimostrazione. Per dimostrare questo teorema è sufficiente usare l'assioma di rimpiazzamento per insiemi relativamente alla bf predicativa $\varphi(x) \wedge x = y$.

Teorema 15.

$$\mathrm{Cl}(z) \wedge z \neq \emptyset \rightarrow (\exists b)\big(\mathrm{S}(b) \wedge (\forall x)(x \in b \leftrightarrow (\forall t)(t \in z \rightarrow x \in t))\big) .$$

Dimostrazione. Sia $\mathrm{Cl}(z) \wedge z \neq \emptyset$ e sia $a \in z$. Chiaramente a è un insieme, quindi per l'isolamento,

$$(\exists b)\big(\mathrm{S}(b) \wedge (\forall x)(x \in b \leftrightarrow x \in a \wedge (\forall t)(\mathrm{S}(t) \rightarrow (t \in z \rightarrow x \in t)))\big) .$$

D'altra parte, da $\mathrm{Cl}(z) \wedge a \in z$ segue che $x \in a \wedge (\forall t)\big(\mathrm{S}(t) \rightarrow (t \in z \rightarrow x \in t)\big)$ equivale a $(\forall t)(t \in z \rightarrow x \in t)$, da cui l'asserto.

Sia ora $\varphi(x)$ la seguente bf:

$$(*) \qquad \mathrm{S}(x) \wedge \emptyset \in x \wedge (\forall y)\big(y \in x \rightarrow (\forall u)((\forall z)(z \in u \leftrightarrow z \in y \vee z = y) \rightarrow u \in x)\big) .$$

È facile verificare che essa è equivalente (sotto gli assiomi enunciati sin qui) alla sua relativizzata ad S, $\psi(x)$.

Assioma 7. *Assioma dell'infinito per insiemi*

$$(\exists x)\big(\mathrm{S}(x) \wedge \emptyset \in x \wedge (\forall y)(y \in x \rightarrow (\forall u)((\forall z)(z \in u \leftrightarrow z \in y \vee z = y) \rightarrow u \in x))\big) .$$

Ovviamente l'assioma asserisce che la classe $\mathscr{E}$ determinata dalla bf predicativa $\psi(x)$ è non vuota.

Corollario. $(\exists ! x)\big(\mathrm{S}(x) \wedge (\forall u)(u \in x \leftrightarrow (\forall t)(t \in \mathscr{E} \rightarrow u \in t))\big)$.

Dimostrazione. Applicando il Teorema 15 alla classe non vuota $\mathscr{E}$ si ottiene l'esistenza; l'unicità segue dal Teorema 1.

Indichiamo con ω l'insieme individuato dal corollario precedente. Si avrà:

$$\mathrm{S}(\omega) \wedge (\forall u)\big(u \in \omega \leftrightarrow (\forall t)(t \in \mathscr{E} \rightarrow u \in t)\big) ,$$

ovvero, ricordando la definizione di $\mathscr{E}$, abbiamo:

Teorema 16. $\mathrm{S}(\omega) \wedge (\forall u)\big(u \in \omega \leftrightarrow (\forall t)(\mathrm{S}(t) \wedge \varphi(t) \rightarrow u \in t)\big)$, *dove* $\varphi(x)$ *è ancora la* $(*)$.

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente teorema:

Teorema 17. *L'insieme ω soddisfa φ, cioè:*

a) $\mathrm{S}(\omega)$,

b) $\emptyset \in \omega$,

c) $(\forall y)\big(y \in \omega \to (\forall v)\big((\forall z)(z \in v \leftrightarrow z \in y \vee z = y) \to v \in \omega\big)\big)$.

Dimostrazione. Il punto *a)* segue dal Teorema 16. Per il punto *b)*, ricordiamo che, per il Teorema 16, $\emptyset \in \omega \leftrightarrow (\forall t)\big(\mathrm{S}(t) \wedge \varphi(t) \to \emptyset \in t\big)$. Ma $\varphi(t) \to \emptyset \in t$, quindi $\emptyset \in \omega$. Del punto *c)* diamo una dimostrazione formale.

