Riv. Mat. Univ. Parma (4) 2 (1976), 347-352

ANITA DALL'AGLIO ANGELOTTI (*)

Un criterio di periodicità per le soluzioni di sistemi periodici. (**)

1. - Introduzione.

La nozione di asperiodicità nel continuo in $+\infty$, per una funzione scalare e alcuni risultati ottenuti in [1] vengono in questa Nota estesi a soluzioni, limitate in futuro, di sistemi differenziali del primo ordine, non autonomi e periodici. Ciò permette di ottenere un criterio per l'esistenza di soluzioni periodiche dei sistemi differenziali considerati.

2. - Premesse.

2.1. – Sia t una variabile reale. Considero il sistema di n equazioni differenziali ordinarie

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t)\big) , \tag{2.1}$$

ove l'applicazione $f\colon \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ è continua in $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^n$, localmente lipschitziana in x ed inoltre periodica in t, con periodo minimo $\tau(>0)$.

In queste ipotesi, ad ogni $(t_0, x_0) \in \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^n$ viene associata una, ed una sola, soluzione del sistema differenziale (2.1); inoltre se $x(t)$ è una soluzione di (2.1), anche le funzioni $x(t+\tau)$, $x(t+2\tau)$, ... sono soluzioni di (2.1).

2.2. – *Alcune proprietà delle soluzioni di* (2.1) *asperiodiche nel continuo in* $+\infty$.

La definizione di funzione asperiodica nel continuo in $+\infty$ date in [1] si estende al caso di una soluzione di (2.1) secondo la seguente

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.
(**) Ricevuto: 20-XII-1976.

Definizione. Una soluzione $x(t)$ del sistema differenziale (2.1), limitata in futuro [1], si dice *asperiodica nel continuo in* $+\infty$, *di asperiodo* τ se si ha

$$\lim_{t\to+\infty}[x(t+m\tau)-x(t)]=0 \quad \textit{uniformemente rispetto ad } m \ (m=1,2,\ldots)\,. \tag{2.2}$$

Per le soluzioni asperiodiche di (2.1) valgono le proprietà seguenti.

Proprietà 1. *La relazione limite nel continuo* (2.2) *equivale alla seguente relazione limite nel* discreto *(essendo* $\nu=0,1,2,\ldots$*)*

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{\nu\to+\infty}|x(t+(\nu+m)\tau-x(t+\nu\tau))|=0\,,\\ \textit{uniformemente}\left\{\begin{array}{l}\textit{sia rispetto a } t\in[-T\ldots+\infty]\\ \qquad (T>0 \textit{ e grande a piacere})\,,\\ \textit{sia rispetto ad } m\ (=1,2,\ldots)\,.\end{array}\right.\end{array}\right. \tag{2.3}$$

Dim. Osservo subito che questa Proprietà 1 vale nel caso particolare di una $x(t)$ scalare, come è stato provato in **[1]** (pp. 302-303).

Essa si estende ad una $x(t)$ vettoriale con una dimostrazione analoga a quella seguita in **[1]** quando vi si legga la norma di $x(t)$ al posto del valore assoluto di $x(t)$.

Proprietà 2. *L'asperiodicità nel continuo in* $+\infty$*, di asperiodo* τ (>0) *per la funzione* $x(t)$ *è necessaria e sufficiente affinchè la successione* $x(t+\nu\tau)$ $(\nu=0,1,\ldots)$ *quando* $\nu\to+\infty$*, uniformemente converga nell'intervallo illimitato* $-T\leqslant t<+\infty$ (con T positivo e grande a piacere).

Dim. Questa Proprietà 2 segue dalla Proprietà 1, in virtù del criterio di Cauchy sulla convergenza delle successioni di funzioni.

Pertanto esiste una funzione $p(t)$ tale che

$$\lim_{\nu\to+\infty}x(t+\nu\tau)=p(t) \quad \textit{uniformemente rispetto a } t\in[-T,+\infty)\,. \tag{2.4}$$

Proprietà 3. *La funzione limite* $p(t)$ *(data dalla* (2.4)*) è definita e continua su tutto l'asse reale.*

Dim. Provo che $p(t)$ è definita su tutto l'asse reale. Invero (cfr. $[\mathbf{2}]_1$) preso un intero positivo $\bar\nu$ comunque grande, considero la successione (succes-

(1) Precisamente, $x(t)$ è limitata in futuro se è definita per $t\geqslant t_0$ ed esiste una costante $L>0$, tale che $\forall t\geqslant t_0$, $\|x(t)\|<L$.

sione resto di $x(t+\nu\tau)$ $(\nu=0,1,2,...)$, $t>-T$)

$$x(t+\bar{\nu}\tau),\quad x(t+(\bar{\nu}+1)\tau),\ \dots \tag{2.5}$$

In questa successione ogni funzione è definita per $t>-T-\bar{\nu}\tau$.

