Riv. Mat. Univ. Parma (4) 3 (1977), 267-271

EDVIGE PUCCI (*)

Possibilità dinamica di precessioni semiregolari di seconda specie del girostato in campo newtoniano. (**)

1. – Nella presente Nota si riconosce la possibilità dinamica di moti di precessione semiregolare di seconda specie (velocità di precessione costante, velocità di rotazione propria variabile nel tempo) per il girostato fissato senza attrito per un suo punto O e soggetto a sollecitazione newtoniana valutata nella seconda approssimazione della serie di Mc Cullagh, qualora l'asse di precessione coincida con la congiungente il centro di attrazione O' con il punto fisso (verticale).

Moti con questa caratterizzazione cinematica sono già noti per il corpo rigido soggetto alla stessa sollecitazione, che naturalmente comprende il peso come caso particolare (prima approssimazione) [**1**], [**2**].

2. – Un moto di precessione semiregolare ad asse verticale di seconda specie è caratterizzato dalla seguente forma della velocità angolare

$$\boldsymbol{\omega} = \nu \boldsymbol{c} + \mu \boldsymbol{\chi} ,$$

con ν costante non nulla, μ variabile nel tempo, $\boldsymbol{c} = \text{vers}\, \boldsymbol{OO'}$, $\boldsymbol{\chi}$ versore solidale al corpo.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica Applicata, Via Vanvitelli 2, 06100 Perugia, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 2-V-1977.

Le equazioni che regolano un moto del tipo in esame, con le usuali notazioni [**2**], [**3**], hanno la forma

$$(1)\qquad \dot{\mu}\sigma(\boldsymbol{\chi}) + \nu^2 \boldsymbol{c}\times\sigma(\boldsymbol{c}) + \mu\nu[\sigma(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{\chi}) + \boldsymbol{c}\times\sigma(\boldsymbol{\chi}) + \boldsymbol{\chi}\times\sigma(\boldsymbol{c})] + \\ + \mu^2\boldsymbol{\chi}\times\sigma(\boldsymbol{\chi}) + (\nu\boldsymbol{c} + \mu\boldsymbol{\chi})\times\boldsymbol{I} = \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{OG}^* + \eta\boldsymbol{c}\times\sigma(\boldsymbol{c})\,,$$

$$(2)\qquad \dot{\boldsymbol{c}} = \mu\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{\chi}$$

ed ammettono oltre a $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\chi} =$ costante, gli integrali primi classici

$$(3)\qquad \nu^2\boldsymbol{c}\cdot\sigma(\boldsymbol{c}) + 2\mu\nu\boldsymbol{c}\cdot\sigma(\boldsymbol{\chi}) + \mu^2\boldsymbol{\chi}\cdot\sigma(\boldsymbol{\chi}) + 2\boldsymbol{OG}^*\cdot\boldsymbol{c} + \eta\boldsymbol{c}\cdot\sigma(\boldsymbol{c}) = 2E_0\,,$$

$$(4)\qquad \nu\boldsymbol{c}\cdot\sigma(\boldsymbol{c}) + \mu\boldsymbol{c}\cdot\sigma(\boldsymbol{\chi}) + \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{c} = k_c\,,$$

e la relazione invariante

$$(5)\qquad \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} = 1\,.$$

Per il seguito queste equazioni vengono riferite ad una terna $T(O, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3)$ solidale al girostato, già utilizzata in numerose ricerche analoghe (ad es. [**1**], [**2**]$_1$, [**2**]$_2$, [**3**]), caratterizzata da $\boldsymbol{i}_3 = \boldsymbol{\eta}$, $C' = 0$.

Il problema è quello di determinare le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di soluzioni delle (1) e (2) nelle incognite ν, c_3, $c_1(t)$, $c_2(t)$, $\mu(t)$ escludendo però le precessioni regolari $(\mu(t) =$ costante$)$ già esaminate in [**3**] e le rotazioni $(\nu = 0$ oppure $c_1(t) = c_2(t) = 0)$.

