Riv. Mat. Univ. Parma (4) 2 (1976), 287-294

CARLO SILLI (*)

Una relazione generale per le onde straordinarie di discontinuità in una membrana. (**)

1. - Introduzione.

In due miei lavori [15]$_1$ e [15]$_2$ ho studiato la propagazione delle onde straordinarie di discontinuità in una membrana termoelastica non omogenea, non necessariamente perfetta [17], nel caso generale del legame non lineare tra sforzi e deformazioni. Se il piano tangente ad essa è continuo in ogni suo punto e in ogni istante ho mostrato che la membrana termoelastica non può esser sede di onde straordinarie di discontinuità meccaniche; nell'ipotesi, invece, che mentre la membrana si muove vi sia su di essa una linea di discontinuità per il piano tangente (linea questa che si propaga nel tempo) ho mostrato che la membrana stessa è sede di onde straordinarie di discontinuità meccaniche ed ho determinato l'espressione della velocità di propagazione U_N.

Nel presente lavoro, con riferimento ad una generica membrana S, nell'ipotesi che mentre la membrana si muove vi sia su di essa una linea γ di discontinuità per la velocità $\boldsymbol{v}$ dei suoi punti, linea questa che generalmente si propaga su di essa col tempo, considerato un suo punto P, ho dato l'espressione dell'ampiezza dell'onda attraverso γ in P in funzione del tempo t, tramite alcune grandezze caratteristiche del fenomeno in esame.

Anche qui, come in [15]$_1$ e [15]$_2$, è opportuno rinviare, per quanto riguarda la propagazione delle onde di discontinuità e per lo studio delle lamine e delle membrane, ad esempio, ai lavori citati qui di seguito. Ad alcuni di questi lavori si è ispirata questa Nota come le precedenti [15]$_1$ e [15]$_2$:

(*) Indirizzo: Istituto di Matematiche Applicate, Facoltà di Ingegneria, Università di Pisa, 56100 Pisa, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.) e presso l'Istituto di Matematiche Applicate della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Pisa. – Ricevuto: 5-VII-1976.

T. Manacorda [**11**], G. Lampariello [**10**], P. Chadwick e B. Powdrill [**3**], M. Pastori [**14**]$_1$ e [**14**]$_2$, C. Truesdell ed R. Toupin [**18**], A. E. Green e W. Zerna [**9**], P. M. Naghdi [**12**], H. Cohen e A. B. Berkal [**5**]$_1$ e [**5**]$_2$, P. J. Chen [**4**], S.S. Antman [**1**], J. L. Ericksen [**6**], J. W. Nunziato e W. Hermann [**13**], M. M. Carroll e P. M. Naghdi [**2**], C.-C. Wang [**19**].

Io ho studiato le onde straordinarie di discontinuità in un filo termoelastico [**15**]$_3$, [**15**]$_4$, [**15**]$_5$ e in una membrana termoelastica [**15**]$_1$, [**15**]$_2$.

2. - Posizione del problema e formula risolvente.

Si consideri anche qui, come nei lavori [**15**]$_1$ e [**15**]$_2$, un corpo bidimensionale S, mobile, non necessariamente perfetto [**17**], in cui la sollecitazione interna, che si esercita attraverso ogni suo elemento lineare, è rappresentato da un unico tensore doppio $\boldsymbol{T}$ di S stesso, e cioè si consideri anche qui una membrana [**7**].

Come in [**15**]$_1$ e in [**15**]$_2$, per qualunque versore situato sul piano tangente, ove questo piano esiste unico, lo sforzo specifico $\boldsymbol{t}_\nu = \boldsymbol{T}\boldsymbol{\nu}$ è situato nel piano stesso senza essere necessariamente parallelo al versore $\boldsymbol{\nu}$.

Sulla configurazione attuale σ_t di S al tempo t ci sia una linea γ_t, dotata di versore tangente continuo, variabile in generale col tempo, attraverso la quale è discontinua la velocità $\boldsymbol{v}$ dei punti della membrana stessa.

Sia Σ la configurazione di riferimento di densità ϱ_0 e sia V_1, V_2 un sistema di coordinate curvilinee definite su di essa nel seguente modo.