(1)	1.	$y \in \omega$	hp.
(2)	2.	$(\forall z)(z \in v \leftrightarrow z \in y \vee z = y)$	hp.
(3)	3.	$\mathrm{S}(t) \wedge \varphi(t)$	hp.
(1)	4.	$(\forall t)\big(\mathrm{S}(t) \wedge \varphi(t) \to y \in t\big)$	teor. 16
	5.	$\varphi(t) \to (\forall w)\big(w \in t \to (\forall u)\big((\forall z)(z \in u \leftrightarrow z \in w \vee z = w) \to u \in t\big)\big)$	def. di $\varphi(t)$
(3)	6.	$y \in t \to (\forall u)\big((\forall z)(z \in u \leftrightarrow z \in y \vee z = y) \to u \in t\big)$	pred. 3, 4
(1, 3)	7.	$y \in t$	pred. 4, 3
(1, 3)	8.	$(\forall z)(z \in v \leftrightarrow z \in y \vee z = y) \to v \in t$	pred. 6, 7
(1, 2, 3)	9.	$v \in t$	
(1, 2)	10.	$(\forall t)\big(\mathrm{S}(t) \wedge \varphi(t) \to v \in t\big)$	eI. e Gen.
(1, 2)	11.	$v \in \omega$	teor. 16
(1)	12.	$(\forall v)\big((\forall z)(z \in v \leftrightarrow z \in y \vee z = y) \to v \in \omega\big)$	eI. e Gen.
	13.	*c)* .	

Assioma 8. (2° *Schema d'assiomi di comprensione*). *Sia* $\varphi(x)$ *una* bf *semi-predicativa le cui variabili libere cadano tra* $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$, *allora è un assioma la seguente* bf:

$$\mathrm{Cl}(y_1) \wedge \mathrm{Cl}(y_2) \wedge \ldots \wedge \mathrm{Cl}(y_n) \to (\exists z)(\forall x)\big(x \in z \leftrightarrow \mathrm{Cl}(x) \wedge \varphi(x)\big) ,$$

con l'intesa che per $n = 0$ *l'assioma assume la seguente forma:*

$$(\exists z)(\forall x)\big(x \in z \leftrightarrow \mathrm{Cl}(x) \wedge \varphi(x)\big) .$$

Utilizzando i due assiomi di comprensione relativamente alla bf predicativa $x = x$, si possono ora definire la classe V di tutti gli insiemi e la collezione U di tutte le classi:

$$\mathrm{Cl}(V) \wedge (\forall x)(x \in V \leftrightarrow \mathrm{S}(x)) ,$$

$$(\forall x)(x \in U \leftrightarrow \mathrm{Cl}(x)) .$$

In particolare avremo: $V \in U$ perchè V è una classe. Vediamo qualche altra relazione esistente tra U e V.

Dall'assioma 0 abbiamo intanto:

Teorema 18. $V \subseteq U$.

Per la definizione di insieme si ha inoltre:

Teorema 19. $(\forall x)(x \in U \to x \subseteq V)$.

Dimostrazione.

(1)	1.	$x \in U$	hp.
(2)	2.	$y \in x$	hp.
	3.	$x \in U \to \mathrm{Cl}(x)$	def.
(1)	4.	$\mathrm{Cl}\,(x)$	MP.
(1, 2)	5.	$y \in x \wedge \mathrm{Cl}(x)$	prop.
(1, 2)	6.	$(\exists x)(y \in x \wedge \mathrm{Cl}(x))$	RE.
(1, 2)	7.	$\mathrm{S}(y)$	def.
	8.	$\mathrm{S}(y) \to y \in V$	def.
(1, 2)	9.	$y \in V$	MP.
(1)	10.	$y \in x \to y \in V$	eI.
(1)	11.	$x \subseteq V$	trad.
	12.	$x \in U \to x \subseteq V$	eI.

Diamo ora un certo numero di assiomi riguardanti le collezioni.

Assioma 9. *Assioma della coppia per collezioni*

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall t)(t \in z \leftrightarrow t = x \vee t = y) .$$

Teorema 20. $(\forall x)(\forall y)(\exists ! z)(\forall t)(t \in z \leftrightarrow t = x \vee t = y)$.

Dimostrazione. L'esistenza della collezione z è assicurata dall'assioma 9, l'unicità discende dal Teorema 1, prendendo come bf: $t = x \vee t = y$.

