Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 1-22

ANTONIO MAMBRIANI e GIUSEPPE MAMBRIANI (*)

Deralgebra ristretta:

primo passo verso una nuova « analisi funzionale »; I. (**).

Introduzione.

SALVATORE PINCHERLE nella pagina VII della sua prefazione a l'Opera [1], dopo avere espresso qualche titubanza per il giudizio dei matematici su tale opera, così concludeva: « ... la via seguita appare naturalmente insita nelle questioni che le hanno dato origine, e, forse, percorsa da chi sia dotato di maggior lena, potrà condurre a meta feconda. » ([1])

Tale *meta feconda* auspicata dal PINCHERLE, a la fine delle sue precedenti parole, ci sospinse ad una indagine durata alcuni anni. Questa indagine ci ha fatto concludere che *esiste proprio una « meta feconda »*, e a la parte iniziale di essa abbiamo dato il nome di **deralgebra generale** ([2]).

La *deralgebra* è estremamente vasta: le sue *deralgebre particolari* formano una successione doppia (o a due indici), il cui primo elemento è proprio l'argomento di questo lavoro, cioè la *deralgebra ristretta*. Rimandiamo quindi ad altri lavori la considerazione delle altre infinite deralgebre particolari, per le quali servirà da modello la deralgebra ristretta.

(*) Indirizzi: A. MAMBRIANI, Istituto di Matematica, Università di Parma, 43100 Parma, Italia. G. MAMBRIANI, Istituto di Fisica, Università di Parma, 43100 Parma, Italia.

(**) Questo lavoro, già pronto parzialmente fin dal 1974, per desiderio degli Autori inizia la sua pubblicazione nel 1978 e sarà continuata per alcune annate successive (Redazione di « Riv. Mat. Univ. Parma »).

([1]) Per la conoscenza delle molte opere del PINCHERLE, consultare: Salvatore PINCHERLE, *Opere scelte*, a cura della « Unione Matematica Italiana ». Vol. I, pp. VI+397; Vol. II, pp. 493. Edizione Cremonese, Roma 1954.

([2]) Il prefisso *der*, dato al vocabolo *algebra* per ottenere *deralgebra*, ricorda l'intervento in questa *deralgebra* delle derivazioni (sia quella cosiddetta ordinaria, sia quelle dette parziali).

La via indicata da PINCHERLE sottolineando (cfr. [**1**], fine di pagina IV della prefazione) «la importanza del simbolo di derivazione come elemento fondamentale del calcolo funzionale», sollevò un interrogativo di fondo, e cioè: la sola derivazione permette di uscire dal calcolo infinitesimale e di entrare nel calcolo funzionale? A questo interrogativo ci sembra abbia risposto negativamente VITO VOLTERRA (cfr. [**2**], fine di pagina 5).

Noi riteniamo che il vero filo conduttore al calcolo funzionale si ottenga introducendo per le funzioni la nuova operazione da noi chiamata **dermoltiplicazione** [cfr. $(3)_3$], la quale sta proprio a base della nominata «deralgebra ristretta», oggetto di questo primo lavoro e di altri successivi.

1. - Enti primari di algebra A_1. Enti primari di deralgebra $A_{1,1}$.

1.1. – Indichiamo con N l'insieme di tutti i numeri (finiti) sia reali che complessi, e diciamo t l'elemento generico di N (o di un insieme parziale N^* di N): allora, si dirà pure che la t è *la variabile indipendente* in N (o in N^*).

Consideriamo, poi, le cosiddette algebre particolari (in numero infinito)

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots,$$

dove la lettera A ricorda il vocabolo Algebra e i successivi indici 1, 2, 3, ... hanno un significato ben preciso:

la *algebra* A_1, o brevemente A_1, considera *una* sola variabile indipendente t; la A_2 considera *due* sole variabili indipendenti t_1, t_2; la A_3 considera *tre* sole variabili indipendenti t_1, t_2, t_3; ecc. ecc..

La A_1 risulta quindi *l'algebra particolare più semplice*, e il suo sviluppo serve da modello per gli sviluppi di A_2, A_3, ...

Osserviamo ora, relativamente a la A_1, che se, oltre a considerare l'insieme numerico N (o N^*) e la sola variabile indipendente t (variabile in N o in N^*), prendiamo in considerazione le tre operazioni (dirette) *addizione, moltiplicazione, elevazione a potenza, risulta possibile sviluppare varie parti importanti di questa algebra* A_1 (cfr. n. **2**). Allora, abbiamo espresso tale possibilità dicendo:

Gli **enti primari** *di algebra* A_1 sono:

$(1)_1$
- *l'insieme N di numeri* (od anche un insieme parziale N^*),
- *la* sola *variabile indipendente* t (variabile in N o in N^*),
- le *tre* operazioni (dirette) *addizione, moltiplicazione, elevazione a potenza.*

1.2. – Parallelamente ad A_1, riusciremo ora ad individuare, gradualmente, gli « enti primari » della nominata « deralgebra ristretta » che è la più semplice delle ∞^2 deralgebre particolari accennate nella Introduzione.