Considerate le configurazioni attuali σ_t (al variare del tempo t) di densità ϱ si considerino su di essa le linee γ_t di discontinuità di $\boldsymbol{v}$ per ogni valore del tempo t appartenente all'intervallo $[t_0; t_1]$ che si considera. Le linee Γ_t, corrispondenti in Σ delle linee γ_t, siano le linee $V_2 = \text{cost.}$; considerato poi un secondo sistema di linee, ognuna delle quali taglia una sola volta le precedenti, siano queste le linee $V_1 = \text{cost.}$

Sulla configurazione attuale σ_t della membrana S, al tempo t, sia v_1, v_2 un sistema di coordinate curvilinee.

Le coordinate V_1 e V_2 sono legate in modo invertibile al sistema di coordinate v_1, v_2 della configurazione attuale σ_t.

Considerato il gradiente di deformazione superficiale $\boldsymbol{F}$ definito da

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{U}\,, \tag{2.1}$$

con $\mathrm{d}\boldsymbol{u} \in \sigma_t$ e $\mathrm{d}\boldsymbol{U} \in \Sigma$, supponiamo che le componenti del tensore degli sforzi $\boldsymbol{T}$ siano funzioni a priori generiche della temperatura θ e della deformazione rappresentata da questo gradiente.

Si ha ora per una ragione $\sigma' \in \sigma_t$ di contorno s, senza punti a comune con γ_t

$$\int_{\sigma'} \varrho \boldsymbol{a}\, \mathrm{d}\sigma = \int_{\sigma'} \varrho \boldsymbol{f} \mathrm{d}\sigma + \int_{\gamma'} \boldsymbol{t}_n \mathrm{d}s \,, \tag{2.2}$$

dove $\boldsymbol{f}$ è la forza di massa e $\boldsymbol{t}_n$ è lo sforzo interno già definito.

Poichè è

$$\boldsymbol{t}_n = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \,, \tag{2.3}$$

per il teorema della divergenza per le superfici [8] (p. 143) si ha:

$$\int_{\sigma'} \varrho \boldsymbol{a}\, \mathrm{d}\sigma = \int_{\sigma'} \varrho \boldsymbol{f} \mathrm{d}\sigma + \int_{\sigma'} \operatorname{div} \boldsymbol{T} \mathrm{d}\sigma \,, \tag{2.4}$$

dove per la simmetria del tensore degli sforzi $\boldsymbol{T}$ la divergenza è unica ed è data nel punto P da [8] (pp. 138, 139):

$$\operatorname{div} \boldsymbol{T} = \left(\frac{\partial T^{\alpha\gamma}}{\partial v^{\alpha}} + T^{\beta\gamma} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \;\; \alpha \end{Bmatrix} + T^{\alpha\beta} \begin{Bmatrix} \gamma \\ \beta \;\; \alpha \end{Bmatrix} \right) \frac{\partial P}{\partial v^{\gamma}} \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2) \,, \tag{2.5}$$

con $T^{\lambda\mu}$ componenti controvarianti del tensore $\boldsymbol{T}$ rispetto al sistema di coordinate v_1 e v_2 e $\begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu \;\; \nu \end{Bmatrix}$ simbolo di Kristoffel di seconda specie.

Si ha ora dalla (2.4) passando alla relazione puntuale

$$\varrho \boldsymbol{a} = \varrho \boldsymbol{f} + \operatorname{div} \boldsymbol{T} \,, \tag{2.6}$$

oppure

$$\varrho_0 \boldsymbol{a} = \varrho_0 \boldsymbol{f} + J \operatorname{div} \boldsymbol{T} \,, \tag{2.7}$$

con J coefficiente di dilatazione superficiale dato da

$$J = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Sigma} \,, \tag{2.8}$$

con $\mathrm{d}\sigma \in \sigma_t$ e $\mathrm{d}\Sigma \in \Sigma$ fra loro corrispondenti.

Considerata la superficie arbitraria $\sigma' \in \sigma_t$ delimitata dal contorno s e la corrispondente superficie $\Sigma' \in \Sigma$ di contorno S, e un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $(0; u_1, u_2, u_3)$ e considerate poi le due normali $\boldsymbol{n} = \|n_k\|$ al contorno s, e tangente a σ_t, e $\boldsymbol{N} = \|N_k\|$ al contorno S, e tangente a Σ,

$(k, K = 1, 2, 3)$, si ha per i due stati di sforzo in σ_t e in Σ

$$\int_s T_{ik} n_k \, ds = \int_S T^R_{iK} N_K \, dS \qquad (i, k, K = 1,2,3) , \tag{2.9}$$

con T_{ik} e T^R_{iK} componenti cartesiane ortogonali in $(0; u_1, u_2, u_3)$ dei tensori degli sforzi rispettivamente nella configurazione attuale e nella configurazione di riferimento.

