Riv. Mat. Univ. Parma (4) 2 (1976), 185-198

SALVATORE ANTONUCCI (*)

Conteggio di OM-grafi con due o tre 2-vertici e con gruppo degli automorfismi dato. (**)

1. - Introduzione.

Ricordiamo alcune definizioni.

Un OM-grafo è *un grafo esterno-planare massimale* (outerplanar maximal, cfr. [3]). Dato un OM-grafo G, esiste un OM-grafo piano isomorfo a G, che supporremo fissato per ogni OM-grafo e che indicheremo con il simbolo GP (cioè facendo seguire il simbolo P al simbolo che indica l'OM-grafo considerato), che ha la seguente proprietà: il ciclo hamiltoniano c di GP divide il piano in due regioni, una finita R ed una infinita, tali che tutti gli spigoli di GP, che non sono spigoli di c, si trovino nella regione finita R, senza che si abbiano intersezioni di spigoli al di fuori degli estremi; inoltre tali spigoli, che diremo *corde* e che sono in numero di $n-3$ se n è l'ordine di G, dividono R in triangoli.

Se GP ha un solo 3-ciclo (ciclo di lunghezza 3) senza spigoli di c, indicheremo con il simbolo t questo 3-ciclo; si ha che t divide R in quattro regioni, una interna a t e altre tre, che diremo R_1, R_2, R_3, esterne a t. Diremo, ancora, t_1, t_2 e t_3 gli spigoli di t che limitano rispettivamente le regioni R_1, R_2 e R_3; inoltre, l'OM-grafo piano che ha per spigoli quelli che limitano R_i più gli spigoli interni a R_i si indicherà con il simbolo G_iP ($i=1, 2, 3$). Chiaramente GP ha esattamente tre 2-vertici (vertici di grado due), in dipendenza del fatto che ha un solo 3-ciclo senza spigoli di c, siano A_1, A_2 e A_3; poichè ogni grafo G_iP ha esattamente due 2-vertici, dei quali uno è uno degli estremi di t_i e l'altro è uno dei vertici A_j, converremo che sia A_i, per $i=1, 2, 3$, uno

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica della Facoltà d'Ingegneria, Università, Napoli, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.) - Ricevuto: 7-I-1976.

dei due 2-vertici di G_iP. Infine i vertici del 3-ciclo t si indicheranno con T_1, T_2, T_3, convenendo che se T_i è estremo di t_l e di t_m, sia i distinto da l e da m.

Un L_cOM-grafo (cfr. [1]$_3$) è una coppia (G, f_c), dove G è un OM-grafo di ordine n con ciclo hamiltoniano c sul quale sia fissato un verso di percorrenza e dove f_c è un'applicazione di $V(G)$ (insieme dei vertici di G) in $\{1, 2, ..., n\}$ tale che se è: $f_c(X) = i$ e $f_c(Y) = i + 1$ per $i = 1, 2, ..., n-1$, è Y il successivo di X su c secondo il verso prefissato.

Diremo *insieme campione* dei grafi di un dato tipo un insieme di grafi di quel tipo a due a due non isomorfi tale che ogni grafo di quel tipo sia isomorfo ad uno (e ad uno solo) grafo dell'insieme. Evidentemente due insiemi campioni di grafi di uno stesso tipo hanno lo stesso numero di elementi. Per *conteggio* dei grafi di un dato tipo si intende il calcolo del numero degli elementi di un insieme campione dei grafi di quel tipo; così, pure, quando si parla del *numero dei grafi di un certo tipo* si fa riferimento al numero degli elementi di un insieme campione di grafi di quel tipo.

Nel seguito, se x è un numero reale, con il simbolo $[x]$ si indicherà il massimo intero $\leqslant x$; se x e y sono interi positivi, con $x \geqslant y$, con il simbolo $\mathrm{dv}(x, y)$ (*indicatore di divisibilità*) si vorrà indicare il numero 1, se x è divisibile per y, il numero 0 in caso contrario; si porrà poi $\overline{\mathrm{dv}}(x, y) = 1 - \mathrm{dv}(x, y)$; in particolare, se $y = 2$, si porrà $p(x) = \mathrm{dv}(x, y)$ (*indicatore di parità*) e $\overline{p}(x) = \overline{\mathrm{dv}}(x, y)$.

