Riv. Mat. Univ. Parma (4) 3 (1977), 233-245

MARIA TANZI CATTABIANCHI (*)

Caratterizzazione degli operatori integrali di Fredholm invarianti rispetto a gruppi di congruenze nel piano. (**)

1. - Introduzione.

Sia A un aperto limitato e connesso del piano cartesiano $\mathscr{R}^2$, la cui chiusura $\bar{A}$ sia un dominio regolare, e $H(A)$ lo spazio dei vettori a due componenti funzioni di quadrato integrabile in A.

Si considerino gli operatori (vettoriali) integrali di Fredholm L così definiti

$$Lu(x) = \int_A K(x, \xi) u(\xi) \, d\xi \,, \tag{1.1}$$

dove il nucleo $K(x, \xi)$ è una matrice 2×2 ad elementi $k^i_j(x, \xi)$ funzioni continue in $\bar{A} \times \bar{A}$.

Si vede facilmente che l'operatore L, nelle ipotesi indicate, trasforma lo spazio $H(A)$ in sé.

Sia G_A il gruppo di tutte le matrici ortogonali 2×2 rappresentanti congruenze di $\mathscr{R}^2$ che lasciano fisso A e supponiamo che tale gruppo contenga almeno una matrice non identica; sia G un sottogruppo di G_A.

Nel presente lavoro, che riprende e completa l'argomento della mia tesi di laurea ([1]), si caratterizzano i nuclei $K(x, \xi)$ verificanti le seguenti relazioni

$$\overset{*}{\gamma} K(\gamma x, \gamma \xi)\, \gamma = K(x, \xi) \tag{1.2}$$

(*) Indirizzo: Via M. Schina 8, 10143 Torino, Italy.

(**) Lavoro eseguito in qualità di borsista del C.N.R., sotto la guida della prof. L. Bassotti. — Ricevuto: 5-IV-1977.

([1]) Vedasi [7].

per ogni coppia di punti x, ξ di $\bar{A}$ e per ogni matrice γ del gruppo G ($\overset{*}{\gamma}$ denota la trasposta di γ).

La condizione (1.2) esprime che l'operatore L è invariante rispetto al gruppo G, secondo una definizione data recentemente da L. Bassotti (²).

Si dimostra facilmente il seguente risultato:

Condizione necessaria e sufficiente perchè valgano le (1.2) *per ogni* γ *appartenente a* G *è che sussistano le relazioni* (1.2) *per ogni* γ *generatore di* G.

Fra tutti i gruppi G finiti, quello che presenta maggiore interesse è il gruppo G_m ($m \geqslant 3$), ciclico di ordine m, delle matrici ortogonali rappresentanti le rotazioni piane di centro l'origine e ampiezza $2k\pi/m$ ($k = 0, 1, \ldots, m-1$).

Tale gruppo ammette il solo generatore

$$\gamma_m = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{m} & -\operatorname{sen} \frac{2\pi}{m} \\ \operatorname{sen} \frac{2\pi}{m} & \cos \frac{2\pi}{m} \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

relativo alla rotazione di centro l'origine e ampiezza $2\pi/m$.

Un altro gruppo finito notevole è il gruppo G^*_{2m}, di ordine $2m$, avente come generatori la matrice γ_m data dalla (1.3) e la matrice

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

relativa alla simmetria rispetto all'asse delle ascisse.

Altri casi interessanti sono forniti dal gruppo infinito R delle matrici ortogonali rappresentanti tutte le rotazioni piane di centro l'origine e di ampiezza arbitraria λ, e dal gruppo infinito $\mathcal{O}$ di tutte le matrici ortogonali.

Noi ci limiteremo ad esaminare questi casi che presentano una discussione piuttosto complessa. Altri gruppi finiti di particolare interesse per le applicazioni sono stati studiati nella mia tesi di laurea (vedasi [7]).

Sia $K(x, \xi)$ un nucleo continuo in $\bar{A} \times \bar{A}$. Le condizioni (1.2) sono certamente verificate in $\bar{A} \times \bar{A}$, se esse lo sono in $A \times A$. Nel seguito del lavoro considereremo esclusivamente le condizioni (1.2) in $A \times A$ e supporremo, il che non è restrittivo, che A non contenga l'origine del piano. Quest'ultima ipotesi non esclude che l'origine possa essere un punto interno alla chiusura di A.

(²) Vedasi $[\mathbf{2}]_1$.

2. - Alcune premesse.