Si ha poi, dopo aver indicato con x_i e X_j $(i, j = 1, 2, 3)$ rispettivamente le coordinate di $P \in s$ e del corrispondente $P_0 \in S$

$$\int_s T_{ik} n_k \, ds = \int_S T_{ik} x^k_{,K} N_K \, ds = \int_S T_{ik} x^k_{,K} N_K J' \, dS , \tag{2.10}$$

dove è:

$$x^k_{,K} = \frac{\partial x^k}{\partial X^K} , \quad J' = \frac{ds}{dS} \qquad (k, K = 1, 2, 3), \tag{2.11}$$

con J' coefficiente di dilatazione lineare (cfr. [**15**]$_1$, [**15**]$_2$).

Confrontando con la (2.9) si ha ora:

$$T^R_{iK} = T_{ik} x^k_{,K} J' \qquad (i, k, K = 1, 2, 3) . \tag{2.12}$$

Si ha quindi nella configurazione di riferimento Σ (dall'equazione di moto) per la relazione puntuale

$$\varrho_0 \boldsymbol{a} = \varrho_0 \boldsymbol{f} + \operatorname{div} \boldsymbol{T}^R , \tag{2.13}$$

dove $\boldsymbol{T}^R$ è il tensore degli sforzi in Σ e dove è (cfr. ancora [**8**] pp. 138-139) per la divergenza in P_0:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{T}^R = \left(\frac{\partial \overset{R}{T}{}^{\alpha\gamma}}{\partial V^\alpha} + \overset{R}{T}{}^{\beta\gamma} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \ \alpha \end{Bmatrix} + \overset{R}{T}{}^{\alpha\beta} \begin{Bmatrix} \gamma \\ \beta \ \alpha \end{Bmatrix} \right) \frac{\partial P_0}{\partial V^\gamma} , \tag{2.14}$$

$(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2)$.

Ciò premesso si ha per la continuità di ϱ_0 e di $\boldsymbol{f}$ dalla (2.7)

$$\varrho_0 [\boldsymbol{a}] = [J \operatorname{div} \boldsymbol{T}] . \tag{2.15}$$

Considerata una linea $V_1 = \text{cost.}$ (detta Γ^*) di Σ e la corrispondente $\gamma^* \in \sigma_t$, si ha per la discontinuità dell'accelerazione $\boldsymbol{a}$ attraverso γ_t nel punto P

di intersezione tra γ_t e γ^*

$$(2.16)\qquad [\boldsymbol{a}] = U_N^2 \left[\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}(V_2, t)}{\partial V_2^2}\right] + 2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}(V_2,t)}{\partial t}\right] - \frac{\dot{U}_N}{U_N}\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}(V_2,t)}{\partial t}\right],$$

dove è $\boldsymbol{u}(V_2, t) = P - P_0$ con $P \in \gamma^*$ e $P_0 \in \Gamma^*$ fra loro corrispondenti nella trasformazione che porta Σ in σ_t.

Infatti, con un procedimento analogo a quello usato in [**15**]$_5$ (e nella prima parte simile a quello fatto da diversi Autori nel caso tridimensionale, cfr. ad es. [**16**]) consideriamo una qualunque funzione $Z(V_2, t)$ scalare o vettoriale definita nei punti P_0 di ascissa V_2 di Γ^* della configurazione di riferimento della membrana S. Supponiamo che questa funzione sia continua e derivabile per ogni valore di V_2 e di t tranne che attraverso l'intersezione F_0 della linea Γ^* con la linea Γ_t (intersezione questa che è mobile e di ascissa $V_2^F(t)$) dove la funzione presenta discontinuità di prima specie.