In [1]$_3$ abbiamo dato formule per il conteggio, tra l'altro, degli OM-grafi con due 2-vertici e degli L_cOM-grafi con un numero qualsiasi di 2-vertici; in questa Nota ci occuperemo del conteggio degli OM-grafi con tre 2-vertici; inoltre, completando i risultati ottenuti in [1]$_3$ con lo studio del gruppo degli automorfismi degli OM-grafi con due o tre 2-vertici, sarà possibile ottenere il conteggio degli OM-grafi con due o tre 2-vertici e assegnato gruppo degli automorfismi.

2. - Teoremi preliminari.

Ci saranno utili nel seguito i teoremi seguenti.

Teorema 1. *Ogni OM-grafo che ha k 3-cicli senza spigoli sul suo ciclo hamiltoniano ha $k+2$ 2-vertici.*

È facile dimostrare il Teorema 1 nei casi $k = 0$ e $k = 1$. Ammettiamo, induttivamente, quindi, che il Teorema 1 sia vero per ogni OM-grafo con h 3-cicli senza spigoli sul suo ciclo hamiltoniano, con $h < k$, e dimostriamo che il teorema stesso è vero per ogni OM-grafo con k 3-cicli senza spigoli sul suo ciclo hamiltoniano.

Sia G, pertanto, un OM-grafo con k 3-cicli senza spigoli sul suo ciclo hamiltoniano; detto t un 3-ciclo di GP senza spigoli sul ciclo hamiltoniano c di GP, diciamo t_1, t_2 e t_3 gli spigoli di t e T_1, T_2 e T_3 i suoi vertici; definiamo, come si è fatto quando t è l'unico 3-ciclo senza spigoli su c, le regioni R_1, R_2 e R_3 e i grafi G_1P, G_2P e G_3P.

Diciamo, poi, c_i il ciclo hamiltoniano di G_iP costituito dagli spigoli di c che limitano R_i più lo spigolo t_i; diciamo, infine, $l_{i_1}, l_{i_2}, \ldots, l_{k_i}$ i 3-cicli di GP senza spigoli di c che siano 3-cicli dell'OM-grafo G_iP; deve naturalmente aversi $k_1 + k_2 + k_3 = k - 1$.

Fissato un OM-grafo G_iP, possono darsi i seguenti due casi:

1) nessuno dei 3-cicli $l_{i_1}, l_{i_2}, \ldots, l_{k_i}$ ha uno spigolo coincidente con t_i; in tal caso G_iP ha k_i 3-cicli senza spigoli su c_i e, pertanto, per l'ipotesi d'induzione, G_iP ha $k_i + 2$ 2-vertici; pertanto G_iP contribuisce, in questo caso, nel computo dei 2-vertici di GP, con $k_i + 1$ 2-vertici;

2) uno dei 3-cicli $l_{i_1}, l_{i_2}, \ldots, l_{k_i}$ ha uno spigolo coincidente con t_i; in tal caso questo 3-ciclo ha uno spigolo su c_i e pertanto G_iP ha $k_i - 1$ 3-cicli senza spigoli su c_i, cioè, per l'ipotesi d'induzione, G_iP ha $k_i + 1$ 2-vertici che sono 2-vertici di GP; dunque, anche in questo caso, G_iP contribuisce con $k_i + 1$ 2-vertici nel computo dei 2-vertici di GP.

Da quanto detto risulta che GP (e quindi G) ha $k_1 + 1 + k_2 + 1 + k_3 + 1 = k - 2$ 2-vertici, che è quanto si voleva dimostrare.