Assioma 10. *Assioma dell'unione per collezioni*

$$(\forall x)(\exists t)(\forall y)\big(y \in t \leftrightarrow (\exists z)(y \in z \wedge z \in x)\big)\ .$$

Teorema 21. $(\forall x)(\exists! t)(\forall y)\big(y \in t \leftrightarrow (\exists z)(y \in z \wedge z \in x)\big)$.

Dimostrazione. L'esistenza della collezione t discende dall'assioma 10, l'unicità dal Teorema 1 prendendo la bf $(\exists z)(y \in z \wedge z \in x)$.

Assioma 11. *Assioma della collezione potenza*

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)\ .$$

Teorema 22. $(\forall x)(\exists! y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$.

Dimostrazione. L'esistenza della collezione y è assicurata dall'assioma 11, l'unicità deriva dal Teorema 1, prendendo la bf $z \subseteq x$.

Assioma 12. *Assioma di isolamento per collezioni* (*schema*). *Siano* x, y, z, *tre variabili distinte, sia* φ *una* bf *non contenente libera la variabile* y; *allora è un assioma*:

$$(\forall z)(\exists y)(\forall x)\big(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi(x)\big)\ .$$

Teorema 23. *Siano* x, y, z, *tre variabili distinte, sia* φ *una* bf *contenente libera la variabile* x *e non contenente libera la variabile* y; *allora*:

$$(\forall z)(\exists! y)(\forall x)\big(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi(x)\big)\ .$$

Dimostrazione. L'unicità della collezione y discende dal Teorema 1 prendendo la bf: $x \in z \wedge \varphi(x)$.

Mediante questi ultimi assiomi sulle collezioni, si possono definire con le consuete tecniche i simboli funzionali per la coppia $(\{\ldots,\ldots\})$, l'unione $(\cup)$ e la potenza (P).

Avremo perciò:

$$\begin{aligned}
&z \in \{x, y\} \leftrightarrow z = x \vee z = y\ ;\\
&z \in \cup(x) \leftrightarrow (\exists y)(z \in y \wedge y \in x)\ ;\\
&z \in \mathrm{P}(x) \leftrightarrow z \subseteq x\ .
\end{aligned}$$

Possiamo poi introdurre il simbolo $\{x \in t: \varphi(x)\}$, dove x è una variabile che non compare nel termine t.

Analogamente si possono introdurre i simboli funzionali binari: $\cup$, $\cap$, $\langle \dots, \dots \rangle$.

Assioma 13. *Assioma di fondazione*

$$x \neq \emptyset \rightarrow (\exists y)(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset) .$$

Utilizzando gli assiomi sugli insiemi possiamo ora dimostrare il:

Teorema 24.

a) $x \in V \wedge y \in V \rightarrow \{x, y\} \in V$,
b) $x \in V \rightarrow \cup(x) \in V$,
c) $x \in V \rightarrow V \cap \mathrm{P}(x) \in V$,
d) $\emptyset \in V$,
e) $\omega \in V$.

Dimostrazione. Dimostriamo solo il punto *a*). Dall'assioma 3 si ha: $x \in V \wedge y \in V \rightarrow (\exists ! z)(z \in V \wedge (\forall u)(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y))$.
Per la regola di scelta (cfr. [5]) si avrà perciò:

$$a \in V \wedge (\forall u)(u \in a \leftrightarrow u = x \vee u = y) .$$

D'altra parte, $(\forall u)(u \in \{x, y\} \leftrightarrow u = x \vee u = y)$, quindi (per il Teorema 1), $a = \{x, y\}$, e infine $\{x, y\} \in V$.

Per la definizione di insieme si ha inoltre:

Teorema 25. $V = \cup(U)$.

Corollario. $\cup(U) \subseteq U$.

Definizione 4. Una collezione x è *transitiva* se: $\cup(x) \subseteq x$.

Teorema 26. *Sia* $\varphi(x)$ *una* bf *semipredicativa le cui variabili libere cadono tra* $x, y_1, y_2, \dots, y_n$; *allora è un teorema*:

$$y_1 \in U \wedge y_2 \in U \wedge \dots \wedge y_n \in U \rightarrow (\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow x \in U \wedge \varphi(x)) .$$

Dimostrazione. Dall'assioma di isolamento e dalla definizione di U segue immediatamente:

$$(\exists z)(\forall x)\big(x \in z \leftrightarrow x \in U \wedge \psi(x)\big)\,,$$

dove $\psi(x)$ è una qualunque bf.

