

FRANCESCO SPERANZA (*)

**Grafi euleriani o hamiltoniani
il cui gruppo degli automorfismi s'annulla. (**)**

Ad ANTONIO MAMBRIANI per il suo 75° compleanno

1. - Sono stati ampiamente studiati i problemi relativi alla determinazione di grafi soddisfacenti condizioni prefissate: gruppo degli automorfismi isomorfo a un gruppo dato, numero cromatico assegnato, eccetera ([3], [4], [5], [9], e altri lavori). Questo lavoro si colloca in tale ambito, interessandosi principalmente delle condizioni simultanee:

- a) il grado sia euleriano e/o hamiltoniano,
- b) il gruppo degli automorfismi consista del solo elemento neutro.

Più particolarmente, ci interesseremo alla determinazione dei valori minimi che possono avere le varie caratteristiche numeriche relative a un grafo soddisfacente le condizioni a), b), e del valore minimo d'una caratteristica per i grafi per i quali un altro carattere numerico ha valore minimo. Ci limitiamo qui a segnalare i risultati seguenti:

per i grafi hamiltoniani privi d'automorfismi non identici, il minimo numero di vertici è 6, quello degli spigoli 8, il minimo rango è 3, il minimo numero cromatico 2,

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università di Parma, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R. - Ricevuto: 9-XI-1972.

per i grafi euleriani privi d'automorfismi non identici, il minimo numero di vertici è 8, quello degli spigoli è 12, il rango minimo è 4, il numero cromatico minimo è 2.

Per i vari casi esaminati si costruiscono modelli di grafi che realizzano i minimi indicati.

Si studia poi il problema della determinazione di grafi euleriani e/o hamiltoniani privi d'automorfismi non identici per i quali un determinato carattere numerico assume un valore fissato.

Alcuni dei risultati qui dimostrati sono stati preannunciati in [II].

2. — I grafi considerati in questo lavoro sono grafi non orientati. Se V è l'insieme dei vertici e S è l'insieme degli spigoli, il grafo si indicherà anche con $G(V, S)$: più esattamente, il grafo si potrà indicare con $G(V, S, F)$, dove F è l'applicazione di S nell'insieme delle coppie non ordinate di elementi di V , che a ogni spigolo associa la coppia dei suoi vertici. Indicheremo con v il numero dei vertici d'un grafo, con s quello degli spigoli, con k il numero cromatico, con r il rango (numero ciclomatico).

Un isomorfismo del grafo $G(V, S, F)$ nel grafo $G'(V', S', F')$ è una biiezione φ di $V \cup S$ in $V' \cup S'$ tale che $\varphi(V) = V'$ e inoltre, per ogni $x \in S$,

$$\bar{\varphi}(F(x)) = F'(\varphi(x)),$$

essendo $\bar{\varphi}$ l'estensione di φ all'insieme delle coppie non ordinate d'elementi di V . Se G' è privo di spigoli in parallelo, φ è noto quando lo sia la sua restrizione a V , e l'omomorfismo sarà assegnato indicando tale restrizione. Un automorfismo d'un grafo è un omomorfismo biiettivo (cioè un isomorfismo) del grafo su se stesso ⁽¹⁾. Gli automorfismi d'un grafo formano un gruppo: se questo si riduce all'elemento neutro si dirà che esso s'annulla. Diremo poi *grafo E* un grafo euleriano, *grafo H* un grafo hamiltoniano.

Ricordiamo che un percorso *semplicemente (doppiamente) infinito* è un'applicazione f di N (rispettivamente di Z) in $V \cup S$, tale che $f(2n+1)$ sia uno spigolo di estremi $f(2n)$ e $f(2n+2)$. Un percorso si dice *euleriano* se ogni spigolo è immagine d'uno e un solo numero, *hamiltoniano* se ogni vertice è immagine d'uno e un solo numero. Diremo *grafo E₁ [E₂]* un grafo dotato d'un percorso euleriano semplicemente [rispettivamente doppiamente] infinito, *grafo H₁ [H₂]* un grafo dotato d'un percorso hamiltoniano semplicemente [doppiamente]

⁽¹⁾ Data la sequenza finita $I = (a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k; b_1, b_2, \dots, b_{h-1}, b_h; \dots)$, indicheremo con $p(a_1, a_2, \dots, a_k; b_1, b_2, \dots, b_h; \dots)$ la biiezione di I in sè che porta a_1 in a_k , a_2 in a_{k-1} , ..., a_{k-1} in a_2 , a_k in a_1 , b_1 in b_h , eccetera. Se k è dispari (in particolare se $k=1$), \forall è un a_i che p lascia fisso.

infinito. In altri termini, un grafo è $E_1 [E_2]$ se v è una biiezione g di $N [Z]$ in S tale che $g(x)$ e $g(x+1)$ abbiano un estremo comune, mentre è $H_1 [H_2]$ se v è una biiezione h di $N [Z]$ in V tale che $h(x)$ e $h(x+1)$ siano adiacenti.

