Riv. Mat. Univ. Parma (4) 2 (1976), 321-328

AUGUSTO MURACCHINI (*)

Sul moto di una particella carica in un campo magnetico di monopolo in presenza di forza gravitazionale. (**)

1. – In una sua Nota, A. D. Jette [1] studia il moto di una particella carica nel campo di un monopolo magnetico. Questo stesso problema è stato studiato con metodi diversi da vari altri Autori [2] - [7], che hanno anche illustrato l'interesse che esso riveste per alcune questioni geofisiche e astrofisiche [5], [7], [8].

Il risultato più interessante che viene ottenuto è la dimostrazione rigorosa e generale della proprietà che la traiettoria della particella è una curva tracciata su un cono rotondo, il cui vertice è il centro del monopolo magnetico: questo era stato infatti dimostrato soltanto in modo approssimato e con ipotesi restrittive [9].

Si ottiene anche l'espressione analitica esplicita della traiettoria che risulta essere, come ha dimostrato V. C. A. Ferraro [2] una geodetica del cono rotondo, cioè una curva che si distende in una retta quando il cono venga disteso su un piano. Si noti che il cono è luogo di linee di forza del campo e tali sono infatti le sue generatrici.

Quest'ultima proprietà è generale: dimostreremo infatti nel n. **3** che la traiettoria di una particella carica in un campo magnetico qualsiasi è sempre una geodetica della superficie luogo delle linee di forza del campo che si appoggiano alla traiettoria.

Ma lo scopo principale della presente Nota è quello di studiare la traiettoria di una particella carica nel caso in cui, oltre al campo magnetico di un mono-

---

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Gruppo discipline matematiche, Facoltà di Ingegneria, Università, via Vallescura 2, 40136 Bologna, Italia.

(**) Ricevuto: 27-X-1976.

polo, sia presente anche un campo gravitazionale dovuto ad una massa concentrata nel monopolo. Anche questo problema è di interesse per alcune questioni astrofisiche [1]. Dimostreremo nel n. **2** il risultato seguente: la traiettoria è ancora una curva tracciata su un cono rotondo le cui generatrici sono linee di forza del campo magnetico. Il cono è lo stesso che si avrebbe in assenza di campo gravitazionale a parità di condizioni iniziali. Sviluppando il cono su un piano la traiettoria si distende ora in una conica di cui un fuoco è il vertice del cono: la stessa conica che si avrebbe in un piano in assenza di campo magnetico e col solo campo gravitazionale.

2. – È noto ([**5**] pag. 29) che il campo magnetico di un monopolo il cui centro coincida con il polo O di un sistema di coordinate sferiche è espresso dalla

$$\boldsymbol{B} = \frac{A}{r^3}\boldsymbol{r}\,, \tag{1}$$

ove A è una costante ed $\boldsymbol{r}$ è il vettore diretto da O alla particella. Il campo gravitazionale dovuto ad una massa M concentrata in O esercita su una particella di massa m la forza

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^3}\boldsymbol{r}\,, \tag{2}$$

ove G è la costante di gravitazione. Perciò se la particella ha una carica q l'equazione del moto è

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{c}\left(\boldsymbol{v}\times\frac{A}{r^3}\boldsymbol{r}\right) - \frac{GMm}{r^3}\boldsymbol{r}\,, \tag{3}$$

c è la velocità della luce.

Nel caso in cui il campo gravitazionale sia assente la velocità $\boldsymbol{v}$ della particella ha modulo costante e ciò fornisce una prima costante del moto [**5**].

---

(1) Alcuni corpi celesti (nane bianche, stelle di neutroni) hanno il raggio molto piccolo rispetto alla loro massa. L'effetto della gravità su particelle cariche di massa anche piccola e in moto in prossimità della superficie del corpo celeste non è più trascurabile. D'altronde il campo magnetico dell'astro nella zona di spazio intorno all'asse magnetico è con buona approssimazione monopolare.

(Cfr. *Gravitational Radiation and Gravitational Collapse*, I.A.U. Symposium no. 64 (1973), Reidel Publishing Company, Boston 1974).

Non è più così nel caso attuale. Dimostriamo che si hanno i seguenti integrali primi del moto: l'energia totale ed un altro analogo all'integrale di Störmer [2]. Indicando con $\boldsymbol{L}$ il momento angolare della particella rispetto ad O si avrà ora

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = h \,, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{L} - \frac{qA}{cr}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{C} \,, \tag{5}$$

ove h ed il vettore costante $\boldsymbol{C}$ sono gli integrali primi del moto suddetti. La (4) si ottiene, come al solito, moltiplicando scalarmente ambo i membri di (3) per $\boldsymbol{v}$ e integrando.