Teorema 27. *Sia* $\varphi(x)$ *una* bf *predicativa le cui variabili libere cadono tra* $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$; *allora è un teorema:*

$$y_1 \in U \wedge y_2 \in U \wedge \ldots \wedge y_n \in U \to \{x \in V\colon \varphi(x)\} \in U\,.$$

Dimostrazione. Per il primo schema d'assiomi di comprensione, sotto l'ipotesi $y_1 \in U \wedge y_2 \in U \wedge \ldots \wedge y_n \in U$, si ha che esiste una classe b tale che:

$$(\forall x)\big(x \in b \leftrightarrow x \in V \wedge \varphi(x)\big)\,.$$

D'altra parte $x \in \{x \in V\colon \varphi(x)\} \leftrightarrow x \in V \wedge \varphi(x)$, perciò: $b = \{x \in V\colon \varphi(x)\}$. Ma b è una classe, quindi $\{x \in V\colon \varphi(x)\} \in U$.

Teorema 28. $(\exists y)\big(\emptyset \in y \wedge (\forall x)(x \in y \to x \cup \{x\} \in y)\big)\,.$

Dimostrazione. Dal Teorema 17 si ha:

$$\emptyset \in \omega \wedge (\forall x)\big(x \in \omega \to (\forall u)\big((\forall z)(z \in u \leftrightarrow z \in x \vee z = x) \to u \in \omega\big)\big)\,.$$

D'altra parte, per le definizioni di unione e di coppia,

$$(\forall z)\big(z \in x \cup \{x\} \leftrightarrow z \in x \vee z = x\big)\,,$$

quindi $\emptyset \in \omega \wedge (\forall x)\big(x \in \omega \to x \cup \{x\} \in \omega\big)$, da cui l'asserto.

Diamo ora la definizione di *classe univoca*.

Definizione 5.

$$\mathrm{Clun}(y) \leftrightarrow \mathrm{Cl}(y) \wedge (\forall u, v, w \in U)\big(\langle u, v\rangle \in y \wedge \langle u, w\rangle \in y \to v = w\big)\,.$$

Mediante l'isolamento, si può poi introdurre il simbolo funzionale binario di «immagine», $y''x$. Con questa definizione si ha il:

Teorema 29. $(\forall a)\big(a \in V \wedge y \in U \wedge \mathrm{Clun}(y) \to y''a \in V\big)\,.$

Dimostrazione. È sufficiente utilizzare lo schema d'assiomi di rimpiazzamento per insiemi relativamente alla bf $\varphi(u, v): \langle u, v\rangle \in y$.

2. - La teoria $\mathbf{TC}_1$.

In questo paragrafo ci proponiamo di riformulare **TC** in un linguaggio avente, oltre al predicato binario $\in$, una costante individuale U.

La teoria $\mathbf{TC}_1$ che otterremo sarà «equipollente» a **TC**; esistono, cioè, una estensione per definizione di **TC** ed una di $\mathbf{TC}_1$ che sono equivalenti.

Lo scopo di questa seconda sistemazione è di rendere più trasparente la struttura di **TC** e rendere poi più agevole il confronto con altre teorie. Iniziamo col dare alcune definizioni.

Definizione 1. $V = \cup(U)$.

Definizione 2. $\mathrm{Cl}(x) \leftrightarrow x \in U$; $\mathrm{S}(x) \leftrightarrow x \in V$.

Gli assiomi di questa teoria sono:

1) Tutti gli assiomi di **Z** (estensionalità, coppia, unione, potenza, isolamento, fondazione, infinito).

2) Uno schema d'assiomi di comprensione: *Sia* $\varphi(x)$ *una* bf *predicativa* (cioè una bf relativizzata a V) *le cui variabili libere cadono tra* $x, y_1, y_2, \dots, y_n$; *allora è un assioma*:

$$y_1 \in U \wedge y_2 \in U \wedge \dots \wedge y_n \in U \rightarrow \{x \in V: \varphi(x)\} \in U\,;$$

se $n = 0$ *l'assioma assume la seguente forma*:

$$\{x \in V: \varphi(x)\} \in U\,.$$

3) $V \subseteq U$.