3. – È possibile determinare condizioni necessarie atte a semplificare la trattazione del problema esaminando dapprima la compatibilità degli integrali primi nelle variabili di moto $\mu(t)$, $c_1(t)$, $c_2(t)$.

Questa compatibilità si traduce nell'esistenza di una curva Γ dello spazio proiettivo $R^3(c_1, c_2, \mu, z)$ definito come intersezione comune delle superficie algebriche di equazioni (3), (4), (5). Questa curva deve però avere una parte reale propria non costituita da un numero finito di punti e non appartenente a piani del fascio $\mu =$ costante o alla retta $c_1 = c_2 = 0$.

L'eventuale curva Γ è algebrica e deve avere quindi intersezioni in numero uguale al suo ordine con un generico piano di R^3. In particolare, se si intersecano le superficie di equazioni (3), (4), (5) con il piano improprio $z = 0$ di R^3, si ottengono le curve

$$(3')\qquad (\nu^2 + \eta)(Ac_1^2 + Bc_2^2) - 2\mu\nu(B'c_1 + A'c_2) + C\mu^2 = 0\,,$$

$$(4')\qquad \nu(Ac_1^2 + Bc_2^2) - \mu(B'c_1 + A'c_2) = 0\,,$$

$$(5')\qquad c_1^2 + c_2^2 = 0\,.$$

Si riconosce che queste hanno intersezioni comuni nelle tre eventualità

$$\text{i) } A = B; \qquad \text{ii) } B' = 0, \quad (\nu^2 - \eta)A'^2 + C\nu^2(A - B) = 0 \quad (A \neq B);$$
$$\text{iii) } A' = 0, \qquad (\nu^2 - \eta)B'^2 - C\nu^2(A - B) = 0 \qquad (A \neq B).$$

Nell'eventualità i) i punti comuni sono $(1, i, 0, 0)$ e $(1, -i, 0, 0)$ e in generale sono punti semplici, risultando doppi soltanto quando è anche $A' = B' = 0$. In generale la curva Γ è dunque al più una circonferenza appartenente ad un piano $\mu =$ costante. Quando è invece $A' = B' = 0$ è agevole effettuare una verifica diretta nelle equazioni (3), (4), (5) che mostra che per Γ si ottiene ancora una circonferenza di un piano $\mu =$ costante cui si aggiungono i due punti $(1, i, 0, 0)$ e $(1, -i, 0, 0)$.

L'eventualità i) va dunque esclusa poichè porta al più a precessioni regolari. Poichè l'eventualità iii) differisce solo nominalmente dalla ii), resta da considerare soltanto quest'ultima per la quale l'eventuale curva Γ ha in comune con il piano improprio i punti $\big(iA', -A', \nu(A-B), 0\big)$ e $\big(-iA', -A', \nu(A-B), 0\big)$ contati semplicemente. Si tratta dunque al più di una conica di un piano: $\nu(A - B)c_2 + A'\mu =$ cost.

La verifica diretta mostra che la curva Γ esiste, per opportuni valori delle costanti k_c ed E_0, se e solo se sono verificate anche le ulteriori condizioni

$$I_1 = 0\,, \qquad \xi_1 = 0\,, \qquad \xi_2\nu^2 = \nu\eta I_2 + A'\eta c_3(\nu^2 - \eta) \tag{6}$$

e consente di individuare il piano che contiene la conica

$$\mu = [\nu^2(B - A)c_2 - c_3A'(\nu^2 + \eta) + I_2\nu]/A'\nu\,. \tag{7}$$

Eventuali precessioni semiregolari del tipo in esame possono dunque avvenire solo se sono verificate, accanto alle condizioni ii) le condizioni (6). Esse avvengono con velocità di rotazione propria individuata dalla (7).

4. – La compatibilità degli integrali primi equivale alla compatibilità delle due equazioni che si ottengono proiettando la (1) sulle due direzioni non parallele di $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{c}$. Affinchè la (1) sia verificata, e quindi il moto sia dinamicamente possibile, è sufficiente esaminare la compatibilità della proiezione di (1) su una direzione non complanare a $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{c}$, per esempio sul primo asse di T.