Anzitutto, diciamo che, in parallelismo a la denominazione *algebra* A_1, o brevemente A_1, sostituiremo il nome « deralgebra ristretta » con quello di

deralgebra $A_{1,1}$, o brevemente $A_{1,1}$,

dove: 1) il prefisso *der* in « deralgebra » ricorda qui la presenza del *derivatore* (ordinario) D $(= D^1)$ di ordine 1 e delle sue iterate D^2, D^3, ... [cfr. Introduzione, annotazione (2)]; 2) in $A_{1,1}$ il primo indice 1 ricorda che le funzioni di $A_{1,1}$ dipendono da *una* sola variabile indipendente (che diremo t), il secondo indice 1 ricorda che in $A_{1,1}$ si considera *una* sola *funzione variabile indipendente* [che diremo $x = x(t)$].

In analogia con il simbolo $\boldsymbol{N}$ di algebra A_1, nella *deralgebra* $A_{1,1}$ introdurremo il simbolo $\boldsymbol{F}_1$, indicante l'insieme di tutte, e sole, le funzioni $\lambda = \lambda(t)$ (finite e univoche), sia reali che complesse, della sola variabile indipendente t.

I primi passi compiuti da $A_{1,1}$ (cfr. il seguente n. **3**) ci hanno condotti a considerare per le funzioni di $A_{1,1}$ oltre a le *tre* operazioni (dirette) *addizione*, *moltiplicazione* ed *elevazione a potenza*, altre *tre* operazioni (dirette): la *derivazione* (ordinaria) e (cfr. il seguente n. **4**) le nuove operazioni **dermoltiplicazione** ed **elevazione a derpotenza.**

Dopo ciò, ci siamo accorti che *risulta possibile sviluppare varie parti importanti di questa deralgebra* $A_{1,1}$, come indicheremo in questo stesso lavoro e in altri lavori seguenti. Allora (in parallelismo a quanto affermato alla fine del n. **1.1** per algebra A_1), abbiamo espresso tale possibilità dicendo:

Gli **enti primari** *di deralgebra* $A_{1,1}$ sono:

l'insieme $\boldsymbol{F}_1$ *di funzioni* (od anche un insieme parziale $\boldsymbol{F}_1^*$),

la sola *funzione variabile indipendente* $x = x(t)$ (variabile in $\boldsymbol{F}_1$ o in $\boldsymbol{F}_1^*$),

le *sei* operazioni (dirette) *addizione*, *moltiplicazione*, *elevazione a potenza*, *derivazione* (ordinaria), *dermoltiplicazione* ed *elevazione a derpotenza.*

2. - Alcuni richiami di algebra A_1, dai quali partire per dedurre la deralgebra $A_{1,1}$.

2.1. – Nella comune algebra A_1 (cfr. n. **1.1**) si introducono molto opportunamente le successioni del tipo

$$t + a_1\,,\quad t + a_2\,,\quad t + a_3\,,\quad \dots, \tag{2)$_0$}$$

formate da infiniti binomi che sono tutti di primo grado nella variabile indipendente t e hanno tutti 1 per coefficiente di t; inoltre $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sono prefissati numeri dell'insieme $\boldsymbol{N}$.

Fissata una successione $(2)_0$, si eseguono gli infiniti prodotti seguenti:

$$(2)_1 \quad (t+a_2)(t+a_1)\,, \quad (t+a_3)(t+a_2)(t+a_1)\,, \quad (t+a_4)(t+a_3)(t+a_2)(t+a_1)\,, \quad \ldots,$$

dove abbiamo ordinato i fattori in modo inverso a quello abituale, soltanto per agevolare il confronto con i prodotti che saranno considerati più avanti per A_{11}. Sviluppando tali prodotti $(2)_1$, si ottengono le identità algebriche seguenti (*):

$$(2)_2 \quad (t+a_2)(t+a_1) = t^2 + (a_2+a_1)t + a_2a_1\,,$$

$$(2)_3 \quad (t+a_3)(t+a_2)(t+a_1) = (t+a_3)[t^2+(a_2+a_1)t+a_2a_1]$$
$$= t^3 + (a_3+a_2+a_1)t^2 + (a_3a_2+a_3a_1+a_2a_1)t + a_3a_2a_1\,,$$

$$(2)_4 \quad (t+a_4)(t+a_3)(t+a_2)(t+a_1) =$$
$$= (t+a_4)[t^3+(a_3+a_2+a_1)t^2+(a_3a_2+a_3a_1+a_2a_1)t+a_3a_2a_1]$$
$$= t^4 + (a_4+a_3+a_2+a_1)t^3 + (a_4a_3+a_4\,a_2+a_4a_1+a_3a_2+a_3a_1+a_2a_1)t^2 +$$
$$+ (a_4a_3a_2+a_4a_3a_1+a_4a_2a_1+a_3a_2a_1)t + a_4a_3a_2a_1\,.$$