4) Assiomi di chiusura su V:

a) *coppia per insiemi*: $x \in V \wedge y \in V \rightarrow \{x, y\} \in V$;
b) *unione per insiemi*: $x \in V \rightarrow \cup(x) \in V$;
c) *potenza per insiemi*: $x \in V \rightarrow V \cap \mathrm{P}(x) \in V$;
d) *infinito per insiemi*: $\omega \in V$;
e) *rimpiazzamento per insiemi*: $(\forall x)\big(x \in V \wedge y \in U \wedge \mathrm{Clun}(y) \rightarrow y'' x \in V\big)$.

Diamo la definizione di collezione *transitiva*:

Definizione. $\mathrm{Tr}(x) \leftrightarrow \cup(x) \subseteq x$.

Teorema 1. $\mathrm{Tr}(U)$.

Dimostrazione. La dimostrazione segue immediatamente dall'assioma 3.

Corollario. $\mathrm{Tr}(V)$.

Per poter confrontare **TC** con $\mathbf{TC}_1$ è opportuno enunciare qualche teorema

Teorema 2. *Sia* $\varphi(x)$ *una* bf *predicativa le cui variabili libere cadono tra* $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$, *allora*:

$$\mathrm{Cl}(y_1) \wedge \mathrm{Cl}(y_2) \wedge \ldots \wedge \mathrm{Cl}(y_n) \to (\exists z)\big(\mathrm{Cl}(z) \wedge (\forall x)(x \in z \leftrightarrow \mathrm{S}(x) \wedge \varphi(x))\big) .$$

Dimostrazione. La dimostrazione segue immediatamente dallo schema d'assiomi di comprensione e dalle definizioni di insieme e di classe date in questa teoria.

Teorema 3.

$$\mathrm{S}(x) \wedge \mathrm{S}(y) \to (\exists z)(\mathrm{S}(z) \wedge (\forall u)(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)) .$$

Dimostrazione.

$$\mathrm{S}(x) \wedge \mathrm{S}(y) \to \mathrm{S}(\{x, y\}) \wedge (\forall u)(u \in \{x, y\} \leftrightarrow u = x \vee u = y) .$$

Teorema 4.

$$\mathrm{S}(x) \to (\exists z)\big(\mathrm{S}(z) \wedge (\forall u)(u \in z \leftrightarrow (\exists y)(u \in y \wedge y \in x)\big) .$$

Dimostrazione.

$$\mathrm{S}(x) \to \mathrm{S}(\cup(x)) \wedge (\forall u)\big(u \in \cup(x) \leftrightarrow (\exists y)(u \in y \wedge y \in x)\big) .$$

Teorema 5.

$$\mathrm{S}(x) \to (\exists z)(\mathrm{S}(z) \wedge (\forall u)(u \in z \leftrightarrow \mathrm{S}(u) \wedge u \subseteq x)) .$$

Dimostrazione.

$$S(x) \to S\big(V \cap P(x)\big) \wedge (\forall u)\big(u \in V \cap P(x) \leftrightarrow S(u) \wedge u \subseteq x\big) .$$

Teorema 6.

$$(\exists x)\Big(S(x) \wedge \emptyset \in x \wedge (\forall y)\big(y \in x \to (\forall u)\big((\forall z)(z \in u \leftrightarrow z \in y \vee z = y) \to u \in x\big)\big)\Big)$$

Dimostrazione.

1. $S(\omega) \wedge \emptyset \in \omega \wedge (\forall y)(y \in \omega \to y^+ \in \omega)$,
2. $(\forall y)\big(y \in \omega \to (\forall u)(u = y^+ \to u \in \omega)\big)$,
3. $(\forall y)\Big(y \in \omega \to (\forall u)\big((\forall z)(z \in u \leftrightarrow z \in y \vee z = y) \to u \in \omega\big)\Big)$.