Teorema 2. *Detti $P_{N,3}$, $P_{N,3}^{(i)}$, per $i = 1, 2, 3, 4$, i numeri delle partizioni dell'intero positivo N in tre addendi x, y, z che verificano rispettivamente le*

$$x \geqslant y \geqslant z \geqslant 0\,, \tag{1}$$

$$x > y > z \geqslant 0\,, \tag{2}$$

$$x > y = z \geqslant 0\,, \tag{3}$$

$$x = y > z \geqslant 0\,, \tag{4}$$

$$x = y = z > 0\,, \tag{5}$$

si ha:

$$P_{N,3} = (1/4)(1-\lambda)\big(u + 3 - p(u)\big)\big(u + 1 + p(u)\big) + \tag{6}$$
$$+ \lambda\big\{(1/4)\big(v' + 3 - p(v')\big)\cdot\big(v' + 1 + p(v')\big) - N(w - v + 1) + w(w + 1) - v(v - 1)\big\}\,,$$

$$P_{N,3}^{(1)} = P_{N,3} - [(N-1)/3] - \big[\big(N - 1 - 3\overline{p}(N)\big)/6\big] - \mathrm{dv}(N, 3) - 2\,, \tag{7}$$

$$P_{N,3}^{(2)} = [(N-1)/3] + 1\,, \tag{8}$$

(9) $P^{(3)}_{N,3} = [(N-1-3\overline{p}(N))/6]+1\,,$

(10) $P^{(4)}_{N,3} = \mathrm{dv}(N,3)\,,$

dove

$$(11)\quad \begin{cases} u=[N/2]\,, & v=[(N+2)/3]\,, \quad w=[(N-1)/2]\,, \\ v'=N-v & \lambda=1 \;\; se \;\; w\geqslant v\,, \quad \lambda=0 \;\; se \;\; w<v\,. \end{cases}$$

Allo scopo di dimostrare la (6) calcoliamo i numeri $P'_{N,3}$ e $P''_{N,3}$ delle partizioni di N che verificano la (1) e rispettivamente le

$$(12)\qquad y+z\leqslant x\,,$$

$$(13)\qquad y+z>x\,,$$

tenendo presente che si ha:

$$(14)\qquad P_{N,3}=P'_{N,3}+P''_{N,3}\,.$$

A tal fine, osserviamo che il numero delle partizioni di N che verificano la (1) e la (12) coincide, per ogni fissato x, con il numero $P_{m,2}$ delle partizioni di $m=y+z=N-x$ in due addendi y, z con $y\geqslant z\geqslant 0$, e che il numero delle partizioni di N che verificano la (1) e la (13) coincide, per ogni fissato x, con il numero $P_{m,2}$ meno il numero $\overline{P}_{m,2}$ delle partizioni di m in due addendi y, z con $y>x$. Orbene, è, manifestamente: $P_{m,2}=[(m+2)/2]$; inoltre $y+z$ varia da 0 a $[N/2]$ se sono verificate la (1) e la (12) e x varia da $[(N+2)/3]$ a $[(N-1)/2]$ se sono verificate la (1) e la (13); da ciò, tenuto conto che è, chiaramente: $\overline{P}_{m,2}=(y+z)-x=N-2x$, si ottiene in base alla (14)

$$(15)\qquad P_{N,3}=\sum_{m=0}^{u}[(m+2)/2]+\lambda\sum_{x=v}^{w}\big([(N-x+2)/2]-N+2x\big)\,.$$

Dalla (15), eseguendo le somme, si ottiene, con facili calcoli, la (6). Per completare la dimostrazione del Teorema 2, basta far vedere che valgono la (8) e la (9), tenuto conto che la (10) è immediata e che la (7) segue dalle (6), (8) e (9). A tal fine basta osservare che le partizioni di N che verificano la (3) sono $N-2k, k, k$ con k che varia da 0 al valore più grande per cui risulti $N-2k>k$, cioè $[(N-1)/3]$ e che le partizioni di N che verificano la (4) sono, se N è pari, $(N-2k)/2$, $(N-2k)/2$, $2k$ con k che varia da 0 a $[(N-1)/6]$; mentre, se N è dispari, sono: $(N-2k-1)/2$, $(N-2k-1)/2$, $2k+1$ con k che varia da 0 a $[(N-4)/6]$.