Applicando il procedimento induttivo, si conclude in generale che si ha:

$$(2)_n \quad (t+a_n)(t+a_{n-1})\ldots(t+a_2)(t+a_1) = t^n + p_1t^{n-1} + p_2t^{n-2} + \ldots + p_{n-2}t^2 + p_{n-1}t + p_n,$$

dove è:

$$\left[\begin{array}{l} p_1 \;= a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1\,, \\ p_2 \;= (a_na_{n-1} + a_na_{n-2} + \ldots + a_na_1) + \\ \qquad + (a_{n-1}a_{n-2} + a_{n-1}a_{n-3} + \ldots + a_{n-1}a_1) + \ldots + (a_3a_2+a_3a_1) + a_2a_1\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{n-2} = (a_na_{n-1}\ldots a_4a_3 + a_na_{n-1}\ldots a_4a_2 + a_na_{n-1}\ldots a_4a_1) + \\ \qquad\qquad + (a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_3a_2 + a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_3a_1) + \ldots + a_{n-2}a_{n-3}\ldots a_2a_1\,, \\ p_{n-1} = (a_na_{n-1}\ldots a_3a_2 + a_na_{n-1}\ldots a_3a_1) + a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2a_1\,, \\ p_n \;= a_na_{n-1}\ldots a_2a_1\,. \end{array}\right.$$

La somma a secondo membro di $(2)_n$ si chiama una *funzione razionale intera* della variabile t, le costanti $p_0 = 1$, $p_1, p_2, \ldots, p_{n-2}, p_{n-1}, p_n$ si dicono i *coefficienti* di tale funzione. Il fatto che sia $p_0 \neq 0$ si esprime dicendo che la detta «funzione razionale intera» è *di grado n*.

2.2. – Consideriamo, ora, il caso particolare importante in cui nelle precedenti affermazioni algebriche sia

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a\,,$$

(*) Negli sviluppi seguenti del testo usiamo il segno $=$ (di eguaglianza) invece del segno più preciso $\equiv$ (di identità), perchè quest'ultimo segno, dovendo essere ripetuto parecchie volte, risulta alquanto scomodo.

con a determinato numero (non nullo). In tale caso i prodotti precedenti del tipo

$$a_1 a_2\,, \quad a_1 a_2 a_3\,, \quad a_1 a_2 a_3 a_4\,, \quad \ldots, \quad a_1 a_2 \ldots a_n\,, \quad \ldots$$

diventano, rispettivamente, le seguenti potenze di a:

$$a^2\,, \quad a^3\,, \quad a^4\,, \quad \ldots, \quad a^n\,, \ldots .$$

Analogamente, i prodotti $(2)_1$ diventano rispettivamente le potenze di $t+a$:

$$(t+a)^2\,, \quad (t+a)^3\,, \quad (t+a)^4\,, \quad \ldots, \quad (t+a)^n\,, \quad \ldots .$$

L'operazione corrispondente a la formazione di tutte queste potenze, si chiama *elevazione a potenza*.

2.3. – Negli sviluppi della *deralgebra* $A_{1,1}$ (cfr. il seguente n. **3** e tutti i numeri successivi) oltre ad appoggiarci su l'algebra A_1 approfitteremo anche dei simbolismi della cosiddetta *algebra delle successioni* (cfr. [**3**]). In questa algebra le successioni possono essere formate sia da numeri sia da funzioni. Date due generiche di tali successioni:

$$\{a_n\}:\ a_0\,, a_1\,, a_2\,, \ldots, a_n\,, \ldots; \qquad \{b_n\}:\ b_0\,, b_1\,, b_2\,, \ldots, b_n\,, \ldots,$$

si considerano le due nuove successioni

$$(2)' \qquad a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 \equiv a_n \mathbin{\underset{n}{\cdot}} b_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,,$$

$$(2)'' \qquad \binom{n}{0} a_0 b_n + \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1} a_{n-1} b_1 + \binom{n}{n} a_n b_0 \equiv a_n \mathbin{\overset{n}{\cdot}} b_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,,$$

che sono state chiamate, rispettivamente, il *prodotto isobarico* e il *prodotto binomiale* delle due date successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$. I secondi membri di $(2)'$ e $(2)''$ sono i simbolismi brevi dei primi membri, e si leggono, ordinatamente,

$$a_n \text{ per, isobarico } n,\ b_n\,; \qquad a_n \text{ per, binomiale } n,\ b_n\,.$$