Teorema 7. *Sia* $\varphi(x, y)$ *una* bf *predicativa avente libere solo le variabili* $x, y, z_1, z_2, \ldots, z_n$, *allora*:

$$\mathrm{Cl}(z_1) \wedge \mathrm{Cl}(z_2) \wedge \ldots \wedge \mathrm{Cl}(z_n) \wedge S(a) \wedge (\forall u)(\forall v)(\forall w) \cdot$$

$$\cdot \big(\mathrm{Cl}(u) \wedge \mathrm{Cl}(v) \wedge \mathrm{Cl}(w) \wedge \varphi(u, w) \wedge \varphi(u, v) \to v = w\big) \to$$

$$\to (\exists b)\Big(S(b) \wedge (\forall y)\big(S(y) \to \big(y \in b \leftrightarrow (\exists x)(x \in a \wedge \varphi(x, y))\big)\big)\Big) .$$

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema deriva dall'assioma di rimpiazzamento e dalle definizioni date.

Teorema 8. *Sia* $\varphi(x)$ *una* bf *semipredicativa le cui variabili libere cadono tra* $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$; *allora*:

$$\mathrm{Cl}(y_1) \wedge \mathrm{Cl}(y_2) \wedge \ldots \wedge \mathrm{Cl}(y_n) \to (\exists z)(\forall x)\big(x \in z \leftrightarrow \mathrm{Cl}(x) \wedge \varphi(x)\big) .$$

Dimostrazione. Assunte come ipotesi $\mathrm{Cl}(y_1) \wedge \mathrm{Cl}(y_2) \wedge \ldots \wedge \mathrm{Cl}(y_n)$ possiamo dimostrare mediante l'assioma di isolamento e la definizione di classe che: $(\exists z)(\forall x)\big(x \in z \leftrightarrow \mathrm{Cl}(x) \wedge \varphi(x)\big)$. Infatti, «isolando» da U con la bf $\varphi(x)$ data dal teorema abbiamo $(\exists z)(\forall x)\big(x \in z \leftrightarrow \mathrm{Cl}(x) \wedge \varphi(x)\big)$ da cui segue il teorema.

3. - Confronto fra TC e TC$_1$.

L'assioma 0 di **TC** segue banalmente dall'assioma $V \subseteq U$ di **TC**$_1$.

Gli assiomi di estensionalità, della coppia, dell'unione, della potenza, di fondazione e di isolamento sono gli stessi per le due teorie.

Gli assiomi 2-8 di **TC** (cioè relativi agli insiemi) sono i Teoremi 2-8 di $\mathbf{TC}_1$.

Infine gli assiomi 2, 3, 4 di $\mathbf{TC}_1$, sono rispettivamente i Teoremi 27, 18, 24, 28, 29.

4. - Interpretazione di GB in TC.

Nel presente paragrafo vogliamo mostrare che **GB** è interpretabile in **TC**. A tale scopo consideriamo la formulazione di **GB** presentata in [**5**].

Per interpretare **GB** in **TC** interpretiamo ciascuna bf di **GB** nella sua relativizzata ad U. La bf $M(x)$ di **GB** viene così interpretata in $(\exists y \in U)(x \in y)$, che equivale ad $x \in \bigcup(U)$, cioè $x \in V$.

L'assioma **E** di estensionalità viene interpretato in un teorema di **TC**, perchè U è transitiva.

L'assioma **C** della coppia si interpreta in (una bf equivalente a)

$$(\forall x \in V)(\forall y \in V)(\exists z \in V)(\forall u \in V)(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

che è l'assioma 3 di **TC**.

L'assioma **V** dell'insieme vuoto si interpreta in $(\exists x \in V)(\forall y \in V)(y \notin x)$, e questa si dimostra ricordando che, in **TC**, $\emptyset \in V \wedge (\forall y)(y \notin \emptyset)$.

I sette assiomi delle classi si dimostrano utilizzando il primo schema di comprensione. A titolo di esempio ci occuperemo di alcuni di essi.