Per quanto riguarda la determinazione di grafi il cui gruppo degli automorfismi si annulla, osserviamo che se un grafo ha spigoli in parallelo esso ha certamente automorfismi non identici (almeno quello che scambia due spigoli in parallelo). Si osservi pure che se due vertici si corrispondono in un automorfismo, essi debbono avere entrambi, o non avere nè l'uno nè l'altro, lacci: quindi se si ammettono grafi con lacci il problema ha soluzioni banali, come quella offerta dal grafo della figura 1. Pure banale è la soluzione fornita dal

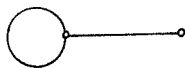


Figura 1

grafo che consiste d'un solo vertice. Ci limiteremo quindi a considerare grafi privi di lacci e che non si riducano a un solo vertice: anzi, per quanto visto sopra prenderemo in esame solo grafi semplici. Per tale motivo, diremo *grafo* \mathfrak{M} un grafo privo d'automorfismi non identici, semplice e non formato da un solo vertice.

Si pone poi il problema seguente: fissate certe proprietà \mathcal{P} relative a un grafo, e una caratteristica numerica x , trovare il minimo valore $x_0^{\mathcal{P}}$ di x per un grafo che soddisfa la proprietà \mathcal{P} . Problemi di tal genere si possono poi combinare, considerando due caratteristiche x, y e determinando il minimo $y_x^{\mathcal{P}}$ di y per i grafi soddisfacenti \mathcal{P} e tali che x sia minimo: ovviamente $y_x^{\mathcal{P}} > y_0^{\mathcal{P}}$. Si cercheranno pure i grafi che realizzano tali valori minimi.

Più generalmente, si potrà richiedere di costruire modelli di grafi soddisfacenti \mathcal{P} e tali che i caratteri fissati abbiano valori dati. Per procedere più sistematicamente, si daranno di solito successioni di grafi, tutti soddisfacenti \mathcal{P} , e tale che un carattere vari, mentre altri restano costanti, a partire dal valore minimo. Facendo variare un altro carattere, si otterrà una successione di successioni, e così via.

3. — Se la proprietà \mathcal{P} consiste nell'essere un grafo \mathfrak{M} , il minimo valore $v_0^{\mathfrak{M}}$ di v è 6, ed è raggiunto dai grafi della figura 2 [10].

Il valore minimo $s_0^{\mathfrak{M}}$ di s è parimenti 6, ed è realizzato dal grafo G_1 e inoltre da grafi non connessi e da un albero.

Teorema 1. *Per un grafo H , \mathfrak{M} il minimo numero di vertici è 6, il minimo numero di spigoli è 8, il minimo rango è 3: questi minimi sono raggiunti dal*

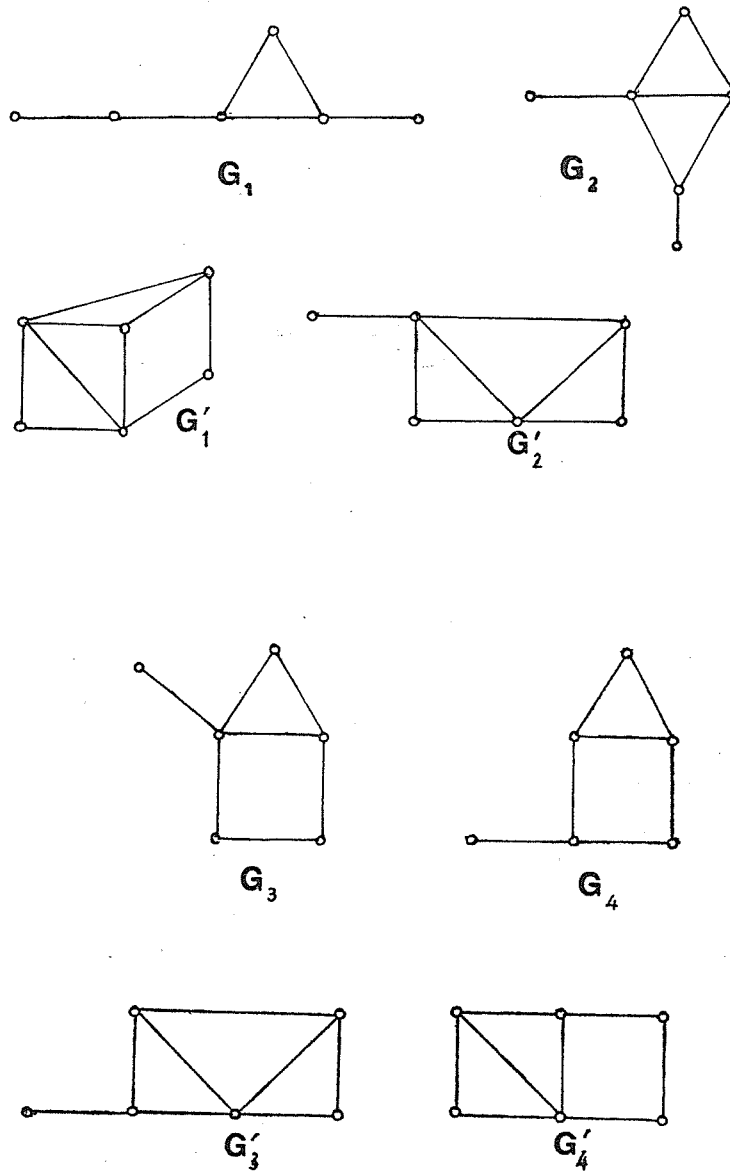


Figura 2

grafo G'_4 : Il minimo valore del numero cromatico è 2, e il minimo valore del genere è 0.