Con ragionamenti analoghi a quelli citati (cfr. [**15**]$_5$) e tenuto conto che è

$$(2.17)\qquad U_N = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V_2}{\Delta t},$$

si ha:

$$(2.18)\qquad \left[\frac{\partial Z(V_2, t)}{\partial t}\right] = \frac{\delta[Z(V_2, t)]}{\delta t} - U_N \left[\frac{\partial Z(V_2, t)}{\partial V_2}\right].$$

Essendo poi

$$(2.19)\qquad \frac{\delta[Z(V_2, t)]}{\delta t} = \frac{\mathrm{d}[Z(V_2, t)]}{\mathrm{d}t},$$

si ha

$$(2.20)\qquad \left[\frac{\partial Z(V_2, t)}{\partial t}\right] = \frac{\mathrm{d}[Z(V_2, t)]}{\mathrm{d}t} - U_N \left[\frac{\partial Z(V_2, t)}{\partial V_2}\right].$$

Da questa sostituendo al posto di $Z(V_2, t)$ sia

$$(2.21)\qquad \frac{\partial H(V_2, t)}{\partial t} \qquad \text{che} \qquad \frac{\partial H(V_2, t)}{\partial V_2},$$

con $H(V_2, t)$ funzione continua anche attraverso F_0, e combinando, si ha

$$\left[\frac{\partial^2 H(V_2, t)}{\partial t^2}\right] = 2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial H(V_2, t)}{\partial t}\right] + U_N^2\left[\frac{\partial^2 H(V_2, t)}{\partial V_2^2}\right] - \frac{\dot{U}_N}{U_N}\left[\frac{\partial H(V_2, t)}{\partial t}\right], \tag{2.22}$$

e da questa, posto $H(V_2, t) = \boldsymbol{u}(V_2, t) = P - P_0$ si ha appunto la (2.16) come si voleva.

Poichè è

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial V_2^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial V_2^2}, \tag{2.23}$$

si ha, ad esempio, dalle (2.7), (2.16) e dalla precedente

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{v}] - \frac{\dot{U}_N}{2U_N}[\boldsymbol{v}] = \frac{1}{2\varrho_0}[J \operatorname{div} \boldsymbol{T}] - \frac{U_N^2}{2}\left[\frac{\partial^2 P}{\partial V_2^2}\right], \tag{2.24}$$

e da questa

$$[\boldsymbol{v}](t) = \tfrac{1}{2}\exp\int_{t_0}^{t} \dot{U}_N/2U_N \,\mathrm{d}\lambda \,\cdot \tag{2.25}$$

$$\cdot\left\{\int_{t_0}^{t} \exp\int_{\lambda}^{t_0} \dot{U}_N/2N_N \,\mathrm{d}\tau \left(\frac{1}{\varrho_0}[J \operatorname{div} \boldsymbol{T}] - U_N^2\left[\frac{\partial^2 P}{\partial V_2^2}\right]\right)\mathrm{d}\lambda + 2[\boldsymbol{v}](t_0)\right\}.$$

Semplificando si ha infine

$$[\boldsymbol{v}](t) = \tag{2.26}$$

$$= \frac{\sqrt{U_N(t)}}{2}\cdot\left\{\int_{t_0}^{t}\left(\frac{1}{\varrho_0\sqrt{U_N(\lambda)}}[J \operatorname{div} \boldsymbol{T}] - U_N^{3/2}(\lambda)\left[\frac{\partial^2 P}{\partial V_2^2}\right]\right)\mathrm{d}\lambda + \frac{2[\boldsymbol{v}](t_0)}{\sqrt{U_N(t_0)}}\right\}.$$

Relazione questa che dà l'espressione di $[\boldsymbol{v}](t)$ e precisamente esprime la discontinuità stessa tramite U_N, ϱ_0, J, $\boldsymbol{T}$ e $P = P(P_0, t)$ e il suo stesso valore $[\boldsymbol{v}](t_0)$ per $t = t_0$, in funzione del tempo t.

Usufruendo invece della (2.13), anzichè della (2.7), e sempre della (2.16) si ha ora

(2.27) $$[\boldsymbol{v}](t) =$$

$$= \frac{\sqrt{U_N(t)}}{2} \cdot \left\{ \int_{t_0}^{t} \left(\frac{1}{\varrho_0 \sqrt{U_N(\lambda)}} [\operatorname{div} \boldsymbol{T}^R] - U_N^{3/2}(\lambda) \left[\frac{\partial^2 P}{\partial V_2^2} \right] \right) d\lambda + \frac{2[\boldsymbol{v}](t_0)}{\sqrt{U_N(t_0)}} \right\},$$

espressione questa che dà $[\boldsymbol{v}](t)$ tramite U_N, ϱ_0, $\boldsymbol{T}^R$, $P = P(P_0, t)$ e sempre il suo valore iniziale $[\boldsymbol{v}](t_0)$.