Fissato l'aperto A del piano cartesiano $\mathscr{R}^2$ ed un sottogruppo G del gruppo G_A, studiamo il caso in cui G contenga una matrice γ del tipo

$$\gamma = \begin{pmatrix} \cos\lambda & -\operatorname{sen}\lambda \\ \operatorname{sen}\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Fra le relazioni matriciali (1.2), quella relativa alla matrice γ considerata si traduce nel seguente sistema di condizioni sugli elementi $k_j^i(x, \xi)$

$$\left\{\begin{array}{l} \cos 2\lambda \cdot (\tilde{k}_1^1 - \tilde{k}_2^2) + \operatorname{sen} 2\lambda \cdot (\tilde{k}_2^1 + \tilde{k}_1^2) = k_1^1 - k_2^2 \\ \tilde{k}_1^1 + \tilde{k}_2^2 = k_1^1 + k_2^2 \\ -\operatorname{sen} 2\lambda \cdot (\tilde{k}_1^1 - \tilde{k}_2^2) + \cos 2\lambda \cdot (\tilde{k}_2^1 + \tilde{k}_1^2) = k_2^1 + k_1^2 \\ \tilde{k}_2^1 - \tilde{k}_1^2 = k_2^1 - k_1^2 , \end{array}\right. \tag{2.2}$$

avendo posto, per semplicità di scrittura,

$$\tilde{k}_j^i = k_j^i(\gamma x, \gamma \xi) \qquad (i, j = 1, 2). \tag{2.3}$$

Se nelle (2.2) si pone

$$\left\{\begin{array}{l} 2p(x, \xi) = k_1^1(x, \xi) + k_2^2(x, \xi) \\ 2q(x, \xi) = k_2^1(x, \xi) - k_1^2(x, \xi) \\ 2r(x, \xi) = k_2^1(x, \xi) + k_1^2(x, \xi) \\ 2s(x, \xi) = k_1^1(x, \xi) - k_2^2(x, \xi) , \end{array}\right. \tag{2.4}$$

il sistema (2.2) dà luogo a

$$p(\gamma x, \gamma \xi) = p(x, \xi) , \qquad q(\gamma x, \gamma \xi) = q(x, \xi) , \tag{2.5}$$

ed inoltre

$$\left\{\begin{array}{l} r(\gamma x, \gamma \xi) = \cos 2\lambda \cdot r(x, \xi) + \operatorname{sen} 2\lambda \cdot s(x, \xi) \\ s(\gamma x, \gamma \xi) = \cos 2\lambda \cdot s(x, \xi) - \operatorname{sen} 2\lambda \cdot r(x, \xi) . \end{array}\right. \tag{2.6}$$

Se λ non è multiplo di $\pi/2$, dal sistema (2.6) si ottiene poi, tenendo conto che se $\gamma \in G$ anche $\gamma^2 \in G$,

$$\left\{ \begin{aligned} & r(\gamma^2 x, \gamma^2 \xi) - 2\cos 2\lambda \cdot r(\gamma x, \gamma \xi) + r(x, \xi) = 0 \\ & s(\gamma^2 x, \gamma^2 \xi) - 2\cos 2\lambda \cdot s(\gamma x, \gamma \xi) + s(x, \xi) = 0 \, . \end{aligned} \right. \tag{2.7}$$

Pertanto $r(x, \xi)$ e $s(x, \xi)$ sono funzioni continue in $A \times A$ verificanti entrambe la relazione

$$z(\gamma^2 x, \gamma^2 \xi) - 2\cos 2\lambda \cdot z(\gamma x, \gamma \xi) + z(x, \xi) = 0 \tag{2.8}$$

se $\lambda \neq k\pi/2$ $(k \in \mathscr{Z})$, oppure

$$z(\gamma x, \gamma \xi) = \cos 2\lambda \cdot z(x, \xi) \qquad \text{se } \lambda = k\pi/2 \qquad (k \in \mathscr{Z}) \, . \tag{2.9}$$

Ne segue che la matrice $K(x, \xi)$ ha la seguente forma

$$K(x, \xi) = \begin{pmatrix} p + s & r + q \\ r - q & p - s \end{pmatrix} , \tag{2.10}$$

dove p e q sono funzioni continue in $A \times A$ verificanti le (2.5) ed r e s sono funzioni continue in $A \times A$, soluzioni dell'equazione (2.8) se λ non è multiplo di $\pi/2$, oppure dell'equazione (2.9) se $\lambda = k\pi/2$.