La variabile intera non negativa n $(= 0, 1, 2, \ldots)$ si dice l'*indice* delle corrispondenti operazioni di *moltiplicazione isobarica* e *moltiplicazione binomiale*. Le due precedenti successioni si dicono i *fattori* dei prodotti $(2)'$ e $(2)''$, precisamente $\{a_n\}$ è il *primo fattore*, $\{b_n\}$ è il *secondo fattore*. Si vede subito che *queste due moltiplicazioni godono della proprietà commutativa*. Inoltre vale la seguente semplice proprietà: Si moltiplica un prodotto isobarico, o un prodotto binomiale, per una quantità costante rispetto a l'indice n del prodotto, moltiplicando per tale quantità *uno solo* dei due fattori del prodotto considerato.

Esempi: Essendo a, b, c date costanti, si ha:

$$(2)^{\mathrm{III}} \qquad b^n + a\, b^{n-1} + a^2 b^{n-2} + \ldots + a^{n-1} b + a^n = a^n \mathbin{\underset{n}{\cdot}} b^n\,,$$

$$(2)^{\mathrm{IV}} \qquad (a+b)^n = a^n \mathbin{\overset{n}{\cdot}} b^n\,, \qquad (a+b+c)^n = (a+b)^n \mathbin{\overset{n}{\cdot}} c^n = a^n \mathbin{\overset{n}{\cdot}} b^n \mathbin{\overset{n}{\cdot}} c^n\,.$$

Essendo $u = u(t)$, $v = v(t)$ funzioni derivabili fino a l'ordine n, e indicando con $u^{(n)}$, $v^{(n)}$, $(uv)^{(n)}$ le derivate di ordine n (di u, v. uv) si ha:

$$(2)^{\mathrm{V}} \qquad (uv)^{(n)} = u^{(n)} \mathbin{\overset{n}{\cdot}} v^{(n)} \qquad \text{(formula di Leibniz)}\,.$$

3. - Primi passi per dedurre $\mathrm{A}_{1,1}$ da A_1. I funderivatori primari e il derprodotto di due funzioni.

3.1. – Per dedurre $\mathrm{A}_{1,1}$ da A_1 faremo intervenire la s o s t i t u z i o n e

$$\mathrm{S} = \begin{bmatrix} t, & t^2, & t^3, & \dots; & a_1, & a_2, & a_3, & \dots \\ \\ \mathrm{D}, & \mathrm{D}^2, & \mathrm{D}^3, & \dots; & \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3, & \dots \end{bmatrix},$$

dove nella prima riga compaiono alcuni enti di A_1, mentre nella seconda riga compaiono gli enti da ritenere ordinatamente i corrispondenti di $\mathrm{A}_{1,1}$. Precisamente, la S sostituisce a la variabile indipendente t il *derivatore* (o r d i n a r i o) D ($\equiv \mathrm{D}_t$), sostituisce a le potenze $t^2, t^3, \dots$ ordinatamente le iterate di D date da $\mathrm{D}^2, \mathrm{D}^3, \dots$; infine, sostituisce a gli i n f i n i t i numeri a_1, a_2, $a_3, \dots$ dell'insieme $\boldsymbol{N}$ (cfr. n. **1.1**) ordinatamente le i n f i n i t e funzioni prefissate $\lambda_1 = \lambda_1(t)$, $\lambda_2 = \lambda_2(t)$, $\lambda_3 = \lambda_3(t), \dots$ dell'insieme $\boldsymbol{F}_1$ di funzioni (cfr. n. **1.2**).

3.2. – Applicando a gli infiniti binomi $(2)_0$ di A_1, la sostituzione S del n. **3.1**, si ottengono per $\mathrm{A}_{1,1}$ gli i n f i n i t i binomi seguenti:

$$(3)_0 \qquad \mathrm{D} + \lambda_1, \quad \mathrm{D} + \lambda_2, \quad \mathrm{D} + \lambda_3, \quad \dots,$$

tutti del primo ordine in D. Questi binomi, che sono (con locuzione generica) dei d e r i v a t o r i , sono qui chiamati **funderivatori primari,** dove il prefisso *fun* ricorda la presenza in tali derivatori delle funzioni $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$, e l'attributo *primari* vuole marcare la primaria semplicità di questi derivatori (sono tutti di ordine 1 in D, hanno tutti 1 per coefficienti di D).