Moltiplicando vettorialmente i due membri di (3) per $\boldsymbol{r}$ si ottiene dapprima

$$-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{qAv}{cr^2}\cos\alpha\boldsymbol{r} - \frac{qA}{cr}\boldsymbol{v} \,, \tag{6}$$

ove α è l'angolo tra $\boldsymbol{v}$ ed $\boldsymbol{r}$, cioè l'angolo formato dal vettore velocità, tangente alla traiettoria, con la linea di forza del campo magnetico. Ma il secondo membro di (6) non è altro che $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\big(-(qA/cr)\boldsymbol{r}\big)$ e pertanto si ha $\boldsymbol{L} - (qA/cr)\boldsymbol{r} = \boldsymbol{C}$ che è appunto la (5).

Siano $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_\lambda$ i versori delle linee coordinate sferiche. Risulta allora

$$\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{e}_r = -\frac{qA}{c} \qquad (\text{poichè}\,\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{e}_r = 0) \,, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{e}_\varphi = (m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}_\varphi = -mr\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_\lambda \,, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{e}_\lambda = (m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}_\lambda = mr\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_\varphi \,. \tag{9}$$

Possiamo supporre ora che l'asse polare del sistema di riferimento sia parallelo al vettore costante $\boldsymbol{C}$, certamente non nullo, (poichè è somma di due vettori non nulli tra loro perpendicolari) e le (7), (8), (9) forniscono

$$C \operatorname{sen}\lambda = -\frac{qA}{c}, \tag{10}$$

$$mr\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_\lambda = 0 \,, \tag{11}$$

$$mr\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_\varphi = C\cos\lambda \,. \tag{12}$$

---

[2] L'integrale di Störmer si ha nel moto di una particella carica in un campo magnetico dotato di simmetria assiale ed è uno scalare. Nel campo magnetico di monopolo, la cui simmetria è sferica, l'analogo integrale (5) è un vettore.

(Cfr. C. Störmer, *The polar aurora*, Oxford U.P., 1955, oppure la sua Nota originale in Zeits. f. Astroph. **1** (1930), p. 237).

L'equazione (10) mostra già che la coordinata λ è costante sulla traiettoria $\mathscr{T}$. Ciò significa che $\mathscr{T}$ è tracciata su un cono rotondo $\mathscr{C}$ avente il vertice nel polo O e il cui asse coincide con l'asse polare (cioè è una retta parallela al vettore $\boldsymbol{C}$).

La semiapertura $\theta = \pi/2 - \lambda$ del cono è data da

$$\cos\theta = -\frac{qA}{c}\,. \tag{13}$$

Se inizialmente l'angolo α e i moduli di $\boldsymbol{v}$ ed $\boldsymbol{r}$ sono rispettivamente α_0, v_0, r_0, dalla (5) si ha

$$C^2 = m^2 r_0^2 v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha_0 + \frac{q^2A^2}{c^2} \tag{14}$$

e, come si vede, C dipende solo dal campo magnetico e dalle condizioni iniziali: pertanto anche l'angolo θ e cioè il cono $\mathscr{C}$ dipende solo dal campo magnetico.

Passiamo ora alla determinazione esplicita della traiettoria. Dalle (10), (11), (12) ricordando che

$$m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_\varphi = mvr\cos\lambda\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} \tag{15}$$

e che $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\lambda^2 + r^2\cos^2\lambda\,\mathrm{d}\varphi^2$ è l'elemento d'arco in coordinate sferiche, si ha

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{mcvr^2\operatorname{sen}\theta}{qA}\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\,, \tag{16}$$

e, poichè $v\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}s$,

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\frac{qA}{mc\cos\theta}\,\frac{1}{r^2}\,. \tag{17}$$

Inoltre sulla traiettoria, poichè λ è costante,

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\operatorname{sen}^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2 \tag{18}$$

e così segue

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 = v^2 - r^2\operatorname{sen}^2\theta\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2. \tag{19}$$

Tenuto conto della (4) si ha allora

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{2h}{m} + 2GM\frac{1}{r} - \frac{q^2A^2\,\mathrm{tg}^2\,\theta}{m^2c^2}\,\frac{1}{r^2}\,. \tag{20}$$