Introdotto nel piano $\mathscr{R}^2$ un sistema di coordinate polari di polo l'origine ed asse polare l'asse delle ascisse, dette ϱ e θ le coordinate polari di x, σ e φ quelle di ξ, posto

$$Z(\varrho, \sigma, \theta, \varphi) = z(x, \xi) \, , \tag{2.11}$$

all'equazione (2.8) si può sostituire l'equazione

$$\begin{aligned} Z(\varrho, \sigma, \theta + 2\lambda, \varphi + 2\lambda) - & \\ - 2\cos 2\lambda \cdot Z(\varrho, \sigma, \theta + \lambda, \varphi + \lambda) + Z(\varrho, \sigma, \theta, \varphi) &= 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

in $B \times B$, dove B è l'aperto corrispondente ad A nel piano (ϱ, θ).

3. - Funzioni invarianti e seminvarianti rispetto ad un gruppo. Funzioni isotrope.

È opportuno dare qualche definizione.

Diciamo che una funzione scalare $t(x, \xi)$, definita in $A \times A$, è *invariante rispetto ad un sottogruppo G di G_A*, quando verifica le relazioni

$$t(\gamma x, \gamma \xi) = t(x, \xi) \quad \text{in } A \times A\,, \tag{3.1}$$

per ogni $\gamma \in G$.

È evidente che $t(x, \xi)$ è invariante rispetto a G se e solo se le relazioni (3.1) sono verificate in corrispondenza ai generatori di G.

Si verifica facilmente che la somma e il prodotto di funzioni invarianti sono funzioni invarianti.

In particolare, se G è il gruppo R delle matrici ortogonali che rappresentano le rotazioni intorno all'origine, le funzioni scalari invarianti rispetto a G saranno dette *isotrope* (3).

Se G coincide col gruppo $\mathcal{O}$ di tutte le matrici ortogonali, ogni funzione scalare invariante rispetto ad $\mathcal{O}$ sarà detta *isotropa e simmetrica*.

Sussistono i seguenti risultati:

Teorema 1. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione $t(x, \xi)$ sia invariante rispetto a G_m è che, detta $T(\varrho, \sigma, \theta, \varphi)$ la sua trasformata in coordinate polari, T risulti funzione periodica di periodo $2\pi/m$ rispetto a ciascuna delle variabili θ e φ.*

Infatti la relazione (3.1), scritta in coordinate polari, assume la forma

$$T(\varrho, \sigma, \theta + 2\pi/m, \varphi + 2\pi/m) = T(\varrho, \sigma, \theta, \varphi) \quad \text{in } B \times B\,, \tag{3.2}$$

dove $2\pi/m$ è l'ampiezza della rotazione rappresentata dalla matrice ortogonale γ figurante nella (3.1).

Teorema 2. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $t(x, \xi)$ sia isotropa è che, detta $T(\varrho, \sigma, \theta, \varphi)$ la sua trasformata in coordinate polari, T sia funzione solo di $\varrho, \sigma, \theta - \varphi$.*

Che la condizione sia necessaria si dimostra facilmente, tenendo conto che dalla relazione

$$T(\varrho, \sigma, \theta + \lambda, \varphi + \lambda) = T(\varrho, \sigma, \theta, \varphi) \quad \text{in } B \times B\,, \tag{3.3}$$

valida per ogni λ, si ottiene subito, ponendo $\lambda = -\varphi$,

$$T(\varrho, \sigma, \theta - \varphi, 0) = T(\varrho, \sigma, \theta, \varphi)\,.$$

(3) Vedasi [**1**], p. 1168.

Viceversa, se $T(\varrho, \sigma, \theta, \varphi)$ è una funzione di $\varrho, \sigma, \theta-\varphi$, essa verifica banalmente la (3.3) qualunque sia λ.

Teorema 3. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $t(x, \xi)$ sia isotropa e simmetrica, cioè verifichi la relazione $t(\mu x, \mu\xi) = t(x, \xi)$ in $A \times A$ per ogni matrice ortogonale μ di $\mathcal{O}$, è che $T(\varrho, \sigma, \theta, \varphi)$ dipenda solo da $\varrho, \sigma, \theta-\varphi$, e sia una funzione pari di $\theta-\varphi$.*

La dimostrazione è immediata conseguenza del Teorema 2.