Il minimo valore d'un carattere per i grafi H , \mathfrak{M} non può superare il minimo per un grafo \mathfrak{M} . Ebbene G'_4 è un grafo H , e in esso v raggiunge il suo minimo per i grafi \mathfrak{M} : dunque il minimo $v_0^{\mathfrak{H}, \mathfrak{M}}$ è proprio 6.

In quanto al numero degli spigoli, un grafo \mathfrak{M} ne ha almeno 6: un grafo H è connesso e non è un albero, quindi per esso $v \leq s$. Per trovare i grafi H , \mathfrak{M} sono perciò da esaminare i seguenti casi:

$v = s = 6$: fra i grafi \mathfrak{M} si ha il grafo G_1 , che però non è un grafo H ,

$v = 6, s = 7$: fra i grafi \mathfrak{M} si hanno G_2, G_3, G_4 che non sono grafi H ,

$v = s = 7$: in tal caso il grafo è H se e solo se è un « ciclo » di 7 vertici e 7 spigoli, e in tal caso non è \mathfrak{M} .

Quindi per i grafi H , \mathfrak{M} $s \geq 8$, e il valore minimo, cioè 8, è raggiunto da G'_4 .

Infine, proviamo che per un grafo H , \mathfrak{M} si ha $r \geq 3$. Infatti si deve avere $r \geq 1$, affinché il grafo sia hamiltoniano. Se $r = 1$, il grafo è un grafo H se e solo se è un ciclo, e quindi non è \mathfrak{M} . Se $r = 2$, un grafo H consiste di due cicli

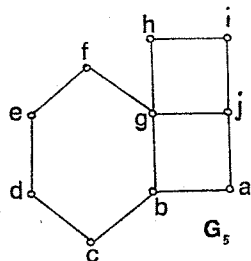


Figura 3

$$a_0 a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k \dots a_n a_0 \quad e \quad a_0 b_1 b_2 \dots b_h a_k \dots a_n a_0$$

(abbiamo indicato i soli vertici: può eventualmente essere $a_k = a_0$). Allora ν è l'automorfismo $p(a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k; a_{k+1}, \dots, a_n; b_1, \dots, b_h)$. Perciò $r \geq 3$, e tale valore è raggiunto da G'_4 .

Si osservi poi che il grafo G_5 della figura 3 ha tutti i circuiti di lunghezza pari, e quindi, per il teorema di KÖNIG, ha numero cromatico 2, ed è un grafo H , \mathfrak{M} : il vertice g è il solo di grado 4 e quindi è unito in un eventuale automorfismo; b e j hanno grado 3, ma il primo si trova su un circuito minimale — tale cioè che due suoi vertici non consecutivi non siano adiacenti —

di lunghezza 6, mentre ciò non accade per j : quindi essi sono uniti in un eventuale automorfismo; e così via si prova che un automorfismo lascia fissi tutti gli elementi.

Osserviamo infine che tutti i grafi considerati sono planari, e quindi di genere 0: perciò tale è il minimo valore del genere g per un grafo H, \mathfrak{M} . (c.v.d.)

Si noti che G'_4 realizza contemporaneamente i valori minimi di v, s, g, r , e quindi

$$v_v^{H, \mathfrak{M}} = v_0^{H, \mathfrak{M}}, \quad s_v^{H, \mathfrak{M}} = s_0^{H, \mathfrak{M}}, \quad r_v^{H, \mathfrak{M}} = r_0^{H, \mathfrak{M}}, \dots$$

Invece non c'è un grafo H, \mathfrak{M} che realizzi contemporaneamente i minimi di v e di k (o di s e di k) per i grafi H, \mathfrak{M} . Più esattamente, mentre $k_0^{H, \mathfrak{M}} = 2$, $v_0^{H, \mathfrak{M}} = 6$, $s_0^{H, \mathfrak{M}} = 8$, $r_0^{H, \mathfrak{M}} = 3$, abbiamo

$$k_v^{H, \mathfrak{M}} = k_s^{H, \mathfrak{M}} = 3 \quad (\text{il grafo } G'_4 \text{ ha numero cromatico } 3).$$

4. — Studiamo ora i valori minimi per i vari caratteri nei grafi E, \mathfrak{M} .

Teorema 2. *Per un grafo E, \mathfrak{M} il valore minimo di r è 4.*

Dimostrando il Teorema 1, si è provato che un grafo \mathfrak{M} privo di spigoli separatori non può avere numero ciclomattico 1 o 2. Proviamo ora che $r_0^{E, \mathfrak{M}}$ non può essere 3.

