Riv. Mat. Univ. Parma (4) 3 (1977), 229-231

GIORDANO GALLINA (*)

Su certi gruppi singolari. (**)

Introduzione.

È stato osservato in $[\mathbf{1}]_1$ che il gruppo additivo G di uno stem p-singolare con radicale proprio J è un gruppo singolare, nel senso che esso contiene due sottogruppi H, J soddisfacenti le seguenti condizioni:

(I) H è un p-sottogruppo di Sylow di G, abeliano ed elementare, di ordine dispari, non normale in G.

(II) J è un p-complemento di H (non ridotto alla sola identità).

(III) ogni sottogruppo caratteristico di G è un sottogruppo di J.

Tali gruppi sono stati studiati in $[\mathbf{1}]_1$ e $[\mathbf{1}]_2$ allo scopo di avere informazioni più precise sui suddetti stems, e nella speranza di caratterizzare il loro gruppo additivo.

Nel presente lavoro mostriamo invece come esistono gruppi singolari che non sono sostegno di stems p-singolari.

1. – Lemma 1. *Sia G un gruppo finito, privo di centro e sia H un suo q-sottogruppo abeliano, tale da ammettere un q-complemento normale abeliano J. Allora un automorfismo α di G che tenga fermo H e che induca l'identità su J non può essere che l'automorfismo identico di G.*

Dimostrazione. Ricordiamo che due elementi c, d, appartenenti a G

(*) Indirizzo: Ist. di Mat., Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Ricevuto: 4-IV-1977.

possono essere scritti come

$$c = a_1 b_1 , \qquad a_1 \in H , \quad b_1 \in J ,$$

$$d = a_2 b_2 , \qquad a_2 \in H , \quad b_2 \in J ,$$

con $cd = a_1 a_2 b_1^{f(a_2)} b_2$, dove f è un omomorfismo di H in $A(J)$. Nel nostro caso, f è addirittura un monomorfismo, poichè il suo nucleo appartiene al centro di G, che è per ipotesi il sottogruppo identico.

Per il teorema di 3.3 di $[\mathbf{2}]_1$ (¹), è $f(a^\alpha) = f(a)$ per ogni $a \in H$.

Poichè f è iniettiva, $\alpha = 1$.

Lemma 2. *Assumiamo le stesse ipotesi del Lemma* 1. *Allora i fattori primi dell'ordine di un automorfismo φ di G sono divisori di $|G|$, oppure di $|A(J)|$* (²).

Dimostrazione. Osserviamo che J è caratteristica in G, e dunque $J^\varphi = J$. Poichè H è un q-sottogruppo di Sylow di G, esiste un automorfismo interno λ di G indotto da un $k \in J$, tale che $H^{\varphi\lambda^{-1}} = H$.

Sia J' il sottogruppo di $A(G)$, costituito da tutti gli automorfismi interni di G indotti dagli elementi di J. Essendo per ipotesi G senza centro, J' è caratteristico nel gruppo degli automorfismi interni di G, e dunque normale in $A(G)$. Posto dunque $\psi = \varphi\lambda^{-1}$, è $\langle J', \psi\rangle = J'\langle\psi\rangle$. Pertanto $\varphi \in J'\langle\psi\rangle$.

Se una potenza di ψ, diciamo ψ^n, induce l'identità su J, per il Lemma 1 è $\psi^n = 1$.

Possiamo pertanto asserire che l'ordine di ψ divide $|A(J)|$.

Visto che φ appartiene a $J'\langle\psi\rangle$, i fattori primi del suo ordine dividono l'ordine di J, o l'ordine di $\langle\psi\rangle$, e quindi l'ordine di J, o l'ordine di $A(J)$.