Teorema 3. *Dato un OM-grafo G d'ordine n con ordine del gruppo degli automorfismi* (1) *uguale a s, il numero degli L_cOM-grafi (G, f_c) a due a due non isomorfi è $2n/s$.*

La proprietà può probabilmente considerarsi come un caso particolare di un risultato dovuto ad Harary, Palmer e Read (2); diamone qui, comunque, una dimostrazione diretta.

Dato un OM-grafo G d'ordine n, sia s l'ordine del gruppo degli automorfismi di G. Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ i vertici di G e supponiamo che $\{A_1, A_2\}, \{A_2, A_3\}, \ldots, \{A_{n-1}, A_n\}, \{A_n, A_1\}$ siano gli spigoli del ciclo hamiltoniano c di G. L'applicazione f_c è una biiezione di $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ in $\{1, 2, \ldots, n\}$ tale che se è: $f_c(A_k) = i$ per $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $i+1$ è il corrispondente del successivo di A_k su c secondo un verso qualsiasi fissato su c per ogni applicazione f_c. È allora evidente che le applicazioni f_c distinte sono $2n$. I $2n$ L_cOM-grafi (G, f_c) che si ottengono al variare di f_c non sono, però, in generale, a due a due non isomorfi; precisamente si ha che un L_cOM-grafo (G, f_c') è isomorfo ad un L_cOM-grafo (G, f_c'') se l'applicazione di $V(G)$ in $V(G)$: $(f_c'')^{-1} \circ f_c'$ è un automorfismo di G. Quindi, per ogni L_cOM-grafo (G, f_c), ve ne sono $s-1$ isomorfi tra quelli considerati; da ciò segue immediatamente l'asserto.

Dal Teorema 3 si ricava subito il seguente

Teorema 4. *Detti $s_1, s_2, \ldots, s_N$ gli ordini dei gruppi degli automorfismi degli OM-grafi di ordine n $G_1, G_2, \ldots, G_n$, aventi ognuno k 2-vertici e costituenti un insieme campione, e detto N' il numero degli L_cOM-grafi di ordine n, aventi ognuno k 2-vertici e costituenti un insieme campione, si ha*

$$2n \sum_{i=1}^{N} 1/s_i = N' . \tag{16}$$

3. - Gruppo degli automorfismi degli OM-grafi con due 2-vertici e conteggio degli OM-grafi con due 2-vertici e con dato gruppo degli automorfismi.

Dimostriamo il seguente

Teorema 5. *Il gruppo degli automorfismi di un OM-grafo con due 2-vertici o è nullo (cioè ha ordine 1) o ha ordine 2.*

---

(1) Cfr. [1]$_{1,2}$, [7].

(2) Precisamente: « Il numero di modi in cui ai vertici di un dato grafo G con p vertici si possono associare indirizzi è $p!/|\Gamma(G)|$, dove $\Gamma(G)$ è il gruppo degli automorfismi di G »; cfr. [5].

sostituendo il segno $\geqslant$ con il segno $>$, siano J_i, per $i = 1, 2, 3, 4$, gli insiemi delle terne di sequenze

$$(s_{ij})_{j=1,n_i} \qquad (i = 1, 2, 3)\,, \tag{18}$$

che verificano la

$$n_1 + n_2 + n_3 = n - 6 \tag{19}$$

e rispettivamente le a′), b′), c′), d′).

