Riv. Mat. Univ. Parma (4) 3 (1977), 199-202

GIORDANO GALLINA (*)

Su certi sistemi di Steiner non disgiunti. (**)

Introduzione.

In [**1**] Doyen pose la seguente questione: dato un intero n, tale che $0 \leqslant n \leqslant \leqslant v(v-1)/6$, determinare il massimo numero, $D(v, n)$, di sistemi di terne di Steiner di ordine v, che possano essere costruiti su di un insieme di cardinalità v, in modo tale che due qualsiasi di questi abbiano in comune sempre le stesse n terne, $T_1, \ldots, T_n$.

Vari Autori (1) hanno svolto ricerche sui sistemi di Steiner disgiunti, oppure sui sistemi di Steiner costruibili su di un medesimo insieme S, ed aventi esattamente una terna in comune (2).

Particolarmente interessante è il procedimento di « derivazione » dovuto a Doyen (3), capace di suggerire vari procedimenti analoghi per costruire sistemi di Steiner; noi forniamo qui, seguendo le sue idee, una costruzione di due sistemi di Steiner di ordine $6k+3$ (per k opportuno) aventi in comune $3k+1$ terne.

1. – Cominciamo con l'enunciare il risultato cui è dedicato il lavoro.

Teorema. *Sia k un intero positivo. Se* $2k+1 \not\equiv 0 \pmod 3$, *e* $2k+1$ *non è divisibile per* 5, *allora* $D(6k+3, 3k+1) \geqslant 2$.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.
(**) Ricevuto: 21-II-1977.
(1) Cfr. per es. [**1**]$_1$, [**2**].
(2) Cfr. per es. [**3**].
(3) Cfr. per es. [**1**]$_2$.

Dimostrazione. Sia G un gruppo *abeliano* di ordine *n dispari e primo con* 3. Consideriamo tre gruppi G_0, G_1, G_2, due a due disgiunti e ad esso isomorfi: siano φ_0, φ_1, φ_2, tre isomorfismi di G su G_0, G_1, G_2 rispettivamente.

Costruiamo un sistema di Steiner S^0 sull'insieme $S = G_0 \cup G_1 \cup G_2$. Consideriamo allo scopo le funzioni h_2, h_3, di G su G, definite rispettivamente dalle

$$h_2(x) = x^2\,, \qquad h_3(x) = x^3\,.$$

Si ha subito dalle ipotesi sull'ordine di G che h_2, h_3 sono automorfismi di G.

Pertanto, se $\alpha = 2^a$, e $\beta = 3^b$ (α, β naturali), possiamo porre ($\forall g \in G$)

$$g^{\alpha/\beta} = h_2^a(h_3^{-b}(g))\,, \qquad g^{\beta/\alpha} = h_3^b(h_2^{-a}(g))\,.$$

È immediato osservare che le funzioni $h_{\alpha/\beta}\colon g \to g^{\alpha/\beta}$, $h_{\beta/\alpha}\colon g \to g^{\beta/\alpha}$ sono ancora automorfismi di G.

Consideriamo ora sull'insieme $S = G_0 \cup G_1 \cup G_2$ il sistema di terne costituito da

a) tutti i sottoinsiemi del tipo: $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x^{2/3}), \varphi_2(x^{4/9})\}$, per $x \in G$;

b) tutti i sottoinsiemi: $\{\varphi_0(x), \varphi_0(y), \varphi_1(z)\}$, $\{\varphi_1(x), \varphi_1(y), \varphi_2(z)\}$, con x, y, $z \in G$, $x \neq y$, e con $xy = z^3$;

c) tutti i sottoinsiemi $\{\varphi_2(x), \varphi_2(y), \varphi_0(z)\}$, con $x, y, z \in G$, $x \neq y$ ed $xy = z^{8/9}$.

Si verifica facilmente che S, con le terne indicate, forma un sistema di Steiner.

2. – Osserviamo ora che, se inoltre l'ordine di G *non è divisibile per* 5, allora il sistema S_0 derivato nel senso di Doyen su S (4) ed il nostro sistema *hanno esattamente* $3k+1$ *terne in comune.*

Lo faremo contando per casi le terne comuni ai due sistemi. Sia T una terna comune ad S^0, S_0 i cui punti appartengano l'uno a G_0, l'altro a G_1, il terzo a G_2. Allora, ricordando che tale terna è del tipo $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$, con $x \in G$, in quanto appartenente al sistema S_0 derivato nel senso di Doyen da G, ed anche del tipo $\{\varphi_0(x'), \varphi_1(x'^{2/3}), \varphi_2(x'^{4/9})\}$, con $x' \in G$, in quanto appartenente ad S^0, si nota subito che deve essere $\varphi_0(x) = \varphi_0(x')$, e dunque, $x = x'$. Abbiamo pertanto $\varphi_1(x) = \varphi_1(x^{2/3})$, che implica $x = x^{2/3}$, donde $x = 1$ (5).