2. – Giungiamo ora al seguente

Teorema 3. *Esiste un gruppo singolare che non è gruppo additivo di alcuno stem 3-singolare.*

Dimostrazione. Consideriamo uno dei gruppi di ordine $p^r q^{r-1}$ (p, q numeri primi), definiti nel teorema 8.1 di $[\mathbf{2}]_2$, con $q = 3$, $r > 2$ e primo con 3. Poniamo inoltre che il massimo comun divisore degli ordini degli automorfi

(¹) Oppure per quanto è detto a p. 29 di $[\mathbf{2}]_2$ (formula (3.1)).

(²) Se E è un gruppo, indichiamo con $A(E)$ l'automorfo di E.

dei suoi sottogruppi di Sylow abbia al più 2 e 3 come fattori primi ([3]). Per il teorema 8.1 di $[\mathbf{1}]_4$, G è un gruppo avente come unico sottogruppo caratteristico proprio P, il p-sottogruppo di Sylow di G. Ne segue subito che G è un gruppo singolare e che soddisfa le ipotesi del Lemma 1 per $q = 3$.

Se per assurdo G è un gruppo additivo di uno stem 3-singolare avente Φ come gruppo associato ([4]) di automorfismi, allora G/P è uno stem 3-singolare semplice, il cui gruppo associato Φ^0 è immagine omomorfa di Φ (oss. 1 di $[\mathbf{1}]_1$).

Ora $|\Phi|$ può avere come fattori primi soltanto 3, p, e divisori dell'ordine dell'automorfo di P (Lemma 2). Ma $|\Phi^0|$ divide $|A(G/P)|$ e $|\Phi|$ sicchè il suo ordine per le ipotesi aritmetiche ammette al più 3 e 2 come fattori primi. Ma 3 non può essere fattore di $|\Phi^0|$, perchè allora Φ^0 ammetterebbe un 3-elemento, il quale risulterebbe avere delle coincidenze non banali, essendo $3^{r-1} - 1$ non divisibile per 3, contro il teorema 16 di $[\mathbf{1}]_4$. Pertanto, Φ^0 ha ordine una potenza di 2, e dunque contiene un elemento di ordine 2 privo di coincidenze, che in quanto tale manda ogni elemento nel suo opposto.

Per l'osservazione 3 di [**4**], G/P contiene una unità sinistra ε. Inoltre, essendo $\{\varepsilon, -\varepsilon, 0\}$ il sottogruppo di ordine 3 cui appartiene ε, ed essendo il prodotto definito nello stem G/P, è $(-\varepsilon)\cdot\varepsilon = -\varepsilon$ (lemma 8 di $[\mathbf{1}]_3$).

Si conclude che G/P ammette un sottostem proprio di ordine 3, ottenendo l'assurdo richiesto.

([3]) È possibile osservare che queste condizioni aritmetiche sono soddisfatte per $r = 4$, $p = 7$.

([4]) Ricordiamo che in uno stem p-singolare K, le corrispondenze del tipo $x \to ax$, per a non divisore dello zero, costituiscono un gruppo di automorfismi del gruppo additivo, che si dice associato a K (cfr. $[\mathbf{1}]_1$, $[\mathbf{1}]_4$).

Bibliografia.

[**1**] G. Ferrero: $[\bullet]_1$ *Sul gruppo additivo di uno stem p-singolare* - I, Atti Accad. Sci. Torino **108** (1974), 353-366; $[\bullet]_2$ *Sul gruppo additivo di uno stem p-singolare* - II, Atti Accad. Sci. Torino **108** (1974), 689-697; $[\bullet]_3$ *Classificazione e costruzione degli stems p-singolari*, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **102** (1968), 597-613; $[\bullet]_4$ *Struttura degli stem p-singolari*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **1** (1966), 243-254.

[**2**] D. R. Taunt: $[\bullet]_1$ *Remarks on the isomorphism problem in theories of construction of finite groups*, Proc. Camb. Phil. Soc. **51** (1955), 16-24; $[\bullet]_2$ *Finite groups having unique proper characteristic subgroups* - I, Proc. Camb. Phil. Soc. **51** (1955), 25-36.

Summary.

There are singular groups which cannot be additive groups of a p-singular near-ring.