L'interpretazione di **B1** *è*:

$$(\exists x \in U)(\forall u \in V)(\forall v \in V)(\langle u, v\rangle \in x \leftrightarrow u \in v)\ .$$

Consideriamo la bf predicativa senza parametri $\varphi(t)$:

$$(\exists u \in V)(\exists v \in V)(t = \langle u, v\rangle \wedge u \in v)\ (^1)\ .$$

---

(1) A rigore la $\varphi(t)$ non è predicativa, perchè contiene il simbolo di coppia ordinata. Possiamo però sostituire la sottoformula $t = \langle u, v\rangle$ con la formula:

$$(\forall z \in V)(z \in t \leftrightarrow (\forall w \in V)(w \in z \leftrightarrow w = u) \vee (\forall w \in V)(w \in z \leftrightarrow w = u \vee w = v))\ .$$

La bf $\psi(t)$ che se ne ottiene è predicativa ed ai fini della dimostrazione che stiamo svolgendo si comporta come $\varphi(t)$.

Per l'assioma di comprensione ($\mathbf{TC}_1$) si ha che $\{t \in V: \varphi(t)\} \in U$. D'altra parte $(\forall v \in V)(\forall u \in V)(\langle u, v\rangle \in \{t \in V: \varphi(t)\} \leftrightarrow u \in v)$, da cui l'asserto.

L'interpretazione di **B2** *è*:

$$(\forall x \in U)(\forall y \in U)(\exists z \in U)(\forall u \in V)(u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \in y) .$$

Per l'assioma 2 di $\mathbf{TC}_1$, si ha $x, y \in U \to \{u \in V: u \in x \wedge u \in y\} \in U$. Posto $z = \{u \in V: u \in x \wedge u \in y\}$, si ha d'altronde $u \in z \leftrightarrow u \in V \wedge u \in x \wedge u \in y$, da cui $u \in V \to (u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \in y)$.

L'interpretazione di **B3** *è*:

$$(\forall x \in U)(\exists z \in U)(\forall u \in V)(u \in z \leftrightarrow u \notin x) .$$

Mediante l'assioma 2 di $\mathbf{TC}_1$ abbiamo $x \in U \to \{u \in V: u \notin x\} \in U$. Posto $z = \{u \in V: u \notin x\}$ si ha $u \in V \to (u \in z \leftrightarrow u \notin x)$.

L'interpretazione di **B4** *è*:

$$(\forall x \in U)(\exists z \in U)(\forall u \in V)\big(u \in z \leftrightarrow (\exists v \in V)(\langle u, v\rangle \in x)\big) .$$

A meno delle considerazioni fatte nella nota (¹) si ha che:

$$\varphi(u): (\exists v \in V)(\langle u, v\rangle \in x) \text{ è predicativa} .$$

Per l'assioma di comprensione di $\mathbf{TC}_1$ si ha dunque:

$$x \in U \to \{u \in V: (\exists v \in V)(\langle u, v\rangle \in x)\} \in U$$

e inoltre

$$u \in V \to \big(u \in z \leftrightarrow (\exists v \in V)(\langle u, v\rangle \in x)\big) ,$$

ove si sia posto $z = \{u \in V: \varphi(u)\}$.

L'assioma **U** *dell'insieme somma* si interpreta in:

$$(\forall x \in V)(\exists y \in V)(\forall u \in V)\big(u \in y \leftrightarrow (\exists v \in V)(u \in v \wedge v \in x)\big)$$

e questo è dimostrabile banalmente mediante l'assioma 4 di **TC**.

L'assioma **P** *dell'insieme potenza* si interpreta in:

$$(\forall x \in V)(\exists y \in V)(\forall u \in V)\big(u \in y \leftrightarrow (\forall z \in U)(z \in u \to z \in x)\big) ,$$

che equivale a:

$$(+) \qquad (\forall x \in V)(\exists y \in V)(\forall u \in V)(u \in y \leftrightarrow u \subseteq x) ,$$

giacchè $x \in V \wedge z \in u \to z \in U$. La $(+)$ a sua volta equivale all'assioma 5 di **TC**.

L'assioma R di *rimpiazzamento* si interpreta in:

$$(\forall x \in V)\big(\mathrm{Clun}(z) \to (\exists y \in V)(\forall u \in V)(u \in y \leftrightarrow (\exists v \in V)(\langle v, u\rangle \in z \wedge v \in x))\big) ,$$

che risulta essere l'assioma di rimpiazzamento di $\mathbf{TC}_1$.