Ora, per l'asperiodicità di $x(t)$ la (2.5) è convergente a $p(t)$; ne segue che $p(t)$ è definita per $t>-T-\bar{\nu}\tau$ e, per l'arbitrarietà di $\bar{\nu}$, è definita su tutto l'asse reale. La continuità della funzione $p(t)$ segue dalla sua definizione.

Proprietà 4. *La funzione limite è periodica di periodo τ (τ non è necessariamente il minimo periodo positivo di $p(t)$).*

Invero $\lim\limits_{\nu\to+\infty} x(t+\nu\tau)$ è invariante per il cambiamento di t in $t+\tau$.

3. - Esistenza di soluzioni periodiche.

Provo il seguente

Teorema. *Affinchè il sistema differenziale (2.1) abbia almeno una soluzione periodica di periodo τ, è necessario e sufficiente che (2.1) abbia una soluzione asperiodica di asperiodo τ.*

Osservo che con questo Teorema la questione della ricerca di soluzioni periodiche del sistema differenziale (2.1) viene ricondotta a quella di funzioni assai più generali quali sono le funzioni asperiodiche.

Dim. La condizione enunciata è *necessaria*.

Ciò segue subito osservando che ogni soluzione periodica è limitata e soddisfa la condizione (2.2).

La condizione enunciata è *sufficiente*.

Sia $x(t)_{t\geqslant 0}$ una soluzione di (2.1) asperiodica nel continuo in $+\infty$, di asperiodo τ, cioè $x(t)$ sia limitata in futuro da una costante L e soddisfi la (2.2). Esiste allora (cfr. Prop. 2) una funzione periodica $p(t)$ definita dalla (2.4): provo che questa funzione $p(t)$ è soluzione di (2.1).

A tal fine, per maggior chiarezza, suddivido la dimostrazione in due parti:

a) Posto: $S_L=\{\xi\in \boldsymbol{R}^n\colon \|\xi\|\leqslant L\}$, considero il compatto $[t_0, t_0+\tau]\times S_L$. Poichè $f(t,\xi)$ è continua in $\boldsymbol{R}^{n+1}$, essa risulta uniformemente continua nel compatto $[t_0,t_0+\tau]\times S_L$. D'altra parte, per ogni $t'\notin[t_0,t_0+\tau]$ esiste un intero n tale che $t'=t+n\tau$ con $t\in[t_0,t_0+\tau]$. Allora, avendosi (per la periodicità di $f(t,\xi)$)

$$f(t',\xi)\equiv f(t+n\tau,\xi)=f(t,\xi)\,,$$

si conclude che $f(t, \xi)$ è *uniformemente continua nell'insieme* $\boldsymbol{R} \times S_L$.

Ne segue

$$(3.1) \qquad \forall \varepsilon > 0\,,\ \forall t \in \boldsymbol{R}\,,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)\colon \forall \xi, \xi' \in S_L,\ \|\xi - \xi'\| < \delta,\ \|f(t, \xi) - f(t, \xi')\| < \varepsilon\,.$$

Ora, poichè la soluzione $x(t)_{t \geqslant t_0}$ è limitata in futuro dalla costante L, si ha

$$(3.2) \qquad x(t + \nu\tau) \subset \boldsymbol{R} \times S_L \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)\,;$$

inoltre, poichè $x(t)$ soddisfa la relazione (2.4), in corrispondenza al parametro $\delta = \delta(\varepsilon)$, figurante nella (3.1), esiste un intero positivo $\bar{\nu} = \bar{\nu}(\delta(\varepsilon)) = \bar{\nu}(\varepsilon)$ tale che

$$(3.3) \qquad \forall \nu > \bar{\nu}\,, \qquad \|x(t + \nu\tau) - p(t)\| < \delta\,,\ t \geqslant -T\,,$$

con $p(t) \in \boldsymbol{R} \times S_L$ (cfr. Proprietà 3 e Proprietà 4).