Detta proiezione fornisce l'equazione

$$\begin{aligned} \nu^2[(C - B)c_2c_3 + A'c_3^2 - A'c_2^2] + \mu\nu[(A - B + C)c_2 + 2A'c_3] + \nu c_2 I_3 - \\ - (\nu c_3 + \mu)I_2 = \xi_3 c_2 - \xi_2 c_3 + \eta[(C - B)c_2c_3 + A'c_3^2 - A'c_2^2]\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Una verifica diretta permette di riconoscere che i moti compatibili con gli integrali primi verificano questa equazione, e quindi sono dinamicamente possibili se e solo se è verificata anche la condizione

$$A'[Ac_3(\nu^2 - \eta) - 2C\eta c_3 - \xi_3] + \nu(A'I_3 + CI_2) = 0 \,. \tag{9}$$

5. – Si è dimostrata la possibilità dinamica di moti di precessione semiregolare ad asse verticale di seconda specie per un girostato soggetto a sollecitazione newtoniana valutata in seconda approssimazione. Questi moti sono possibili solo se il baricentro e il momento girostatico appartengono ad uno stesso piano principale d'inerzia cui deve appartenere anche l'asse di figura. Le condizioni

$$(\nu^2 - \eta)A'^2 + \nu^2 C(A - B) = 0 \,, \qquad \xi_2 \nu^2 = \nu\eta I_2 + A'\eta c_3(\nu^2 - \eta) \,,$$

$$A'[Ac_3(\nu^2 - \eta) - 2C\eta c_3 - \xi_3] + \nu(A'I_3 + CI_2) = 0$$

determinano i valori delle costanti cinematiche ν e c_3 e la posizione dell'asse di figura nel detto piano principale (1). Si noti infine che moti di precessione semiregolare di seconda specie sono possibili anche per $\eta = 0$, ossia nel caso del girostato pesante.

Le condizioni ii) forniscono in questo caso la condizione strutturale: $B' = 0$, $A'^2 + C(A - B) = 0$, e le (6) e (9) divengono

$$I_1 = 0 \,, \qquad \xi_1 = 0 \,, \qquad \xi_2 = 0 \,, \tag{6'}$$

$$A'(Ac_3\nu^2 - \xi_3) + \nu(A'I_3 + I_2 C) = 0 \,. \tag{9'}$$

La possibilità dinamica è dunque limitata a girostati la cui distribuzione delle masse abbia struttura alla Hess, qualora l'asse di figura, che è baricentrico, sia ortogonale ad uno dei due piani ciclici dell'ellissoide reciproco d'inerzia relativo al punto fisso. Il momento girostatico deve appartenere al piano ortogonale all'asse mediano d'inerzia, e le costanti cinematiche ν e c_3 devono verificare la (9').

(1) Devono essere ovviamente verificate le opportune limitazioni strutturali atte a far si che risulti $|c_3| < 1$ e ν reale e non nulla.

Bibliografia.

[1] G. Grioli, *Forma intrinseca delle equazioni dinamiche del solido pesante asimmetrico con un punto fisso e ricerca dei moti di precessione*, Atti Accad. Univ. Ferrara (7) **3** (1954), 31-43.

[2] E. Pucci: $[\bullet]_1$ *Esistenza e determinazione delle precessioni semiregolari ad asse verticale di un corpo rigido in un campo di forze newtoniano*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **54** (1975), 133-146; $[\bullet]_2$ *Una classe di ∞^2 precessioni non regolari del girostato soggetto a sollecitazione newtoniana* (in corso di stampa su Atti Acc. Naz. Lincei Rend. (1977)).

[3] R. Balli e E. Pucci, *Precessioni regolari di un girostato in un campo di forze newtoniano*, Rend. Mat. (6) **10** (1977), 109-115.

Summary.

In this paper the dynamic possibility is proved of semiregular precessions: $\boldsymbol{\omega} = \nu \boldsymbol{c} + \mu \boldsymbol{\chi}$, $\nu =$ cost, $\mu = \mu(t)$, $\boldsymbol{c} =$ vers $O'O$, *for a gyrostat with a fixed point O in a Newtonian field with centre O'.*

* * *