Infine l'assioma **I** *dell'infinito* si interpreta nel seguente teorema di **TC**:

$$(\exists x \in V)\big(\emptyset \in x \wedge (\forall u \in V)(v \in x \to v^+ \in x)\big) .$$

5. - Interpretazione di TC in ZFU.

Il presente paragrafo costituisce una dimostrazione di coerenza relativa per **TC**. Dimostreremo infatti, che $\mathbf{TC}_1$ è interpretabile in **ZFU** (cioè **ZF** + + esistenza di un universo).

Ricordiamo che in **ZF** un insieme A è un universo se:

1) $\omega \in A$,
2) Per ogni x, y, se $x \in y \in A$, allora $x \in A$,
3) $x \in A \to \mathrm{P}(x) \in A$,
4) $(\forall x)(x \subseteq A \wedge x \not\simeq A \to x \in A)$, dove $x \simeq y$ significa che esiste una corrispondenza biunivoca fra x e y.

Ricordiamo inoltre che, se A è un universo, allora:

a) $x \in A \to \|x\| < \|A\|$,
b) $x \subseteq y \wedge y \in A \to x \in A$,
c) $x \in A \wedge y \in A \to \{x, y\} \in A$,
d) $x \in A \to \bigcup(x) \in A$.

Sia dunque A un universo di **ZFU**; per interpretare in **ZFU** le bf di $\mathbf{TC}_1$, sarà sufficiente interpretare:

$$\in \quad \text{in} \quad \in$$

$$U \quad \text{in} \quad \mathrm{P}(A)$$

Allora V viene interpretata in $\cup(\mathrm{P}(A)) = A$.

Le bf di $\mathbf{TC}_1$ in cui non compare U, vengono interpretate in se stesse. Così, il primo gruppo di assiomi (quelli di **Z**) restano inalterati, e chiaramente valgono in **ZFU**.

L'assioma di comprensione si interpreta in:

$$y_1 \in \mathrm{P}(A) \wedge y_2 \in \mathrm{P}(A) \wedge \ldots \wedge y_n \in \mathrm{P}(A) \to \{x \in A : \varphi(x)\} \in \mathrm{P}(A)\ ;$$

ma ovviamente in **ZF** vale $\{x \in A : \varphi(x)\} \subseteq A$ per una qualunque bf $\varphi(x)$.

L'assioma $V \subseteq U$, diviene $A \subseteq \mathrm{P}(A)$, e questo vale (in **ZFU**), perchè A è transitivo.

L'assioma 4 punto *a*) è la proprietà *d*) degli universi.

Il punto *c*) dell'assioma 4 viene interpretato come segue:

$$x \in A \to A \cap \mathrm{P}(x) \in A\ ;$$

dal punto 3) si ha $\mathrm{P}(x) \in A$ e da *b*): $A \cap \mathrm{P}(x) \in A$, perchè $A \cap \mathrm{P}(x) \subseteq \mathrm{P}(x)$.

Il punto *b*) dell'assioma 4 è la proprietà *d*).

L'infinito è il punto 1) della definizione di universo; vediamo infine il rimpiazzamento. L'interpretazione è:

$$x \in A \wedge y \subseteq A \wedge \mathrm{Clun}(y) \to y''x \in A\ .$$

Ma $x \in A \to \|x\| < \|A\|$, per *a*). $\mathrm{Clun}(y) \to \|y''x\| \leqslant \|x\|$, quindi non esiste corrispondenza biunivoca fra $y''x$ e A. D'altra parte $x \in A \wedge y \subseteq A \to y''x \subseteq A$. Ne segue $y''x \in A$ per il punto 4).

Bibliografia.

[1] P. Halmos, *Naïve Set Theory*, Van Nostrand Co., Princeton 1964.

[2] W. S. Hatcher, *Foundations of Mathematics*, Saunders Co., Philadelphia 1968.

[**3**] J. Kelley, *General Topology*, D. Van Nostrand Co., Princeton 1955.

[**4**] J. D. Monk, *Introduzione alla teoria degli insiemi,* Boringhieri, Torino 1972.

[**5**] E. Mendelson, *Introduzione alla Logica Matematica*, Boringhieri, Torino 1972.

[**6**] G. Takeuti and W. M. Zaring, *Introduction to Axiomatic Set Theory*, Springer Verlag, Berlin 1970.

* * *