(4) Ricordiamo che S_0 contiene come terne:

a) tutti i sottoinsiemi $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ di S, per ogni $x \in G$;

b) i sottoinsiemi $\{\varphi_0(x), \varphi_0(y), \varphi_1(z)\}$, $\{\varphi_1(x), \varphi_1(y), \varphi_2(z)\}$, $\{\varphi_2(x), \varphi_2(y), \varphi_2(z)\}$, di S, con x, y, $z \in G$, $x \neq y$, ed $xy = z^2$.

(5) Indichiamo con 1 l'elemento neutro del gruppo G.

Quindi tra le terne sopra considerate, solo la $\{\varphi_0(1), \varphi_1(1), \varphi_2(1)\}$ appartiene ad S_0 ed anche ad S^0.

Sia T' una terna comune ad S_0, S^0, avente due elementi in G_0 ed il terzo in G_1. Una tale terna, essendo del sistema S_0, è del tipo $\{\varphi_0(x), \varphi_0(y), \varphi_1(z)\}$, $x \neq y$ ed $xy = z^2$. La stessa terna T' appartenendo al sistema S^0, è del tipo $\{\varphi_0(x'), \varphi_0(y'), \varphi_1(z')\}$, $x' \neq y'$, $x'y' = z'^3$. Se queste terne coincidono, allora ovviamente è $z = z'$. Inoltre, è anche $x = x'$ ed $y = y'$, oppure $x = y'$ ed $y = x'$. In entrambi i casi, tenendo conto della $xy = z^2$, e della $x'y' = z'^3$, si conclude che è $z = z' = 1$. Allora possiamo dire che due terne, l'una di S^0, l'altra di S_0 aventi due punti in G_0 ed il terzo in G_1, coincidono se e solo se il punto che sta in G_1 è proprio $\varphi_1(1)$. Poichè tale terna è del tipo $\{\varphi_0(x), \varphi_0(y), \varphi_1(1)\}$, con $xy = 1$, le terne in questione sono tante quante le coppie (non ordinate) $\{x, x^{-1}\}$ $(x \in G)$, con $x \neq x^{-1}$. Esse sono ovviamente k. Analogamente possiamo dimostrare che S^0 ed S_0 hanno in comune esattamente k terne, ognuna con due punti in G_1, e con il terzo punto in G_2.

Sia T'' una terna comune ad S^0 ed S_0, ed avente due punti in G_2 ed il terzo in G_0.

Essa, in quanto terna di S^0, è della forma $\{\varphi_2(x), \varphi_2(y), \varphi_0(z)\}$, con $x, y, z \in G$, $x \neq y$, $xy = z^{8/9}$; in quanto terna di S_0, è della forma $\{\varphi_2(x'), \varphi_2(y'), \varphi_0(z')\}$, con $x', y', z \in G$, $x' \neq y'$, ed $x'y' = z'^2$. Poichè queste due terne coincidono, ovviamente è $z = z'$. Inoltre, è anche $x = x'$ ed $y = y'$, oppure $x = y'$ ed $y = x'$. In entrambi i casi abbiamo che, tenendo conto della $xy = z^{8/9}$, e della $x'y' = z'^2$. risulta essere $z^{10} = 1$. Questa uguaglianza implica $z = 1$, se l'ordine di G (oltre ad essere dispari e non divisibile per 3) *non è divisibile per* 5. In tale ipotesi, ragionando in una maniera analoga a quella sopra esposta, abbiamo che le terne appartenenti tanto ad S^0 quanto ad S_0, ed aventi due punti in G_2 ed uno in G_0, sono k.

Concludendo, abbiamo che S^0 ed S_0 hanno esattamente $3k$ terne in comune, tra le terne aventi due punti in G_i ed il terzo in G_{i+1} $(i = 0, 1, 2)$, ove gli indici sono presi modulo 3; inoltre S^0 ed S_0 hanno in comune una terna con un punto in ciascuno dei G_i $(i = 0, 1, 2)$; poichè i due sistemi non posseggono alcuna terna contenuta in uno solo dei G_i, ne segue che S^0 ed S_0 hanno esattamente $3k + 1$ terne in comune.

Bibliografia.

[1] J. Doyen: [•]$_1$ *Constructions of distinct Steiner triple systems*, Proc. Amer. Math. Soc. **32** (1972), 409-416; [•]$_2$ *Sur la structure de certains systems triples de Steiner*, Math. Z. **111** (1959), 289-300.

[2] G. Ferrero, *Su un problema relativo ai sistemi di Steiner disgiunti,* Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste **7** (1975), 58-64.

[3] C. C. Lindner, *Construction of Steiner triple systems having exactly one triple in common,* Canad. J. Math. **26** (1974), 225-232.

Summary.

The construction of some classes of non-disjointed Steiner triple systems, by generalizing the « derivation » process of Doyen.

* * *