Ai prodotti $(2)_1$ di A_1 corrispondono quindi, per $\mathrm{A}_{1,1}$, ordinatamente i seguenti *prodotti di funderivatori primari*:

$$(3)_1 \quad \left[\begin{aligned} &\mathscr{P}_2 \equiv (\mathrm{D} + \lambda_2)\underset{\leftarrow}{}(\mathrm{D} + \lambda_1), \\ &\mathscr{P}_3 \equiv (\mathrm{D} + \lambda_3)\underset{\leftarrow}{}(\mathrm{D} + \lambda_2)\underset{\leftarrow}{}(\mathrm{D} + \lambda_1) = (\mathrm{D} + \lambda_3)\underset{\leftarrow}{}\mathscr{P}_2, \\ &\mathscr{P}_4 \equiv (\mathrm{D} + \lambda_4)\underset{\leftarrow}{}(\mathrm{D} + \lambda_3)\underset{\leftarrow}{}(\mathrm{D} + \lambda_2)\underset{\leftarrow}{}(\mathrm{D} + \lambda_1) = (\mathrm{D} + \lambda_4)\underset{\leftarrow}{}\mathscr{P}_3 = \\ &\qquad\qquad\qquad = (\mathrm{D} + \lambda_4)\underset{\leftarrow}{}(\mathrm{D} + \lambda_3)\underset{\leftarrow}{}\mathscr{P}_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right.$$

In $(3)_1$ le piccole s e m i f r e c c i e (in basso) hanno due uffici: ricordano che i fattori (operatòri) si susseguono d a d e s t r a v e r s o s i n i s t r a , inoltre rendono compatta la scrittura dei prodotti stessi, i cui fattori, in generale, sono non commutabili.

3.3. – Supposto che $\mathscr{P}_2$ abbia senso, per ottenerne lo sviluppo giova fare intervenire una funzione ausiliaria $y = y(t)$ avente (finite) le prime due derivate $y' = y'(t)$, $y'' = y''(t)$ per ogni $t \in \boldsymbol{N}$ o soltanto per ogni $t \in \boldsymbol{N}^*$, essendo $\boldsymbol{N}^*$ un determinato campo di $\boldsymbol{N}$ (cfr. n. **1.1**). Abbiamo:

$$(\mathrm{D} + \lambda_2)(\mathrm{D} + \lambda_1)y = (\mathrm{D} + \lambda_2)[(\mathrm{D} + \lambda_1)y] = (\mathrm{D} + \lambda_2)(y' + \lambda_1 y)$$

$$= (\mathrm{D} + \lambda_2)y' + (\mathrm{D} + \lambda_2)(\lambda_1 y) = (y'' + \lambda_2\, y') + [(\lambda_1 y)' + \lambda_2\lambda_1 y]\,.$$

Vediamo così che *il prodotto $\mathscr{P}_2$ non ha sempre senso*: *affinchè $\mathscr{P}_2$ abbia senso è necessario* (*e sufficiente*) *che λ_1 abbia derivata* (*finita*) λ_1' [il che segue dalla necessità che esista (finita) la derivata $(\lambda_1\, y)'$]. In tale ipotesi si ha pertanto:

$$(\mathrm{D} + \lambda_2)(\mathrm{D} + \lambda_1)y = (y'' + \lambda_2\, y') + (\lambda_1\, y' + \lambda_1' y + \lambda_2\lambda_1 y) =$$

$$= y'' + (\lambda_2 + \lambda_1)y' + (\lambda_1' + \lambda_2\lambda_1)y\,,$$

ossia

$$(\mathrm{D} + \lambda_2)(\mathrm{D} + \lambda_1)y = [\mathrm{D}^2 + (\lambda_2 + \lambda_1)\mathrm{D} + (\lambda_1' + \lambda_2\lambda_1)]y\,,$$

da cui, eliminando la funzione ausiliaria y, si ottiene la seguente *identità deralgebrica* (valida per ogni $t \in \boldsymbol{N}$ o soltanto per ogni $t \in \boldsymbol{N}^*$, essendo $\boldsymbol{N}^*$ un determinato campo di $\boldsymbol{N}$) di $\mathrm{A}_{1,1}$:

$$(3)_2 \qquad (\mathrm{D} + \lambda_2)(\mathrm{D} + \lambda_1) = \mathrm{D}^2 + (\lambda_2 + \lambda_1)\mathrm{D} + (\lambda_1' + \lambda_2\lambda_1) \quad \text{(nell'ipotesi che esista, e sia finita, la derivata } \lambda_1'\text{)},$$

che è la formula di $\mathrm{A}_{1,1}$ corrispondente a la $(2)_2$ di A_1.