Accanto alle funzioni invarianti rispetto ad un gruppo, è opportuno considerare le funzioni $t(x, \xi)$, definite in $A \times A$, che verificano la condizione

$$t(\gamma x, \gamma\xi) = (\det\gamma)\cdot t(x, \xi) \qquad \text{in } A \times A$$

per ogni matrice γ del gruppo G: chiameremo queste funzioni *semivarianti rispetto a G.*

Sussiste il seguente

Teorema 4. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $t(x, \xi)$ sia seminvariante rispetto ad $\mathcal{O}$ è che $T(\varrho, \sigma, \theta, \varphi)$ dipenda solo da $\varrho, \sigma, \theta-\varphi$ e sia una funzione dispari di $\theta-\varphi$.*

La dimostrazione è immediata, tenuto conto del Teorema 2.

4. - Caratterizzazione dei nuclei $K(x, \xi)$ invarianti rispetto al gruppo ciclico G_m.

Fissato l'intero positivo $m \geqslant 3$, se nella relazione (1.2) la matrice ortogonale γ coincide con la matrice γ_m definita dalla (1.4), allora la relazione matriciale (1.2) è condizione necessaria e sufficiente affinchè l'operatore L sia invariante rispetto al gruppo G_m generato da γ_m.

In base alle definizioni introdotte nel n. **3**, si può affermare che le funzioni $p(x, \xi)$, $q(x, \xi)$, continue in $A \times A$, definite dalle (2.4) e verificanti le (2.5), sono invarianti rispetto al gruppo G_m.

Si vuole ora risolvere l'equazione (2.8) nel caso particolare $\lambda = 2\pi/m$, dove m è un intero positivo non inferiore a 3 e $m \neq 4$. Col cambiamento di variabili

$$\alpha = \theta + \varphi\,, \qquad \beta = \theta - \varphi\,, \tag{4.1}$$

posto

$$F(\varrho, \sigma, \alpha, \beta) = Z\left(\varrho, \sigma, \frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta}{2}\right), \tag{4.2}$$

alla (2.12) può sostituirsi l'equazione

$$(4.3)\qquad F\left(\varrho, \sigma, \alpha + \frac{8\pi}{m}, \beta\right) - 2\cos\frac{4\pi}{m}\cdot F\left(\varrho, \sigma, \alpha + \frac{4\pi}{m}, \beta\right) + F(\varrho, \sigma, \alpha, \beta) = 0.$$

La (4.3) è, per ogni fissata terna ϱ, σ, β, un'equazione lineare del secondo ordine alle differenze finite, omogenea. Poichè è facile verificare che $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ sono due soluzioni linearmente indipendenti di (4.3), ossia un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione (4.3), dalla teoria delle equazioni alle differenze finite (4), segue che ogni soluzione della (4.3) è del tipo

$$(4.4)\qquad F(\varrho, \sigma, \alpha, \beta) = C_1(\varrho, \sigma, \alpha, \beta)\cdot\cos\alpha + C_2(\varrho, \sigma, \alpha, \beta)\cdot\operatorname{sen}\alpha\,,$$

con C_1 e C_2 arbitrarie funzioni periodiche rispetto ad α di periodo $4\pi/m$.

In virtù delle (4.1), tutte e sole le soluzioni dell'equazione (2.12) sono date da

$$(4.5)\qquad Z(\varrho, \sigma, \theta, \varphi) = c_1(\varrho, \sigma, \theta, \varphi)\cdot\cos(\theta+\varphi) + c_2(\varrho, \sigma, \theta, \varphi)\cdot\operatorname{sen}(\theta+\varphi)\,,$$

dove c_1 e c_2 sono arbitrarie funzioni definite in $B\times B$, periodiche di periodo $2\pi/m$ rispetto a ciascuna delle variabili θ, φ.

Da quanto precede si può concludere che

Teorema 5. *Ogni soluzione dell'equazione* (2.8), *nel caso* $\lambda = 2\pi/m$ *con* $m \geqslant 3$, $m \neq 4$, *è della forma*

$$(4.6)\qquad z(x, \xi) = g_1(x, \xi)\cdot(x_1\xi_1 - x_2\xi_2) + g_2(x, \xi)\cdot(x_1\xi_2 + x_2\xi_1)\,,$$

dove $g_1(x, \xi)$ *e* $g_2(x, \xi)$ *sono due arbitrarie funzioni, definite in* $A\times A$, *invarianti rispetto al gruppo* G_m.