Siano, ancora, W_1 e W_2 gli insiemi delle coppie di sequenze

$$(s_{ij})_{j=1,n_i} \qquad (i = 1, 2) \tag{20}$$

che verificano la

$$n_1 + n_2 = n - 6 \tag{21}$$

e rispettivamente le

$$n_1 > n_2 > 0\,, \tag{22}$$

$$n_1 = n_2 > 0\,; \tag{23}$$

infine, sia K l'insieme delle sequenze

$$(s_{1,j})_{j=1,n-6}\,. \tag{24}$$

Ciò posto, si ha che:

a) ad ogni elemento di I_1 resta associato un elemento di J_1, se $n_3 > 0$, e un elemento di W_1, se $n_3 = 0$, per cui facilmente si ha

$$|I_1| = |J_1 \cup W_1|\,;$$

b) ad ogni elemento di I_2 resta associato, in dipendenza della scelta (doppia) delle regioni alle quali si sono dati i nomi R_2 e R_3, una coppia di elementi di J_2 dei quali, se uno è la (18), l'altro è la terna

$$(1 - s_{ij})_{j=1,n_i} \qquad (i = 1, 3, 2)\,, \tag{25}$$

se $n_3 > 0$, mentre, se $n_3 = 0$, una coppia di elementi di K dei quali, se uno è la (24), l'altro è la sequenza

$$(1 - s_{1,j})_{j=1,n-6}\,; \tag{26}$$

tenendo conto che è sempre la (18) (risp. la (24)) distinta dalla (25) (risp. la (26)), si ha facilmente che

$$|I_2| = (\tfrac{1}{2})\,|J_2 \cup K|\,;$$

c) ad ogni elemento di I_3, per una doppia scelta analoga (al caso b)), resta associata una coppia di elementi di J_3 dei quali, se uno è la (18), l'altro è la terna

$$(1 - s_{ij})_{j=1,n_i} \qquad (i = 2, 1, 3)\,, \tag{27}$$

se $n_3 > 0$, mentre, se $n_3 = 0$ (il che è possibile solo se $p(n) = 1$), una coppia di elementi di W_2 dei quali, se uno è la (20), l'altro è

$$(1 - s_{ij})_{j=1,n_i} \qquad (i = 2, 1)\,; \tag{28}$$

poichè la (27) è sempre distinta dalla (18) mentre la (28) coincide con la (20) nel caso e solo allora che sia

$$s_{1,j} = 1 - s_{2,j} \qquad (j = 1, \dots, n_1)\,, \tag{29}$$

si ha facilmente che, detti W_2' e W_2'' i sottoinsiemi di W_2 che non verificano e rispettivamente verificano le (29)

$$|I_3| = (\tfrac{1}{2})\,|J_3| + (\tfrac{1}{2})\,|W_2'| + |W_2''|\,;$$

d) infine, ad ogni elemento di I_4 resta associata una sestupla di elementi di J_4 dei quali, se uno è la (18), gli altri sono

$$\left\{\begin{array}{llllll} (s_{ij}) & (i = 2, 3, 1)\,, & (s_{ij}) & (i = 3, 1, 2)\,, & (1 - s_{ij}) & (i = 1, 2, 3)\,, \\ (1 - s_{ij}) & (i = 2, 3, 1)\,, & (1 - s_{ij}) & (i = 3, 1, 2)\,, & & \end{array}\right. \tag{30}$$

con, sempre, $j = 1, 2, \dots, (n-6)/3$; poichè la (18) e le (30) risultano distinte tranne nel caso che sia

$$s_{1,j} = s_{2,j} = s_{3,j} \qquad (j = 1, 2, \dots, (n-6)/3)\,, \tag{31}$$

nel qual caso la (18) e le (30) risultano a tre a tre uguali, si ha che, detti J_4' e J_4'' i sottoinsiemi di J_4 che non verificano e rispettivamente verificano le (31),

$$|I_4| = (1/6)\,|J_4'| + (1/2)\,|J_4''|\,.$$

Chiaramente si ha

$$|J_1 \cup W_1| = \sum{}' \, 2^{n_1} 2^{n_2} 2^{n_3}\,, \qquad |J_2 \cup K| = \sum{}'' \, 2^{n_1} 2^{n_2} 2^{n_3},$$

dove $\sum'$ e $\sum''$ sono estese a tutte le terne n_1, n_2, n_3 che verificano rispettivamente le a) e le b); inoltre si ha

$$J_3 = \sum 2^{n_1} 2^{n_2} 2^{n_3}\,,$$

dove la somma è estesa a tutte le terne n_1, n_2, n_3 che verificano le c) meno la terna (se $p(n) = 1$): $(n-6)/2$, $(n-6)/2$, 0.