Osserviamo ora che, se la sostituzione S del n. **3.1** si fosse applicata subito anche al secondo membro di $(2)_2$, si sarebbe ottenuto

$$(*) \qquad \mathrm{D}^2 + (\lambda_2 + \lambda_1)\mathrm{D} + \lambda_2\lambda_1\,,$$

non esatta nel suo ultimo termine [come dice la $(3)_2$]. Però va notato che in $(*)$ i primi due termini sono esatti, inoltre l'ultimo termine è ancora esatto [come dice il secondo membro di $(3)_2$] se λ_1 e λ_2 sono delle funzioni costanti, ed anche se soltanto λ_1 è una funzione costante. Tali osservazioni ci hanno indotti a pensare che l'ultimo termine del secondo membro di $(3)_2$, cioè $\lambda_1' + \lambda_2\lambda_1$, debba interpretarsi come una nuova operazione su le funzioni, ossia il *prodotto deralgebrico delle due funzioni* λ_1 *e* λ_2, *prima* λ_1 *e poi* λ_2. Precisamente, abbiamo così fissato:

$\lambda_1' + \lambda_2\lambda_1$ si dirà il **derprodotto** *di* λ_1 *per* λ_2 (λ_1 *primo fattore,* λ_2 *secondo fattore*), ed abbiamo posto

$$(3)_3 \qquad \lambda_1' + \lambda_2\lambda_1 = \lambda_2 \neg \lambda_1 ,$$

dove il nuovo segno $\neg$ si dirà il segno dell'operazione di derprodotto, o meglio *il segno della* **dermoltiplicazione.** Per il secondo membro di $(3)_3$ ci sembrano convenienti i due tipi seguenti di letture:

λ_1 *der* λ_2 (leggendo da destra verso sinistra),

λ_2 *red* λ_1 (leggendo da sinistra verso destra).

Se poi λ_1 e λ_2 coincidono con una stessa funzione $\lambda = \lambda(t)$, la $(3)_3$ si scriverà

$$(3)_3' \qquad \lambda' + \lambda^2 = \lambda \neg \lambda = \lambda^{2\rceil} ,$$

dove l'ultimo membro si leggerà λ *a due der*, oppure *derquadrato di* λ.

Osserviamo che si ha:

$$(3)_4 \qquad \lambda_2 \neg \lambda_1 = \lambda_1' + \lambda_2\lambda_1 = \mathrm{D}\lambda_1 + \lambda_2\lambda_1 = (\mathrm{D} + \lambda_2)\,\lambda_1 = (\mathrm{D} + \lambda_2)\underset{\longleftarrow}{(}\mathrm{D} + \lambda_1)1 .$$

Facendo, ora, intervenire il segno di dermoltiplicazione, la precedente **identità deralgebrica** $(3)_2$ si scriverà:

$$(3)_2' \qquad (\mathrm{D} + \lambda_2)\underset{\longleftarrow}{(}\mathrm{D} + \lambda_1) = \mathrm{D}^2 + (\lambda_2 + \lambda_1)\mathrm{D} + \lambda_2 \neg \lambda_1$$

(nell'ipotesi che esista, e sia finita, la derivata λ_1'),

la quale è *in completo parallelismo con la identità algebrica* $(2)_2$ di A_1. Applicando la $(3)_2'$ ad 1 si ottiene

$$(3)_4' \qquad (\mathrm{D} + \lambda_2)\underset{\longleftarrow}{(}\mathrm{D} + \lambda_1)1 = \lambda_2 \neg \lambda_1 ,$$

ciò che conferma la $(3)_4$.

Nel caso particolare in cui λ_1 e λ_2 coincidano con una stessa funzione $\lambda = \lambda(t)$, la $(3)'_2$ diventa, applicando $(3)'_3$,

$$(3)_5 \qquad (\mathrm{D} + \lambda)(\mathrm{D} + \lambda) = \mathrm{D}^2 + 2\lambda\mathrm{D} + \lambda^{\overline{2}|},$$

dove nel primo membro si è soppressa la semifreccia perchè i due funderivatori, essendo eguali, sono c o m m u t a b i l i; onde la $(3)_5$ si può scrivere:

$$(3)'_5 \qquad (\mathrm{D} + \lambda)^2 = \mathrm{D}^2 + 2\lambda\,\mathrm{D} + \lambda^{\overline{2}|} \qquad [\lambda \in \boldsymbol{F}_1^{(1)}].$$

Pertanto, il primo membro di $(3)'_5$ (dove D è il derivatore ordinario) è un quadrato deralgebrico avente lo sviluppo $\mathrm{D}^2 + 2\lambda\,\mathrm{D} + \lambda^{\overline{2}|}$ (e non $\mathrm{D}^2 + 2\lambda\,\mathrm{D} + \lambda^2$).