È infatti evidente che nell'espressione (4.5) delle soluzioni dell'equazione (2.12) le funzioni $\cos(\theta+\varphi)$, $\operatorname{sen}(\theta+\varphi)$ possono essere sostituite dalle funzioni

$$\varrho r\cos(\theta+\varphi) = x_1\xi_1 - x_2\xi_2\,,\qquad \varrho r\operatorname{sen}(\theta+\varphi) = x_1\xi_2 + x_2\xi_1\,.$$

Le affermazioni relative a $g_1(x, \xi)$, $g_2(x, \xi)$ seguono poi dal Teorema 1.

Restano così caratterizzate, nel presente caso, le funzioni $r(x, \xi)$ e $s(x, \xi)$ presenti nell'espressione (2.10).

Se invece è $\lambda = \pi/2$, cioè $m = 4$, dall'equazione (2.9) scritta in coordinate

(4) Vedasi, ad esempio, [4], p. 351.

polari, con la posizione (2.11), si ricava

$$Z(\varrho, \sigma, \theta + \pi/2, \varphi + \pi/2) = -Z(\varrho, \sigma, \theta, \varphi) , \tag{4.7}$$

la quale ammette la soluzione particolare $\cos(\theta + \varphi)$; quindi, in base alla teoria delle equazioni lineari alle differenze finite del primo ordine, ogni soluzione della (4.7) è del tipo

$$Z(\varrho, \sigma, \theta, \varphi) = c(\varrho, \sigma, \theta, \varphi) \cdot \cos(\theta + \varphi) ,$$

con $c(\varrho, \sigma, \theta, \varphi)$ funzione periodica di periodo $\pi/2$ rispetto a ciascuna delle variabili θ e φ. Analogamente al caso precedente si conclude che

Teorema 6. *Ogni soluzione dell'equazione* (2.9), *nel caso* $\lambda = \pi/2$, *è della forma*

$$z(x, \xi) = g(x, \xi)(x_1\xi_1 - x_2\xi_2) , \tag{4.8}$$

con $g(x, \xi)$ *arbitraria funzione definita in* $A \times A$ *e invariante rispetto al gruppo* G_4.

5. - Caratterizzazione dei nuclei $K(x, \xi)$ invarianti rispetto al gruppo infinito R.

Consideriamo il gruppo R delle matrici ortogonali descritto, al variare del parametro reale λ, dalla matrice

$$\gamma_\lambda = \begin{pmatrix} \cos\lambda & -\operatorname{sen}\lambda \\ \operatorname{sen}\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix} . \tag{5.1}$$

Le relazioni

$$\overset{*}{\gamma}_\lambda K(\gamma_\lambda x, \gamma_\lambda \xi)\gamma_\lambda = K(x, \xi) \tag{5.2}$$

rappresentano, al variare di γ_λ in R, infinite condizioni matriciali che traducono l'invarianza dell'operatore L, definito dalla (1.1), rispetto al gruppo R. Vogliamo ora studiare la relazione (5.2).

L'equazione (2.12) può scriversi nella forma

$$Z(\varrho, \sigma, \theta + \lambda, \varphi + \lambda) - 2\cos 2\lambda \cdot Z(\varrho, \sigma, \theta, \varphi) + Z(\varrho, \sigma, \theta - \lambda, \varphi - \lambda) = 0 , \tag{5.3}$$

che, nel presente caso, deve valere *identicamente* rispetto a λ.

Operando il cambiamento di variabili (4.1) con la posizione (4.2), l'equazione (5.3) assume la seguente forma

$$F(\varrho, \sigma, \alpha + 2\lambda, \beta) - 2\cos 2\lambda \cdot F(\varrho, \sigma, \alpha, \beta) + F(\varrho, \sigma, \alpha - 2\lambda, \beta) = 0 . \tag{5.4}$$

Poichè l'equazione (5.4) deve valere per ogni λ, ne segue che per ogni fissata terna ϱ, σ, β, la funzione F, come funzione di α, è periodica di periodo 2π, come si vede ponendo $\lambda = \pi/4$. Sia

$$\tfrac{1}{2}a_0(\varrho, \sigma, \beta) + \sum_{h=1}^{\infty}\{a_h(\varrho, \sigma, \beta)\cdot\cos h\alpha + b_h(\varrho, \sigma, \beta)\cdot \operatorname{sen} h\alpha\} \tag{5.5}$$

lo sviluppo in serie di Fourier di $F(\varrho, \sigma, \alpha, \beta)$, considerata come funzione di α, essendo

$$\left\{\begin{array}{ll} a_h(\varrho, \sigma, \beta) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} F(\varrho, \sigma, \alpha, \beta)\cdot\cos h\alpha\, d\alpha & (h = 0, 1, 2, \ldots) \\ b_h(\varrho, \sigma, \beta) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} F(\varrho, \sigma, \alpha, \beta)\cdot\operatorname{sen} h\alpha\, d\alpha & (h = 1, 2, \ldots) . \end{array}\right. \tag{5.6}$$