Da ciò si ha, intanto:

$$|J_1 \cup W_1| = P^{(1)}_{n-6,3}\, 2^{n-6}\,, \quad |J_2 \cup K| = P^{(2)}_{n-6,3}\, 2^{n-6}\,, \quad |J_3| = \big(P^{(3)}_{n-6,3} - p(n)\big)\, 2^{n-6}\,;$$

inoltre, poichè manifestamente è

$$\begin{array}{llll}
|W_2'| = 0 & \text{se } p(n) = 0\,, & |W_2'| = 2^{(n-6)/2}(2^{(n-6)/2} - 1) & \text{se } p(n) = 1\,, \\
|W_2''| = 0 & \text{se } p(n) = 0\,, & |W_2''| = 2^{(n-6)/2} & \text{se } p(n) = 1\,, \\
 & & |J_4'| = 2^{(n-6)/3}\, 2^{(n-6)/3}\, 2^{(n-6)/3} - 2^{(n-6)/3} & \text{se } \mathrm{dv}(n, 3) = 1, \\
 & & |J_4''| = 2^{(n-6)/3} & \text{se } \mathrm{dv}(n, 3) = 1, \\
 & & |J_4'| = |J_4''| = 0 & \text{se } \mathrm{dv}(n, 3) = 0
\end{array}$$

si ha la tesi, tenendo conto che è

$$|I| = \sum_{i=1}^{4} |I_i|\,.$$

5. - Gruppo degli automorfismi degli OM-grafi con tre 2-vertici e conteggio degli OM-grafi con tre 2-vertici e con dato gruppo degli automorfismi.

Dimostriamo il seguente

Teorema 8. *L'ordine del gruppo degli automorfismi di un OM-grafo di ordine n con tre 2-vertici è o 1 o 2 o 3, se $n > 6$; se $n = 6$, è 6.*

Si osserva subito che l'unico OM-grafo di ordine 6 (a meno di isomorfismi) ha ordine del gruppo degli automorfismi uguale 6. Escluso questo caso, osserviamo preliminarmente che è facile vedere che se G è un OM-grafo d'ordine $n > 6$ e se per qualche $i = 1, 2, 3$ il grafo G_iP è tale che vi sia una corda almeno interna a R_i, un automorfismo a che lasci fisso A_i è necessariamente l'identità.

Ciò premesso, osserviamo che possono darsi i seguenti tre casi:

a) esistono due valori l e m, con $1 \leqslant l < m \leqslant 3$, tali che i grafi G_lP e G_mP non hanno corde interne alle regioni R_l e R_m;

b) esiste un solo valore l, con $1 \leqslant l \leqslant 3$, tale che il grafo G_lP non ha corde interne a R_l;

c) tutti i grafi G_iP, con $i = 1, 2, 3$, hanno corde interne alle regioni R_i.

Nel caso a), detto G_qP il grafo che ha corde interne alla regione R_q, e detti X_1 e X_2 i vertici adiacenti ad A_q, si ha che uno di essi, sia per es. X_1, è di grado 3; poichè A_l e A_m sono adiacenti ognuno ai vertici di t che sono di grado $\geqslant 4$, ne segue che non esiste alcun automorfismo a di GP tale che $a(A_q) = A_l$ oppure tale che $a(A_q) = A_m$; da qui si ha che $a(A_q) = A_q$ per ogni automorfismo a di GP; per l'osservazione premessa a è l'identità; dunque, nel caso considerato, il gruppo degli automorfismi di GP, e quindi di G, si annulla, cioè ha ordine 1.