Sia G un grafo E, \mathfrak{M} . Togliamo a G uno spigolo s_1 : se nel grafo residuo vi sono spigoli separatori che in G sono adiacenti a s_1 , togliamo anche questi, e seguiamo in questo modo finché resta un grafo G' con soli spigoli di circuito (s'intende che vanno tolti anche i vertici che via via restassero isolati). G' e $G-G'$ hanno in comune due vertici a, b : se ne avessero più di due, vi sarebbe un grafo, composto da soli spigoli di circuito, intermedio (per l'inclusione) fra G e G' , e quindi l'operazione descritta sarebbe finita prima; se G' e $G-G'$ avessero in comune solo un vertice a , detti x_1, \dots, x_m gli altri vertici di $G-G'$, questo avrebbe l'automorfismo $p(x_1, \dots, x_m; a)$, e quindi anche G avrebbe automorfismi non identici.

In G , a e b hanno grado pari, e quindi in G' essi hanno grado dispari. Se G avesse rango 3, G' sarebbe di rango 2, e quindi sarebbe formato necessariamente da due cicli passanti entrambi per a e per b : siano

$$ay_1 \dots y_n bz_1 \dots z_p a \quad \text{e} \quad at_1 \dots t_q bz_1 \dots z_p a.$$

Allora G avrebbe l'automorfismo $p(y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_p; t_1, \dots, t_q; \dots)$. Per un grafo E, \mathfrak{M} è dunque $r \geq 4$.

Osserviamo ora che se un grafo E ha v_j vertici di grado $2j$, essendo

$$2v_1 + 4v_2 + 6v_3 + \dots = 2s,$$

abbiamo

$$\begin{aligned} r = s - v + 1 &= v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \dots - (v_1 + v_2 + v_3 + \dots) + 1 = \\ &= 1 + v_2 + 2v_3 + 3v_4 + \dots \end{aligned}$$

Si ha quindi $j \leq r$. Per $r = 4$, abbiamo le possibilità seguenti:

$$v_4 = 1, v_2 = v_3 = 0; \quad v_4 = 0, v_2 = v_3 = 1; \quad v_4 = v_3 = 0, v_2 = 3.$$

Nel primo caso, vi sono cicli composti da vertici di grado 2 (meno uno) e quindi si hanno automorfismi non identici. Nel secondo caso, il vertice a di grado 6 e il vertice b di grado 4 possono essere congiunti da due o da quattro percorsi elementari, ma resta almeno un ciclo per a composto da vertici di grado 2, e quindi si hanno automorfismi non identici. Nel terzo caso, può accadere che due vertici di grado 4 non siano raggiungibili l'uno dall'altro senza passare per il terzo (fig. 4⁽²⁾): allora per essi passano cicli composti di vertici di grado 2 (e quindi vi sono automorfismi); oppure i vertici di grado 4 sono reciprocamente raggiungibili in modo diretto (vedere fig. 5⁽²⁾), e in tal caso si possono avere grafi \mathcal{M} . Quello che ha il minimo numero di vertici (e anche di spigoli) è il grafo G_6 rappresentato dalla figura 6. Con un numero minore di vertici

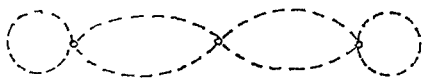


Figura 4

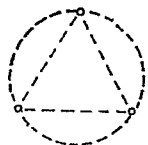


Figura 5

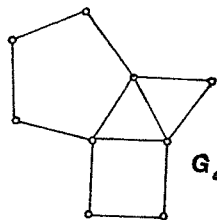


Figura 6

si hanno senz'altro automorfismi non identici: invece in questo un automorfismo lascia fisso ogni vertice, e gli altri grafi E, \mathcal{M} tali che $r = 4$ si ottengono

(²) In queste figure, una linea atratteggiata indica un cammino elementare di lunghezza non meglio precisata.

da questo con opportune « espansioni » dei suoi spigoli (cioè sostituendo a uno spigolo di estremi x, y due spigoli di estremi x, z e z, y , essendo z un nuovo vertice). (c.v.d.)

Si osservi che fra i grafi che si possono così ottenere ve ne sono alcuni con $k = 2$, quindi

$$r_0^{E, \mathfrak{M}} = 4, \quad v_r^{E, \mathfrak{M}} = 9, \quad s_r^{E, \mathfrak{M}} = 12, \quad k_r^{E, \mathfrak{M}} = 2.$$

Teorema 3. *Il minimo numero di vertici per un grafo E, \mathfrak{M} è 8, il minimo numero di spigoli è 12, il minimo di k è 2 e il minimo valore del genere è 0.*

Osservando i grafi \mathfrak{M} con un numero minimo (6) di vertici, si constata che nessuno di essi è euleriano. Proviamo ora che non vi sono grafi E, \mathfrak{M} con 7 vertici.

Sia dato un grafo euleriano G con un numero dispari di vertici: il suo complementare \bar{G} (rispetto al grafo completo semplice) ha anch'esso i gradi pari, e quindi è euleriano, oppure non è connesso ma i suoi componenti connessi sono euleriani. Inoltre se un grafo è \mathfrak{M} , anche il suo complementare lo è [10].