I coefficienti di Fourier dello sviluppo in serie della funzione

$$F(\varrho, \sigma, \alpha + 2\lambda, \beta) + F(\varrho, \sigma, \alpha - 2\lambda, \beta)$$

sono

$$\left\{\begin{array}{l} a'_h(\varrho, \sigma, \beta) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} F(\varrho, \sigma, \alpha, \beta)[\cos h(\alpha - 2\lambda) + \cos h(\alpha + 2\lambda)]\, d\alpha \\ b'_h(\varrho, \sigma, \beta) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} F(\varrho, \sigma, \alpha, \beta)[\operatorname{sen} h(\alpha - 2\lambda) + \operatorname{sen} h(\alpha + 2\lambda)]\, d\alpha . \end{array}\right. \tag{5.7}$$

Ne segue

$$\left\{\begin{array}{l} a'_h(\varrho, \sigma, \beta) = 2\cos 2h\lambda\cdot a_h(\varrho, \sigma, \beta) \\ b'_h(\varrho, \sigma, \beta) = 2\cos 2h\lambda\cdot b_h(\varrho, \sigma, \beta) . \end{array}\right. \tag{5.8}$$

Le due funzioni

$$F(\varrho, \sigma, \alpha + 2\lambda, \beta) + F(\varrho, \sigma, \alpha - 2\lambda, \beta)\,, \qquad 2\cos 2\lambda \cdot F(\varrho, \sigma, \alpha, \beta)\,,$$

coincidono se e solo se hanno gli stessi coefficienti di Fourier; quindi

$$(5.9) \qquad \begin{cases} (\cos 2h\lambda - \cos 2\lambda)\cdot a_h(\varrho, \sigma, \beta) = 0 & (h = 0, 1, 2, \ldots) \\ (\cos 2h\lambda - \cos 2\lambda)\cdot b_h(\varrho, \sigma, \beta) = 0 & (h = 1, 2, \ldots)\,, \end{cases}$$

per ogni $\varrho, \sigma, \beta, \lambda, h$. Per $h = 0$ risulta $a_0(\varrho, \sigma, \beta) \equiv 0$; per $h = 1$ si vede che $a_1(\varrho, \sigma, \beta)$ e $b_1(\varrho, \sigma, \beta)$ sono arbitrari; per $h > 1$ è $a_h(\varrho, \sigma, \beta) \equiv b_h(\varrho, \sigma, \beta) \equiv 0$.

Se ne conclude che tutte e sole le soluzioni dell'equazione (5.4) sono date da

$$(5.10) \qquad F(\varrho, \sigma, \alpha, \beta) = a_1(\varrho, \sigma, \beta)\cdot\cos\alpha + b_1(\varrho, \sigma, \beta)\cdot\operatorname{sen}\alpha\,,$$

con a_1 e b_1 funzioni arbitrarie di ϱ, σ, β.

Per le (4.1) e (4.2) è $F(\varrho, \sigma, \alpha, \beta) = Z(\varrho, \sigma, \theta, \varphi)$ e la (5.10) diventa

$$(5.11) \quad Z(\varrho, \sigma, \theta, \varphi) = a_1(\varrho, \sigma, \theta - \varphi)\cdot\cos(\theta + \varphi) + b_1(\varrho, \sigma, \theta - \varphi)\operatorname{sen}(\theta + \varphi)\,,$$

che è la soluzione generale dell'equazione (5.3).

Pertanto, per quanto visto ai nn. **3** e **4** si può concludere che

Teorema 7. *Tutte e sole le soluzioni dell'equazione* (2.8), *considerata come identità in* λ, *hanno la forma*

$$(5.12) \qquad z(x, \xi) = l_1(x, \xi)\cdot(x_1\xi_1 - x_2\xi_2) + l_2(x, \xi)\cdot(x_1\xi_2 + x_2\xi_1)\,,$$

dove $l_1(x, \xi)$ *e* $l_2(x, \xi)$ *sono arbitrarie funzioni isotrope definite in* $A \times A$.

Ritornando alla matrice $K(x, \xi)$ data dalla (2.10), i risultati ottenuti determinano le funzioni $r(x, \xi)$ e $s(x, \xi)$ come funzioni del tipo (5.12); le funzioni $p(x, \xi)$ e $q(x, \xi)$ sono arbitrarie funzioni isotrope in quanto verificano le (2.5) per ogni $\gamma \in R$.