3.4. – È utile fare su $(3)'_2$ una o s s e r v a z i o n e. Se alla ipotesi che esista (finita) la derivata λ'_1, associamo anche l'ipotesi che esista (finita) la derivata λ'_2, si avrà pure:

$$(\mathrm{D} + \lambda_1)\underset{\leftharpoondown}{(}\mathrm{D} + \lambda_2) = \mathrm{D}^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\mathrm{D} + \lambda_1 \neg \lambda_2 .$$ (nell'ipotesi che esista, e sia finita, la derivata λ'_2),

Sottraendo da questa identità deralgebrica la precedente $(3)'_2$, si ha:

$$(3)_6 \qquad (\mathrm{D} + \lambda_1)\underset{\leftharpoondown}{(}\mathrm{D} + (\lambda_2) - (\mathrm{D} + \lambda_2)\underset{\leftharpoondown}{(}\mathrm{D} + \lambda_1) =$$
$$= \lambda_1 \neg \lambda_2 - \lambda_2 \neg \lambda_1 = \lambda'_2 - \lambda'_1 = (\lambda_2 - \lambda_1)' .$$

Imponendo ora che sia identicamente

$$(3)_7 \qquad (\lambda_2 - \lambda_1)' \equiv 0 , \qquad \text{ossia} \qquad \lambda_2 = \lambda_1 + c$$

con c costante conveniente, si esprime che *i due funderivatori primari* $\mathrm{D} + \lambda_1$ *e* $\mathrm{D} + \lambda_2$ *sono commutabili* e, allora, nel primo membro di $(3)_6$ è meglio sopprimere le semifreccie. Si nota poi che $(3)_7$ e q u i v a l e ad affermare che si ha:

$(3)'_7 \qquad \lambda_2 \neg \lambda_1 \equiv \lambda_1 \neg \lambda_2$, cioè in tale *derprodotto* $\lambda_2 \neg \lambda_1$ *i fattori sono commutabili*.

Se a_1, a_2 sono delle costanti, si ha manifestamente

$$(3)_8 \qquad (\mathrm{D} + a_2)(\mathrm{D} + a_1) = \mathrm{D}^2 + (a_2 + a_1)\mathrm{D} + a_2 a_1 ,$$

dove nel primo membro i fattori sono commutabili perchè $a_2 \neg a_1 = a_2 a_1$. La $(3)_8$ si ottiene dalla $(2)_2$ di A_1 semplicemente cambiando t in D.

4. - Dermoltiplicazione nella deralgebra $\mathrm{A}_{1,1}$.

4.1. – Anzitutto, una premessa. Per le ulteriori necessità di sviluppo della deralgebra $\mathrm{A}_{1,1}$, da l'insieme $\boldsymbol{F}_1$ delle funzioni $\lambda = \lambda(t)$ di $\mathrm{A}_{1,1}$ (cfr. n. **3**) estrarremo infiniti *sottoinsiemi* che indicheremo con i simboli

$$\boldsymbol{F}_1^{(1)},\ \boldsymbol{F}_1^{(2)},\ \ldots,\ \boldsymbol{F}_1^{(n)},\ \ldots,\ \underbrace{\boldsymbol{F}_1^{(+\infty)},\ \boldsymbol{F}_1^{[\mathrm{olom}]},\ \boldsymbol{F}_1^{[\mathrm{cost}]}}.$$

Tali sottoinsiemi sono così definiti:

(4)$_1$

- $\boldsymbol{F}_1^{(1)}$ contiene tutte e sole le funzioni di $\boldsymbol{F}_1$ con *derivate prime* (finite in un campo $\boldsymbol{N}_1$)
- $\boldsymbol{F}_1^{(2)}$ contiene tutte e sole le funzioni di $\boldsymbol{F}_1$ con *derivate seconde* (finite in un campo $\boldsymbol{N}_2$)
- . . . .
- $\boldsymbol{F}_1^{(n)}$ contiene tutte e sole le funzioni di $\boldsymbol{F}_1$ con *derivate n-esime* (finite in un campo $\boldsymbol{N}_n$)
- . . . .
- $\boldsymbol{F}_1^{(+\infty)}$ contiene tutte e sole le funzioni di $\boldsymbol{F}_1$ con *derivate di ogni ordine* (finite in un campo $\boldsymbol{N}_{+\infty}$)
- $\boldsymbol{F}_1^{[\mathrm{olom}]}$ contiene tutte e sole le funzioni di $\boldsymbol{F}_1$ *olomorfe* (in campi convenienti)
- $\boldsymbol{F}_1^{[\mathrm{cost}]}$ contiene tutte e sole le funzioni di $\boldsymbol{F}_1$ *costanti* (in tutto $\boldsymbol{N}$ o in un $\boldsymbol{N}^*$).