Le equazioni (17) e (20) conducono, eliminando $\mathrm{d}t$, alla

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = r^2\{ar^2 + br - K^2\}\,, \tag{21}$$

avendo posto

$$a = \frac{2mc^2\cos^2\theta}{q^2A^2}\,h\,, \qquad b = \frac{2G\,Mm^2c^2\cos^2\theta}{q^2A^2}\,, \qquad K^2 = \mathrm{sen}^2\,\theta\,. \tag{22}$$

L'equazione (21) si integra senza difficoltà e fornisce

$$r = \frac{2K^2}{b - H\,\mathrm{sen}\,[K(\varphi - \varphi_0)]}\,, \tag{23}$$

ove

$$H^2 = \frac{4mc^2\cos^2\theta}{q^2A^2}\left\{2h\,\mathrm{sen}^2\,\theta + \frac{G^2M^2m^3\cos^2\theta}{q^2A^2}\right\}. \tag{24}$$

La (23) è l'equazione esplicita della traiettoria $\mathscr{T}$ in coordinate sferiche. Per ottenere l'equazione in coordinate polari piane della curva piana $\mathscr{T}^*$, che si ottiene sviluppando in un piano il cono $\mathscr{C}$, si osserva quanto segue.

Nel piano su cui viene disteso il cono $\mathscr{C}$ prendiamo come polo O^* il vertice del cono e come asse polare $\mathfrak{g}_0^*$ la generatrice $\mathfrak{g}_0$ data da $\varphi = \varphi_0$; sia poi $\mathfrak{g}$ la generatrice del cono data da $\varphi = \varphi_0 + \psi$ e $\mathfrak{g}^*$ la retta per O^* sulla quale si distende $\mathfrak{g}$ quando si sviluppa il cono.
L'angolo ω che $\mathfrak{g}^*$ forma con l'asse polare $\mathfrak{g}_0^*$ è (come si verifica facilmente)

$$\omega = (\mathrm{sen}\,\theta)\,\psi = K(\varphi - \varphi_0)\,. \tag{25}$$

L'equazione polare della curva $\mathscr{T}^*$ si ottiene dunque dalla (23) sostituendovi la (25).

Risulta

$$r = \frac{2K^2}{b - H\,\mathrm{sen}\,\omega}\,. \tag{26}$$

Questa è l'equazione di una conica col fuoco coincidente con il polo O. Tale conica è proprio la traiettoria del moto di un punto di massa m nel campo gravitazionale di una massa M. Infatti tenendo conto della (17) e della (25) si ricava dalla (26) che

$$m\left\{\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\right\}=-\frac{GMm}{r^2}\,. \tag{27}$$

La $\mathscr{T}^*$ è:

(i) una ellisse per $b^2>H^2$ e corrispondentemente la curva $\mathscr{T}$ traiettoria reale nello spazio è tutta al finito. Inoltre è chiusa quando il valore della coordinata r ha un periodo, rispetto alla coordinata φ, che è un multiplo intero dell'angolo giro. Ciò implica che la costante K sia un numero razionale e viceversa. In particolare per $H^2=0$, $\mathscr{T}^*$ e $\mathscr{T}$ sono entrambe circonferenze.

(ii) una iperbole per $b^2<H^2$ ed una parabola per $b^2=H^2$. Corrispondentemente la $\mathscr{T}$ è una curva che si allontana all'infinito dopo aver raggiunto una distanza minima dal polo O.

Si sa ([**5**] pag. 31) che anche quando agisce soltanto il campo magnetico la traiettoria della particella ha un punto di minima distanza d_m da O noto come « punto specchio ». Nel nostro caso risulta $d_m=r_0\,\mathrm{sen}\,\alpha_0$. Le equazioni ottenute sopra permettono di verificare che, a parità di condizioni iniziali, se è presente il campo gravitazionale l'analoga distanza minima risulta minore, o tutt'al più uguale. Infatti se d_g è la distanza minima quando agisce anche il campo gravitazionale si trova che

$$\frac{d_m}{d_g}=\xi_0+\sqrt{1-2\xi_0\,\mathrm{sen}\,\alpha_0+\xi_0^2}\,, \tag{28}$$

ove

$$\xi_0=\frac{GM}{r_0v_0^2\,\mathrm{sen}\,\alpha_0}\,. \tag{29}$$

È da escludere ovviamente il caso banale in cui $\alpha_0=0$. Si vede facilmente che risulta $d_m/d_g\geqslant 1$ (³) e si ha l'eguaglianza se, e solo se, $\alpha_0=(\pi/2)$ e $\xi_0\geqslant 1$.