È così risolto il problema della caratterizzazione delle matrici $K(x, \xi)$ come nuclei di operatori integrali L invarianti rispetto al gruppo R.

6. - Alcune osservazioni.

Consideriamo il gruppo G^*_{2m} generato dalle matrici ortogonali γ_m e σ_1, date rispettivamente da (1.3) e (1.4).

I domini regolari $\bar{A}$ di $\mathscr{R}^2$ mutati in sé dal gruppo G_{2m}^* sono quelli invarianti rispetto alla rotazione di centro l'origine e ampiezza $2\pi/m$ e dalla simmetria rispetto all'asse x_1: fra questi rientrano, in particolare, i poligoni regolari P_m di m lati di centro l'origine e simmetrici rispetto all'asse x_1.

Sia dunque A un aperto la cui chiusura $\bar{A}$ è un dominio mutato in sé dal gruppo G_{2m}^*.

La condizione di invarianza dell'operatore integrale L, definito dalla (1.1), rispetto al gruppo G_{2m}^* si esprime per mezzo delle due seguenti relazioni matriciali

$$\left\{\begin{aligned} &\overset{*}{\gamma}_m K(\gamma_m x, \gamma_m \xi)\gamma_m = K(x, \xi) \\ &\sigma_1 K(\sigma_1 x, \sigma_1 \xi)\sigma_1 = K(x, \xi) \end{aligned}\right. \tag{6.1}$$

in $A \times A$.

La prima delle (6.1) è stata già studiata al n. 4; occorre studiare ora le condizioni su $K(x, \xi)$ derivanti dalla seconda delle (6.1). Si consideri la matrice $K(x, \xi)$ scritta nella forma (2.10). La seconda condizione matriciale (6.1) porta alle condizioni su p, q

$$p(\sigma_1 x, \sigma_1 \xi) = p(x, \xi)\,, \qquad q(\sigma_1 x, \sigma_1 \xi) = -\,q(x, \xi)\,, \tag{6.2}$$

che, unite alle condizioni su p, q derivanti dalla prima delle condizioni (6.1), esprimono che

La funzione $p(x, \xi)$ è invariante rispetto al gruppo G_{2m}^* e la funzione $q(x, \xi)$ è seminvariante rispetto allo stesso gruppo.

Per quanto riguarda invece le funzioni r, s, risulta, in base alla prima delle condizioni (6.1),

$$\left\{\begin{aligned} r(x, \xi) &= f_1(x, \xi)\cdot(x_1\xi_1 - x_2\xi_2) + f_2(x, \xi)\cdot(x_1\xi_2 + x_2\xi_1) \\ s(x, \xi) &= g_1(x, \xi)\cdot(x_1\xi_1 - x_2\xi_2) + g_2(x, \xi)\cdot(x_1\xi_2 + x_2\xi_1)\,, \end{aligned}\right. \tag{6.3}$$

con f_1, f_2, g_1, g_2 funzioni invarianti rispetto al gruppo G_m e con $f_2(x, \xi) \equiv$ $\equiv g_2(x, \xi) \equiv 0$ se $m = 4$. Poichè la seconda delle condizioni (6.1) porta immediatamente a

$$r(\sigma_1 x, \sigma_1 \xi) = -\,r(x, \xi)\,, \qquad s(\sigma_1 x, \sigma_1 \xi) = s(x, \xi)\,, \tag{6.4}$$

si conclude che le condizioni (6.1) esprimono che

Le funzioni $r(x, \xi)$ e $s(x, \xi)$ sono del tipo (6.3), con $f_1(x, \xi)$ e $g_2(x, \xi)$ invarianti rispetto al gruppo G_{2m}^* e $f_2(x, \xi)$ e $g_1(x, \xi)$ seminvarianti rispetto allo stesso gruppo.

Consideriamo ora il gruppo $\mathcal{O}$ di tutte le matrici ortogonali 2×2 (isomorfo al gruppo delle congruenze di $\mathscr{R}^2$ in sé che lasciano fissa l'origine).

I soli dominii, chiusura di aperti limitati e connessi di $\mathscr{R}^2$, mutati in sé da tale gruppo $\mathcal{O}$ sono i cerchi e le corone circolari di centro l'origine.