Un grafo completo semplice con 7 vertici ha 21 spigoli, quindi il complementare d'un grafo con 7 vertici e s spigoli ha $21-s$ spigoli. I grafi con 7 vertici si possono ripartire in coppie di grafi complementari. Possiamo escludere subito le coppie nelle quali uno dei grafi ha meno di 6 spigoli, perchè in tal caso esso ha automorfismi non identici, e quindi anche il complementare ne ha. Possiamo pure trascurare le coppie nelle quali un grafo ha 6 spigoli, perchè se è connesso esso è un albero e quindi non è euleriano, e se non è connesso ha automorfismi non identici: quindi anche il complementare non è E, \mathfrak{M} .

Anche i grafi (con 7 vertici e) 7 o 14, oppure 8 o 13, oppure 9 o 12 spigoli non possono essere E, \mathfrak{M} . Sia infatti G quello che ha il minor numero di spigoli. Se è connesso, il suo rango vale rispettivamente 1 oppure 2 oppure 3, e quindi, per il Teorema 2, non può essere E, \mathfrak{M} . Se G non è connesso, può accadere che i suoi componenti connessi abbiano tutti meno di 6 vertici, e allora presentano automorfismi non identici; oppure v'è un componente con 6 vertici, ma se esso è privo d'automorfismi non è euleriano. Quindi anche G , e di conseguenza \bar{G} , non può essere E, \mathfrak{M} .

Restano da esaminare i grafi (con 7 vertici e) 10 o 11 spigoli: basta esaminare quelli con 10 spigoli. Possiamo escludere quelli non connessi, poichè (analogamente a quanto s'è appena visto) essi avrebbero automorfismi non identici. Ma un grafo connesso con $v = 7$ e $s = 10$ ha rango 4: e, in base al Teorema 2, un grafo E, \mathfrak{M} di rango 4 ha almeno 9 vertici. Si possono escludere i grafi che si hanno per $v = 7, s = 11$, perchè complementari d'un grafo con $s = 7, s = 10$. Si può quindi escludere che vi siano grafi E, \mathfrak{M} con 7 vertici.

Invece il grafo della figura 7 è evidentemente euleriano e ha 8 vertici. Inoltre esso non ha automorfismi non identici, poichè dei vertici di grado 4 solo e e g sono adiacenti a un solo vertice di grado 2, e se un automorfismo ξ portasse e in g , si avrebbe $\xi(d) = h$, ma allora $\xi(a)$, dovendo essere adiacente

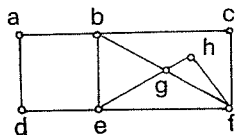


Figura 7

a h , non avrebbe grado 2. Allora g, e, h, d sono uniti in ξ , e quindi è unito anche f , che è il solo vertice adiacente ai primi tre. Allora pure b è unito, poichè è il solo vertice di grado 4 non ancora considerato, e sono pure uniti a e c , in quanto adiacenti a b e d , e rispettivamente a b e f .

Il grafo individuato è dunque un grafo \mathfrak{M} . Come G_4 , esso è anche un grafo H e realizza il minimo numero di spigoli per i grafi E, \mathfrak{M} . Infatti, tenendo presente che $s = r + v - 1$, per $r < 4$ non si hanno grafi E, \mathfrak{M} ,

per $r = 4$ si ha $v \geq 9$, quindi $s \geq 12$ (cfr. il Teorema 2),

per $r = 5$ si è visto che $v \geq 8$, quindi $s \geq 12$ (cfr. più sopra),

per $r \geq 6$, essendo $v \geq 8$, è $s \geq 13$.

Infine il grafo della figura 8 ha tutti i circuiti di lunghezza pari, e quindi

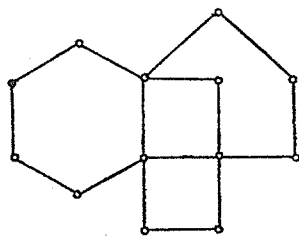


Figura 8

ha numero cromatico 2: si constata subito che esso è euleriano, e infine che il solo automorfismo è l'identità.

Si noti poi che questo grafo è planare, e quindi il valore minimo del genere è 0. (c.v.d.)

In conclusione,

$$r_v^{E, \mathfrak{M}} = 5, r_s^{E, \mathfrak{M}} = 4, v_0^{E, \mathfrak{M}} = v_s^{E, \mathfrak{M}} = 8, s_0^{E, \mathfrak{M}} = s_v^{E, \mathfrak{M}} = 12, \text{ eccetera.}$$

5. — Veniamo ora alla costruzione di grafi H , \mathfrak{M} o E , \mathfrak{M} per i quali un certo carattere numerico ha un valore fissato. Come s'è già detto, costruiremo (a partire da un grafo che realizza il minimo di tale carattere) una successione di grafi, per realizzare la quale useremo sovente *espansioni* di spigoli, vale a dire, a uno spigolo di estremi a, b (o, come potremo dire, trattandosi di grafi semplici, allo spigolo $\{a, b\}$) sostituiamo gli spigoli $\{a, c\}$, $\{c, b\}$ (c è un nuovo vertice) ⁽³⁾. La *contrazione* consisterà invece nel sostituire agli spigoli $\{a, c\}$, $\{c, b\}$ (non c'è $\{a, b\}$ e c è di grado 2), il nuovo spigolo $\{a, b\}$: il vertice c viene eliminato.