Allora, tenendo presente (3.2) e (3.3), da (3.1) segue

$$(3.4) \qquad \forall \varepsilon > 0\,,\ \forall t \geqslant t_0\,,\ \exists \bar{\nu} = \bar{\nu}(\varepsilon)\colon \forall \nu > \bar{\nu}\,,\ \|f(t, x(t + \nu\tau)) - f(t, p(t))\| < \varepsilon\,,$$

ossia

$$(3.4)' \qquad \lim_{\nu \to +\infty} f(t, x(t + \nu\tau)) = f(t, p(t)) \ \textit{uniformemente rispetto a}\ t \geqslant -T\,.$$

b) Poichè $x(t)$ è soluzione del sistema differenziale (2.1) per $t \geqslant t_0$, le funzioni della successione $x(t + \nu\tau)$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ sono ancora soluzioni di (2.1) per $t \geqslant t_0$, (cfr. n. **2.1**).

Allora, per ognuna di queste funzioni vale la relazione integrale (equivalente alla relazione differenziale (2.1))

$$(3.5) \qquad x(t + \nu\tau) - x(t_0 + \nu\tau) = \int_{t_0}^{t} f(\eta, x(\eta + \nu\tau))\, d\eta \qquad (t \geqslant t_0,\ \nu = 0, 1, 2, \ldots)\,,$$

da cui

$$(3.6) \qquad \lim_{\nu \to +\infty} [x(t + \nu\tau) - x(t_0 + \nu\tau)] = \lim_{\nu \to +\infty} \int_{t_0}^{t} f(\eta, x(\eta + \nu\tau))\, d\eta \qquad (t \geqslant t_0)\,.$$

Ora, prendendo T (> 0) abbastanza grande in modo che $t_0 > -T$, da (2.4) segue

$$(3.7) \qquad \lim_{\nu \to +\infty} [x(t + \nu\tau) - x(t_0 + \nu\tau)] = p(t) - p(t_0) \qquad (t \geqslant T_0)\,.$$

Inoltre, per l'uniforme continuità di $f(t, \xi)$ e per (3.4), si ha

$$(3.8)\quad \lim_{\nu \to +\infty} \int_{t_0}^{t} f(\eta, x(\eta + \nu\tau))\, d\eta = \int_{t_0}^{t} \lim_{\nu \to +\infty} f(\eta, x(\eta + \nu\tau))\, d\eta = \int_{t_0}^{t} f(\eta, p(\eta))\, d\eta\,.$$

In virtù di (3.7) e (3.8), la (3.6) diventa:

$$(3.9)\qquad p(t) - p(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(\eta, p(\eta))\, d\eta \qquad (t \geqslant t_0),$$

onde $p(t)$ è soluzione di (2.1) per $t \geqslant t_0$.

Osservazione. Quando si tenga presente la Proprietà 1, si dimostra che la funzione $p(t)$ è soluzione di (2.1) anche per $t \leqslant t_0$.

Invero, fissato ad arbitrio $-\infty < \bar{t} < t_0$, esisterà certamente un $\bar{\nu}$ tale che $\bar{t} + \bar{\nu}\tau \geqslant t_0$. Allora: $\forall \nu > \bar{\nu}$, $x(\bar{t} + \nu\tau)$ è soluzione di (2.1), e precisamente si ha

$$(3.5)'\qquad x(t_0 + \nu\tau) - x(\bar{t} + \nu\tau) = \int_{\bar{t}}^{t_0} f(\eta, x(\eta + \nu\tau))\, d\eta\,.$$

Ora, poichè la funzione integranda converge verso $f(t, p(t))$ uniformemente rispetto a $t \in [\bar{t}, t_0]$, passando al limite per $\nu \to +\infty$, in ambo i membri di (3.5)' si ottiene

$$p(t_0) - p(\bar{t}) = \int_{\bar{t}}^{t_0} (f(\eta, p(\eta))\, d\eta\,,$$

cioè $p(t)$, per l'arbitrarietà di $\bar{t}$, risulta soluzione di (2.1) per ogni $t < t_0$.

Bibliografia.

[1] A. Mambriani e B. Manfredi, *Su le funzioni asperiodiche in* $+\infty$ (I), Riv. Mat. Univ. Parma (2) **12** (1971), 281-308.

[2] B. Manfredi: $[\cdot]_1$ *Su le progressioni di aritmeticità aventi funzioni di accumulazione periodiche*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **8** (1967), 149-159; $[\cdot]_2$ *Aspériodicité globale en* $+\infty$ *et solutions périodiques*, Actes de la Conference internationale «Equa-diff 73», Bruxelles et Louvain-la Neuve (3-8 Septembre 1973).

[3] G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Zanichelli, Bologna 1948.

Summary.

In the present paper the concept of asperiodicity introduced in [**1**] *for scalar functions, is extended for solutions of non autonomous, periodic systems of linear differential equations. Moreover, is proved a necessary and sufficient condition for the existence of a periodic solution.*

* * *