Bibliografia.

[1] S. S. Antman, *Existence and nonuniqueness of axisymmetric equilibrium states of nonlinearly elastic shells*, Arch. Rational Mech. **40** (1971), 329-372.

[2] M. M. Carroll and P. M. Naghdi, *The influence of the reference geometry on the response of elastic shells*, Arch. Rational Mech. Anal. **48** (1972), 302-318.

[3] P. Chadwick and B. Powdrill, *Singular surfaces in linear thermoelasticity*, Internat. J. Engrg. Sci. **3** (1965), 561-595.

[4] P. J. Chen, *Mechanics of solids* (III), VIa/3, Springer-Verlag, Berlin 1973.

[5] H. Cohen and A. B. Berkal: $[\cdot]_1$ *Wave propagation in elastic shell*, Journal of Elasticity (2) **1** (1972), 35-44; $[\cdot]_2$ *Wave propagation in elastic membranes*, Journal of Elasticity (2) **1** (1972), 45-57.

[6] J. L. Ericksen, *Wave propagation in thin elastic shells*, Arch. Rational Mech. Anal. **43** (1971), 167-178.

[7] B. Finzi, *Equazioni intrinseche della meccanica dei sistemi continui perfettamente e imperfettamente flessibili*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **11** (1932-1933), 215-245.

[8] B. Finzi e M. Pastori, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Zanichelli, Bologna 1951.

[9] A. E. Green and W. Zerna, *Theoretical elasticity*, Oxford at Clarendon Press, Oxford 1968.

[10] G. Lampariello, *Sull'impossibilità di propagazioni ondose nei fluidi viscosi*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Mat. Fis. Natur. (6) **13** (1931), 688-691.

[11] T. Manacorda, *Sulla propagazione di onde ordinarie di discontinuità in un filo dotato di viscosità interna*, Riv. Mat. Univ. Parma (1) **9** (1958), 13-19.

[12] P. M. NAGHDI, *The theory of shells and plates*, Mechanics of Solids (II), VI a/2, Springer-Verlag, Berlin - 1972.

[13] J. W. NUNZIATO and W. HERRMANN, *The general theory of shock waves in elastic nonconductors*, Arch. Rational Mech. Anal. **47** (1972), 272-287.

[14] M. PASTORI: $[\cdot]_1$ *Velocità di propagazione nelle membrane inestendibili*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Mat. Fis. Natur. (6) **29** (1939), 411-417; $[\cdot]_2$ *Propagazione di un generico movimento in una membrana inestendibile*, R. Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. **72** (1938-1939), 431-436.

[15] C. SILLI: $[\cdot]_1$ *Sulle onde straordinarie di discontinuità in una membrana termoelastica*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **8** (1973), 518-536; $[\cdot]_2$ *Sull'esistenza di onde straordinarie di discontinuità in una membrana termoelastica*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **10** (1974), 467-480; $[\cdot]_3$ *Sulla propagazione di onde straordinarie di discontinuità in un filo termoelastico*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **16** (1967), 121-142; $[\cdot]_4$ *Ancora sulla propagazione di onde straordinarie di discontinuità in un filo termoelastico*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **1** (1968), 232-243; $[\cdot]_5$ *Sull'ampiezza delle onde straordinarie di discontinuità in un filo termoelastico*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **1** (1968), 717-725.

[16] T. Y. THOMAS, *Plastic flow and fracture in solids*, Academic Press Inc., New York - London 1961.

[17] C. TRUESDELL and W. NOLL, *The non-linear theories of Mechanics* (III), Springer-Verlag, Berlin - 1965.

[18] C. TRUESDELL and R. TOUPIN, *Principles of classical Mechanics and fieldt heory* (III), Springer-Verlag, Berlin - 1960.

[19] C. C. WANG, *On the response functions of isotropic elastic shells*, Arch. Rational Mech. **50** (1973), 81.

Summary.

In this paper a general moving membrane S is studied. Assuming that this membrane posses a generally moving line of extraordinary mechanics discontinuity, the expression of velocity discontinuity as function of the time t is given.

* * *