1. *Per espansione o contrazione, un grafo E si trasforma in un grafo E . Infatti a, b conservano i loro gradi, mentre un vertice introdotto per espansione ha grado 2. Anzi un ciclo euleriano si « trasforma » in un ciclo euleriano.*

2. *Per contrazione, un grafo H si trasforma in un grafo H , mentre espandendo uno spigolo d'un ciclo hamiltoniano si ha un ciclo hamiltoniano, e quindi un grafo H .*

Se $\{a, c\}$, $\{c, b\}$ vengono contratti in $\{a, b\}$, un eventuale ciclo hamiltoniano deve contenere nell'ordine a, c, b e nel nuovo grafo si potrà realizzare un ciclo passante per a e per b . Analogamente se $\{a, b\}$ è contenuto in un ciclo hamiltoniano e si esegue l'espansione da $\{a, b\}$ ad $\{a, c\}$ e $\{c, b\}$; se invece $\{a, b\}$ non fa parte del ciclo hamiltoniano, nel grafo espanso si ha un ciclo non hamiltoniano poichè non tocca c .

3. *Per espansione o per contrazione, il rango resta invariato. Infatti aumentano o diminuiscono di 1 tanto v quanto s .*

Per espansione, da un grafo di numero cromatico $k > 2$ se ne ottiene uno di numero cromatico k o $k-1$. Da uno di numero cromatico 2, se si espande uno spigolo di circuito se ne ottiene uno di numero cromatico 2, e se si espande uno spigolo di separazione se ne ottiene uno di numero cromatico 3.

Se nel grafo originario $k \geq 3$, si dia a c un colore che non sia nè quello di a nè quello di b : può accadere poi che ad a e b si possa dare lo stesso colore (ciò accade ad esempio se nel grafo originario si espande uno spigolo del ciclo di

⁽³⁾ D'ora in poi, quando diciamo che a un grafo « aggiungiamo gli spigoli... », intendiamo che si aggiungono anche gli estremi di questi spigoli che non figurano già fra i vertici del grafo.

lunghezza dispari, se questo è unico): dunque k resta invariato o diminuisce di 1. Invece, se $k = 2$ l'espansione d'uno spigolo di circuito introduce un ciclo di lunghezza dispari, e per c occorre un nuovo colore; se invece si espande uno spigolo di separazione, non si altera la lunghezza dei cicli e quindi il numero cromatico resta 2.

Viceversa, per contrazione un grafo di numero cromatico $k \geq 4$ si trasforma in uno di numero cromatico k o $k + 1$; uno di numero cromatico 3 si trasforma in uno di numero cromatico 2, o 3, o 4; uno di numero cromatico 2 si trasforma in uno di numero cromatico 2 o 3.

Per espansione o contrazione, il genere resta invariato.

Come grafi H, \mathfrak{M} per ogni $v (\geq 6)$, possiamo prendere quelli della successione rappresentata nella figura 9. Tale successione dà pure grafi H, \mathfrak{M} per

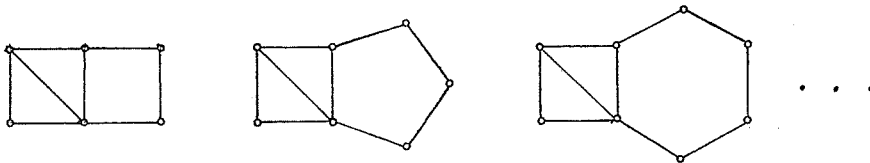


Figura 9

ogni $s (\geq 8)$. Nella figura 10 è invece rappresentata una successione di grafi E, H, \mathfrak{M} per ogni $v (\geq 8)$; essa dà anche grafi E, H, \mathfrak{M} per ogni $s (\geq 12)$. La figura 11 rappresenta grafi H, \mathfrak{M} per ogni $r \geq 3$, e la figura 12 grafi E, \mathfrak{M} per

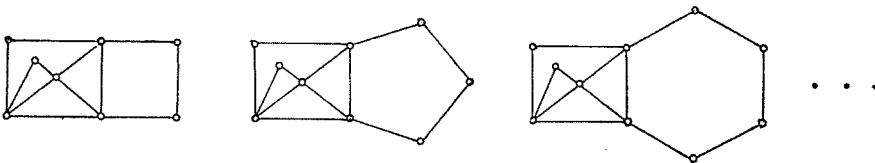


Figura 10

ogni $r \geq 4$. Lasciamo al lettore la verifica del fatto che il gruppo degli automorfismi s'annulla.

Un grafo H, \mathfrak{M} di numero cromatico 2 è già stato costruito (G_5 : cfr. n. 3). Per avere grafi H, \mathfrak{M} di dato numero cromatico $k \geq 3$, prendiamo un insieme $V = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, e costruiamo il grafo semplice e completo \hat{V} avente per vertici gli a_i , e per spigoli le coppie non ordinate di elementi distinti di V .