Nel caso b) si ha chiaramente che A_l è adiacente a vertici di t che sono di grado $\geqslant 4$, mentre gli altri due 2-vertici A_s e A_t, con $1 \leqslant s < t \leqslant 3$ e $s \neq q$, $t \neq q$, sono ognuno adiacenti ad un vertice di grado 3; dunque, per ogni automorfismo a di GP, si ha

$$a(A_l) = A_l\,; \tag{32}$$

di qui si ha o che è $a(A_s) = A_s$ e $a(A_t) = A_t$, e in tal caso a è l'identità per l'osservazione premessa, oppure che è

$$a(A_s) = A_t\,, \qquad a(A_t) = A_s\,. \tag{33}$$

In quest'ultimo caso, intanto, per la (32), la restrizione a' di a all'insieme $V(G) - \{A_l\}$ è un automorfismo del sottografo $G'P$ di GP che si ottiene da esso eliminando A_l e i due spigoli che hanno un estremo in esso; inoltre, tale restrizione, se valgono le (33), essendo $G'P$ un OM-grafo con solo due 2-vertici, ricordando la dimostrazione del Teorema 5, è univocamente determinata dalle (33) stesse. Conseguentemente, lo stesso accade per a; dunque, nel caso che valgano le (33), l'ordine del gruppo degli automorfismi di GP (e quindi di G) è due. È facile inoltre rendersi conto che, nel caso valgano le (33), vi sono corde in numero uguale nelle regioni R_s e R_t e pertanto questo caso può presentarsi solo se $n-6$ è pari.

Esaminiamo, infine, il caso c). Un automorfismo a può lasciare fisso uno dei vertici A_i, per $i=1, 2, 3$, e in tal caso esso è l'identità per l'osservazione premessa, oppure può essere tale che

$$a(A_1) = A_2\,, \qquad a(A_2) = A_3\,, \qquad a(A_3) = A_1\,, \tag{34}$$

oppure tale che

$$a(A_1) = A_3\,, \qquad a(A_3) = A_2\,, \qquad a(A_2) = A_1\,. \tag{35}$$

È facile far vedere, e ce ne asteniamo per brevità, che a è univocamente determinato dalle (34) o dalle (35) e che, se valgono o le (34) o le (35), GP ha un numero di corde uguale per tutte le regioni R_i, quindi $n-6$ deve essere divisibile per 3; inoltre, se c'è un automorfismo che verifica le (34), c'è un automorfismo che verifica le (35), e viceversa; concludendo, nel caso c), il gruppo degli automorfismi di GP (e quindi di G) o è nullo o ha ordine tre. Resta con ciò dimostrato l'asserto. Dimostriamo, infine, il seguente

Teorema 9. *Detto H_i, per $i=1, 2, 3$, il numero degli OM-grafi d'ordine n ($n>6$) con tre 2-vertici con ordine del gruppo degli automorfismi uguale i (di un insieme campione), si ha*

$$H_1 = (1/3)\binom{n-4}{2}2^{n-7} - 2^{(n-8)/2}p(n) - (1/3)\,2^{(n-9)/3}\,\mathrm{dv}(n, 3)\,, \tag{36}$$

oppure

$$H_1 = N_{n,3} - 2^{(n-6)/2}p(n) - 2^{(n-9)/3}\,\mathrm{dv}(n, 3)\,; \tag{37}$$

inoltre si ha

$$H_2 = 2^{(n-6)/2}p(n)\,, \qquad H_3 = 2^{(n-9)/3}\,\mathrm{dv}(n, 3)\,. \tag{38}$$