Sia dunque A un aperto tale che sia $\bar{A}$ un cerchio o una corona circolare di centro l'origine. Nel gruppo $\mathcal{O}$ vi sono due sistemi infiniti di matrici descritti, al variare di λ, da γ_λ l'uno e da σ_λ l'altro, essendo

$$\gamma_\lambda = \begin{pmatrix} \cos\lambda & -\operatorname{sen}\lambda \\ \operatorname{sen}\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix}, \qquad \sigma_\lambda = \begin{pmatrix} -\cos\lambda & \operatorname{sen}\lambda \\ \operatorname{sen}\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

Poichè tutte le σ_λ si ottengono moltiplicando righe per colonne una di esse, ad esempio la matrice σ_1 data dalla (1.4), per tutte le matrici del tipo γ_λ, per il nucleo $K(x, \xi)$ di un operatore integrale L invariante rispetto al grupoo $\mathcal{O}$ si trovano le seguenti condizioni matriciali

$$\begin{cases} \overset{*}{\gamma}_\lambda K(\gamma_\lambda x, \gamma_\lambda \xi)\gamma_\lambda = K(x, \xi) \qquad (\lambda \in \mathscr{R}) \\ \sigma_1 K(\sigma_1 x, \sigma_1 \xi)\sigma_1 = K(x, \xi)\,, \end{cases} \tag{6.7}$$

la prima relazione rappresentando, al variare di λ, infinite condizioni matriciali: una per ogni matrice del tipo γ_λ.

Per quanto visto al n. **5**, i nuclei $K(x, \xi)$ invarianti rispetto al gruppo R hanno la forma (2.10), con $p(x, \xi)$, $q(x, \xi)$, $r(x, \xi)$, $s(x, \xi)$ funzioni definite e continue in $A\times A$, essendo $p(x, \xi)$ e $q(x, \xi)$ funzioni isotrope, e $r(x, \xi)$ e $s(x, \xi)$ date da

$$\begin{cases} r(x, \xi) = h_1(x, \xi)(x_1\xi_1 - x_2\xi_2) + h_2(x, \xi)(x_1\xi_2 + x_2\xi_1) \\ s(x, \xi) = l_1(x, \xi)(x_1\xi_1 - x_2\xi_2) + l_2(x, \xi)(x_1\xi_2 + x_2\xi_1)\,, \end{cases} \tag{6.8}$$

con h_1, h_2, l_1, l_2 funzioni isotrope in $A\times A$.

Dalla seconda relazione matriciale (6.7) si ottengono ulteriori condizioni sulle funzioni $h_1(x, \xi)$, $h_2(x, \xi)$, $l_1(x, \xi)$, $l_2(x, \xi)$, $p(x, \xi)$, $q(x, \xi)$, e precisamente:

Le funzioni $h_1(x, \xi)$, $l_2(x, \xi)$, $p(x, \xi)$ *risultano isotrope e simmetriche* (*cioè invarianti rispetto ad* $\mathcal{O}$) *in* $A\times A$, *mentre le funzioni* $h_2(x, \xi)$, $l_1(x, \xi)$, $q(x, \xi)$ *risultano* (*isotrope e*) *seminvarianti rispetto ad* $\mathcal{O}$ *in* $A\times A$.

Bibliografia.

[1] G. Ascoli, *Nuclei isotropi e loro autofunzioni*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **1** (1946), 1167-1172.

[2] L. BASSOTTI: $[\cdot]_1$ *Sottospazi invarianti per operatori differenziali lineari a coefficienti costanti*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **22** (1973), 157-184; $[\cdot]_2$ *Operatori lineari invarianti rispetto a gruppi di congruenze* (in corso di pubblicazione).

[3] F. B. HILDEBRAND, *Finite-Difference Equations and Simulations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1968.

[4] L. M. MILNE-THOMSON, *The Calculus of Finite Differences*, Macmillan and Co., London 1951.

[5] H. L. ROYDEN, *Real Analysis*, II Edit., Macmillan, London 1970.

[6] G. F. SIMMONS, *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill, New York 1963.

[7] M. TANZI CATTABIANCHI, *Caratterizzazione degli operatori integrali di Fredholm invarianti rispetto ad un gruppo di congruenze* (Relatore: Prof. L. Bassotti), Istituto di Matematica dell'Università di Parma, 1975 (Tesi di laurea).

[8] A. C. ZAANEN, *Linear Analysis*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1964

Summary.

A characterization is given for the 2×2 matrices, representing kernels of Fredholm integral operators, invariant with respect to either the group of plane rotations about the origin or some of its finite cyclical subgroups.

* * *