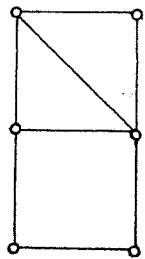
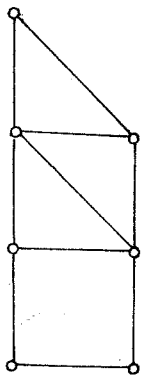
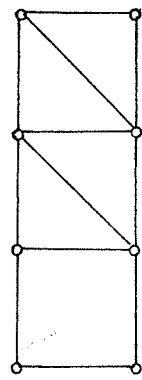


Figura 11

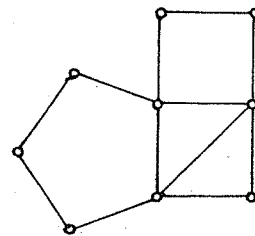
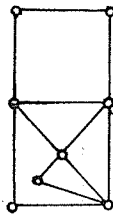
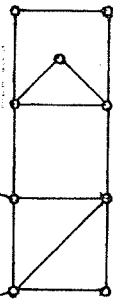
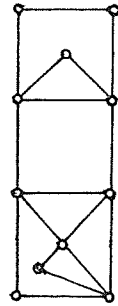


Figura 12

Aggiungiamo a \hat{V} i nuovi spigoli

$$(1) \quad \{a_j, b_{j,1}\}, \{b_{j,1}, b_{j,2}\}, \dots, \{b_{j,j-1}, b_{j,j}\}, \{b_{j,j}, a_{j+1}\} \quad (j = 1, \dots, k-1).$$

Nel grafo $G_{(r)}^*$ così ottenuto il ciclo $a_1 b_{11} a_2 b_{21} b_{22} a_3 \dots a_k a_1$ è hamiltoniano. Poichè b_{11} è il solo vertice di grado 2 adiacente a due vertici di grado superiore, è unito in ogni automorfismo; b_{21} e b_{22} sono adiacenti fra loro e a un a_j ciascuno, ma hanno « distanze » diverse da b_{11} , e quindi sono uniti, e così via. a_2 è unito perchè è il solo vertice adiacente sia a b_{11} sia a b_{21} , e così proseguendo si prova che il grafo non ha automorfismi oltre l'identità. Infine nel grafo i gradi non superano $k+1$, e quindi il numero cromatico non supera k ([2], p. 325), ed è proprio k perchè un suo sottografo è il grafo completo \hat{V} .

Per $k=3$ si ottiene il grafo G'_4 .

Risolvono il medesimo problema anche i grafi $G_{(r)}^{**}$ che si ottengono aggiungendo a \hat{V} gli spigoli (1), per $j=1, \dots, k$ (4) (per $k=3$ si ottiene il grafo G_6). Essi hanno più vertici dei grafi dell'altra successione, ma per k dispari sono anche euleriani, poichè i loro vertici hanno grado 2 o $k+1$. Invece, per avere una successione di grafi E, \mathfrak{M} di numero cromatico k (k pari), basta aggiungere a \hat{V} gli spigoli (1), per $j=1, \dots, k$, e inoltre i nuovi spigoli

$$\{a_{2h}, c_h\}, \{c_h, a_{2h+1}\} \quad (h = 1, \dots, k/2) \text{ (4)}.$$

Tali grafi non sono hamiltoniani, ma sono euleriani, poichè i vertici hanno grado 2 o $k+2$.

6. - In questo numero ci occupiamo dei grafi H_i, \mathfrak{M} ed E_i, \mathfrak{M} . La cardinalità di V e quella di S sono allora \aleph_0 [8].

Un grafo E_1, H_1, \mathfrak{M} è quello che ha per vertici a_1, a_2, \dots e per spigoli

$$\{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \dots$$

Invece un grafo E_2, H_2, \mathfrak{M} è quello rappresentato dalla figura 13.

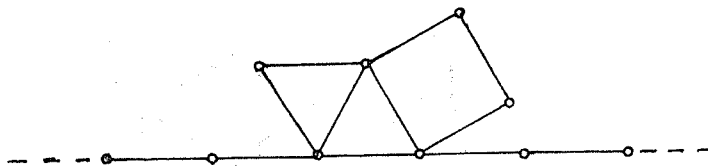


Figura 13

(4) Ponendo a_1 al posto di a_{k+1} .