Cominciamo con il dimostrare le (38). A tale scopo, diciamo L un insieme campione di OM-grafi d'ordine n ($n>6$) con tre 2-vertici e con ordine del gruppo degli automorfismi uguale 2. Poichè, per quanto osservato nel corso della dimostrazione del Teorema 8, ogni OM-grafo con tre 2-vertici e con ordine del gruppo degli automorfismi uguale 2 è tale che in una delle regioni R_i non vi sono corde mentre nelle altre due vi sono corde in numero uguale, si ha che L è vuoto se $n-6$ (e quindi n) è dispari; nell'ipotesi, poi, che n sia pari, e quindi che L sia non vuoto, si ha, ricordando quanto osservato nel corso della dimostrazione del Teorema 7, che ad ogni elemento di L restano associate le due coppie di sequenze (20) e (28) che però non risultano distinte, perchè come facilmente si vede, verificano le (29); di conseguenza H_2, se n è pari, coincide con il numero delle sequenze (20) che verificano la (29), è nullo in caso contrario; da ciò segue la prima delle (38). Per ciò che concerne la seconda delle (38), consideriamo un insieme campione L' di OM-grafi d'ordine n $(n > 6)$ con tre 2-vertici e con ordine del gruppo degli automorfismi uguale a 3. Poichè, per quanto osservato nel corso della dimostrazione del Teorema 8, ogni OM-grafo con tre 2-vertici e con ordine del gruppo degli automorfismi uguale a 3 è tale che in tutte le regioni R_i vi sono corde in numero uguale, si ha che L' è vuoto se $n-6$ (e quindi n) non è divisibile per tre; nell'ipotesi, poi, che n sia divisibile per 3, e quindi che L' sia non vuoto, si ha, ricordando quanto osservato nel corso della dimostrazione del Teorema 7, che ad ogni elemento di L' restano associate le sei terne di sequenze (18) e (30); tali terne, però, come facilmente si deduce, non sono tutte distinte perchè verificano le (31); di conseguenza H_3, se n è divisibile per 3, coincide con la metà del numero delle sequenze (18) che verificano le (31); da ciò segue la seconda delle (38).

La (36) si deduce tenendo presente che il numero degli L_cOM-grafi di ordine n $(n > 6)$ con tre 2-vertici è (cfr. [**1**]$_3$)

$$M_{3,n} = (n/3)\binom{n-4}{2}2^{n-6}\,,$$

tenuto conto che vale la (16), dalla quale si ha

$$2n(H_1 + H_2/2 + H_3/3) = M_{3,n}\,.$$

La (37) si deduce immediatamente tenendo conto che è

$$H_1 + H_2 + H_3 = N_{n,3}\,.$$

Segnaliamo, infine, che dal confronto della (36) con la (37) è possibile dedurre, con facili calcoli, la seguente formula, che lega tra loro le varie partizioni dell'intero positivo n in tre addendi:

$$6P^{(1)}_{n,3} + 3P^{(2)}_{n,3} + 3P^{(3)}_{n,3} + P^{(4)}_{n,3} = \binom{n+2}{2}\,.$$

Bibliografia.

[1] S. ANTONUCCI: $[\cdot]_1$ *Su gli automorfismi di N-grafi che si ottengono con speciali procedure da N-grafi con un gruppo di automorfismi nullo*, Rend. Accad. Naz. dei XL (IV) **22** (1972); $[\cdot]_2$ *Sull'isomorfismo tra N-grafi e sulla loro caratteristica*, Rend. Accad. Naz. dei XL (IV) **22** (1972); $[\cdot]_3$ *Conteggio di grafi planari*, Atti Conv. G.N.S.A.G.A. Univ. Modena (1974).

[2] C. BERGE, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris 1970.

[3] F. HARARY, *Graph theory*, Add. Wesl. Publ. Comp. London 1969.

[4] F. HARARY and E. PALMER, *Graphical enumeration*, Acad. Press, New York 1973.

[5] F. HARARY, E. PALMER and R. C. READ, *The number of ways to label a structure*, Psychmetrika **32** (1967), 155-156.

[6] G. POLYA, *Kombinatorische anzahlbestimmungen für gruppen, graphen und chemische verbindungen*, Acta Math. **68** (1937), 145-254.

[7] F. SPERANZA, *Sui singrammi privi di automorfismi non identici*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur. **14** (1968), 1-31.

Summary.

We study the automorphism group of maximal outerplanar graphs with 2 or 3 vertices of degree 2. We find formulas for enumeration of maximal outerplanar graphs with 3 vertices of degree 2 and for enumeration of maximal outerplanar graphs with a given automorphism group. Also formulas for counting partitions of an integer into three addenda are given.

* * *