(³) A titolo indicativo, per una particella carica, in moto in prossimità dell'asse magnetico di una stella di neutroni (raggio $R=10^6$ cm) di massa $M=2\cdot 10^{33}$ gr, a una distanza iniziale dal suo centro $r_0=5\cdot 10^6$ cm, con velocità iniziale $v_0=5\cdot 10^9$ cm/sec e $\alpha_0=\pi/4$ si trova $d_m/d_g=2.56$ e poichè risulta $d_m=3.54\cdot 10^6$ cm si ha che $d_g=1.38\cdot 10^6$ cm. Pertanto si ha anche $(d_m-R)/(d_g-R)=6$.

Notiamo ancora una relazione che si ricava dalla (5) tenuto conto della (1)

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{B} = \frac{K_0}{v^2}, \tag{30}$$

ove α è l'angolo tra $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{B}$, B è l'intensità del campo magnetico, K_0 una costante, v il modulo del vettore velocità. Tutte queste quantità sono relative ad un punto generico della traiettoria. La (30) estende una relazione valida nel caso di assenza di campo gravitazionale e formalmente identica: in quel caso però v è costante e la quantità a primo membro risulta costante [**4**], [**8**].

La quantità $v^2 \operatorname{sen}^2\alpha/B$ è uno degli invarianti adiabatici del moto di una particella in un campo magnetico [**10**]. La (30) prova che nel nostro caso tale quantità è addirittura una costante del moto.

3. – Per concludere dimostriamo che la traiettoria $\mathscr{T}$ di una particella carica in un campo magnetico $\boldsymbol{B}$ qualsiasi è sempre una geodetica della superficie Σ luogo delle linee di forza $\mathscr{L}$ di $\boldsymbol{B}$ che si appoggiano a $\mathscr{T}$ ([4]).

Infatti osserviamo anzitutto che il piano π tangente a Σ, in un punto P di $\mathscr{T}$, contiene i vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{B}$ che sono rispettivamente tangenti in P alle curve $\mathscr{T}$ ed $\mathscr{L}_P$. D'altra parte l'equazione del moto

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{mc}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

mostra che il vettore accelerazione $\boldsymbol{a}$ è perpendicolare ai vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{B}$ e dunque anche al piano tangente a Σ.

Il piano osculatore alla traiettoria $\mathscr{T}$ che contiene i vettori $\boldsymbol{v}$ ed $\boldsymbol{a}$ è dunque normale al piano e ciò implica come è noto che $\mathscr{T}$ sia una geodetica di Σ. Osserviamo che dalla precedente dimostrazione e del resto anche da ciò che si è visto nel n. **2** la suddetta proprietà della traiettoria non è più valida in presenza di un campo gravitazionale.

Bibliografia.

[**1**] A. D. Jette, *The path of a charged particle in the field of a magnetic monopole*, Amer. Math. Month. **76** (1969), 164.

[**2**] V. C. A. Ferraro, *Electromagnetic theory*, Athlone Press, University of London, London 1956.

([4]) Si può verificare il caso che $\mathscr{T}$ sia una linea di forza $\mathscr{L}$, ma solo quando questa è una retta. Infatti, se in ogni punto della traiettoria $\mathscr{T}$, $\boldsymbol{B}$ è tangente alla $\mathscr{T}$ allora il vettore accelerazione è nullo, il che implica che $\mathscr{T}$ sia una retta.

[3] B. LEHNERT, *Dynamics of charged particles*, Wiley, N. Y. 1964.

[4] J. A. VAN ALLEN, *Alfven invariant in the field of a magnetic unipole*, J. Geoph. Res. **70** (1965), 1240.

[5] B. ROSSI and S. OLBERT, *Introduction to the physics of space*, McGraw-Hill, N. Y. 1970.

[6] C. AGOSTINELLI, *Magnetofluidodinamica*, Monografie matematiche C.N.R., Cremonese, Roma 1966.

[7] A. PIGNEDOLI, *Sul problema delle aurore polari. Moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico e in prossimità di uno dei poli, essendo l'altro polo molto lontano*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **1** (1947), 17-49.

[8] V. N. HESS, *The radiation belt and magnetosphere*, Ginn-Blaisdell, London 1968.

[9] J. D. JACKSON, *Classical electrodynamics*, Wiley, N. Y. 1962.

[10] T. G. NORTHROP, *The adiabatic motion of charged particles*, Interscience Publishers, N. Y. 1963.

Summary.

In this paper the motion of a charged particle in the field of a magnetic monopole which exerts also a gravitational attraction is investigated. It is shown that the trajectory is a curve lying on a circular cone. Developing the cone in a plane this curve goes into a conic section with a focus in the vertex of the cone.

* * *