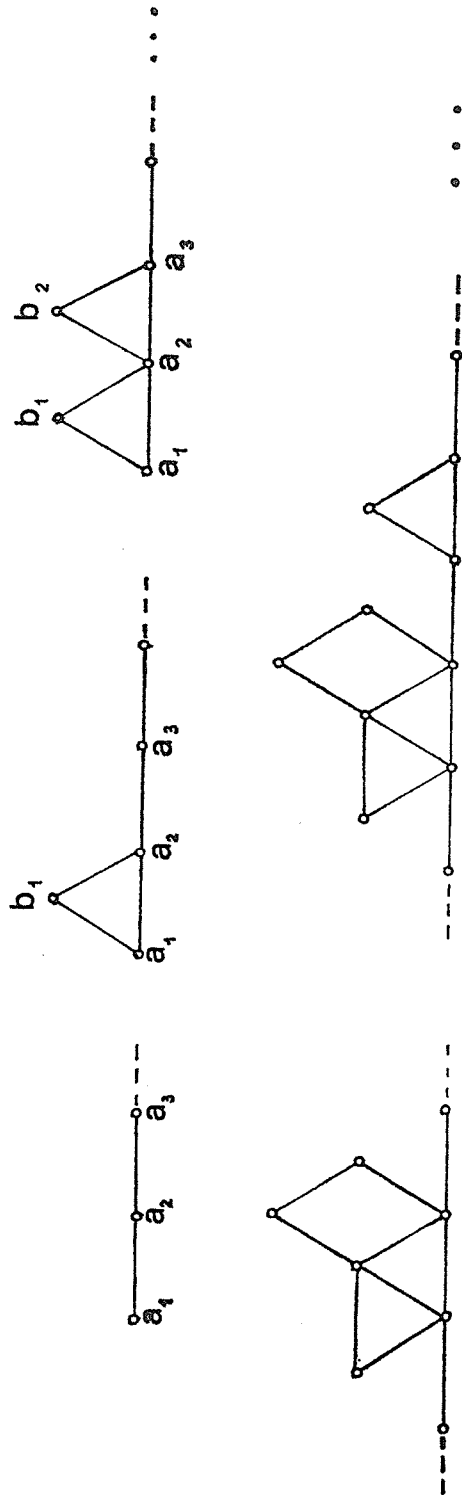


Figura 14

Anche in un grafo infinito si può introdurre il rango, come la dimensione dello spazio vettoriale dei cicli [7] (se esso è finito, risulta anche il massimo dei ranghi dei grafi finiti subordinati). A partire dai precedenti, si possono costruire grafi H_1, \mathfrak{M} e H_2, \mathfrak{M} di rango r ($r \leq \aleph_0$) (fig. 14); per avere un grafo tale che $r = \aleph_0$ basta, nel primo caso, dotarlo degli spigoli $\{a_i, b_i\}$ e $\{b_i, a_{i+1}\}$ ($i \in \mathbb{N}_0$); una costruzione analoga si può applicare al secondo caso.

Se nel grafo $G_{(k)}^*$ (o nel grafo $G_{(k)}^{**}$) (n. 5) sostituiamo, agli spigoli $\{a_1, b_{11}\}$ e $\{b_{11}, a_2\}$, gli infiniti spigoli

$$\{a_1, p_1\}, \{p_1, p_2\}, \{p_2, p_3\}, \dots, \{a_2, q_1\}, \{q_1, q_2\}, \{q_2, q_3\}, \dots,$$

si ottiene un grafo H_2, \mathfrak{M} di numero cromatico k (≥ 3). Analogamente si possono ottenere grafi, di numero cromatico k , che siano grafi E_2, \mathfrak{M} .

Un grafo H_1, \mathfrak{M} di numero cromatico \aleph_0 si ottiene prendendo un insieme numerabile $V = \{a_1, a_2, \dots\}$, ordinato in modo che il suo ordinale sia ω , come insieme dei vertici, e prendendo come spigoli quelli del grafo completo \hat{V} , e inoltre gli spigoli (1), con $j \in \mathbb{N}_0$. Per avere un grafo H_2, \mathfrak{M} di numero cromatico \aleph_0 si prenda un insieme V numerabile di vertici, ordinato dello stesso tipo d'ordine di Z ,

$$\dots, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots;$$

come spigoli si prendano quelli di \hat{V} e inoltre

$$\{a_j, b_{j,1}\}, \{b_{j,1}, b_{j,2}\}, \dots, \{b_{j,2j-1}, b_{j,2j}\}, \{b_{j,2j}, a_{j+1}\},$$

$$\{a_{-j}, c_{j,1}\}, \{c_{j,1}, c_{j,2}\}, \dots, \{c_{j,2j-2}, c_{j,2j-1}\}, \{c_{j,2j-1}, a_{-j-1}\},$$

per $j \in \mathbb{N}_0$.

Bibliografia.

- [1] C. BERGE, *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris 1958.
- [2] C. BERGE, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris 1970.
- [3] R. FRUCHT, *Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe*, *Comp. Math.* **6** (1938), 239-250.
- [4] R. FRUCHT, *Graphs of degree 3 with given abstract group*, *Canad. J. Math.* **1** (1949), 365-378.

- [5] H. IZBICKI, *Reguläre Graphen 3, 4 und 5 Grades mit vorgegebenen abstrakten Automorphismengruppe, Farbenzahlen und Zusammenhängen*, Monatsh. Math. **61** (1957), 42-50.
- [6] D. KÖNIG, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Akademische Verlag, Leipzig 1936.
- [7] L. MURACCHINI, *Introduzione alla teoria dei grafi*, Boringhieri, Torino 1966.
- [8] O. ORE, *Theory of graphs*, Amer. Math. Soc. Coll. Publications, Providence 1962.
- [9] G. SABIDUSSI, *Graphs with given group and given graph-theoretical properties*, Canad. Journ. Math. **9** (1957), 515-525.
- [10] F. SPERANZA, *Sui singrammi privi di automorfismi non identici*, Atti Soc. Pelor. Sci. **14** (1968), 1-31.
- [11] F. SPERANZA, *On some hamiltonian or eulerian graphs*, Atti Conv. Geom. Comb. Perugia (1971), 379-383.

* * *