Si osserva subito che risulta:

$$\boldsymbol{F}_1 \supset \boldsymbol{F}_1^{(1)} \supset \boldsymbol{F}_1^{(2)} \supset \ldots \supset \boldsymbol{F}_1^{(n)} \supset \ldots \supset \boldsymbol{F}_1^{(+\infty)} \supset \boldsymbol{F}_1^{[\mathrm{olom}]} \supset \boldsymbol{F}_1^{[\mathrm{cost}]}.$$

Allora, scrivendo $\lambda = \lambda(t) \in \boldsymbol{F}_1^{(n)}$ esprimeremo rapidamente che la funzione λ di $\boldsymbol{F}_1$ ha le derivate $\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)}$ univoche e finite in un campo $\boldsymbol{N}_n$. Ancora, scrivendo (cfr. $(3)_2$):

$$(\mathrm{D} + \lambda_2)\underset{\longleftarrow}{}(\mathrm{D} + \lambda_1) = \mathrm{D}^2 + (\lambda_2 + \lambda_1)\mathrm{D} + \lambda_2 \neg \lambda_1 \qquad [\lambda_1 \in \boldsymbol{F}_1^{(1)},\ \ \lambda_2 \in \boldsymbol{F}_1],$$

esprimiamo rapidamente, fra parentesi quadre, le condizioni necessarie e sufficienti per la validità della considerata identità deralgebrica di $A_{1,1}$. E così via.

4.2. – Analizziamo il derprodotto con *due* soli fattori [cfr. la $(3)_3$]. Per semplicità, indichiamo tali fattori con lettere senza indici:

$$\lambda = \lambda(t) \text{ (primo fattore)}, \qquad \mu = \mu(t) \text{ (secondo fattore)}.$$

Si ha:

$$(4)_2 \qquad \mu \neg \lambda = \lambda' + \mu\,\lambda \qquad [\lambda \in \boldsymbol{F}_1^{(1)},\ \ \mu \in \boldsymbol{F}_1].$$

Si constata che *un derprodotto non gode in generale della proprietà commutativa*: abbiamo già visto [cfr. la $(3)_7$ e la $(3)_7'$] che vale tale proprietà se e solo se è $\mu = \lambda + c$ con c costante (conveniente).

Si noti che un derprodotto $(4)_2$ è *identicamente nullo* quando è identicamente nullo il suo primo fattore λ, oppure quando λ è costante e μ è identicamente nulla. Volendo una *condizione necessaria e sufficiente affinchè sia* $\mu \neg \lambda \equiv 0$, basta risolvere rispetto a λ l'equazione differenziale (in λ) $\lambda' + \mu\lambda = 0$, cioè basta che sia (essendo t_0 un valore prefissato):

$$\lambda = \lambda(t_0)\cdot \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \mu(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right].$$

Vale la seguente proprietà (di facile dimostrazione): *Se in un derprodotto* $(4)_2$ *il primo fattore* λ *è una somma* $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ *con* $\lambda_k \in \boldsymbol{F}_1^{(1)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, *si ha*:

$$(4)_3 \qquad \mu \neg (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n) = \mu \neg \lambda_1 + \mu \neg \lambda_2 + \ldots + \mu \neg \lambda_n .$$

(Non vale però, in generale, l'analoga proprietà quando, invece, il secondo fattore μ è una somma di un numero finito di fattori appartenenti a $\boldsymbol{F}_1$.)

4.3. – Come nella algebra A_1 si possono considerare prodotti con un numero (finito) arbitrariamente grande di fattori a_1, a_2, $a_3, \ldots$ (appartenenti all'insieme $\boldsymbol{N}$), così anche nella *deralgebra* $A_{1,1}$ si possono considerare prodotti con un numero (finito) arbitrariamente grande di fattori $\lambda_1 = \lambda_1(t)$, $\lambda_2 = \lambda_2(t)$, $\lambda_3 = \lambda_3(t), \ldots$ (appartenenti a l'insieme $\boldsymbol{F}_1$), purchè si tenga conto delle necessarie condizioni di d e r i v a b i l i t à .

Riprendiamo il caso del derprodotto di due soli fattori, già familiare [cfr. la $(3)_3$], e facciamone una schematizzazione estendibile a tre o più fattori. Si ha

$$\pi_2 \equiv \lambda_2 \neg \lambda_1 = \lambda_1' + \lambda_2\lambda_1 = \mathrm{D}\lambda_1 + \lambda_2\lambda_1 = (\mathrm{D} + \lambda_2)\,\lambda_1,$$

ed essendo $(\mathrm{D} + \lambda_1)1 = \lambda_1$, segue:

$$(4)_4 \qquad \pi_2 \equiv \lambda_2 \urcorner \lambda_1 = (\mathrm{D} + \lambda_2\underset{\leftarrow}{)(}\mathrm{D} + \lambda_1)1 \qquad [\lambda_1 \in \boldsymbol{F}_1^{(1)},\ \lambda_2 \in \boldsymbol{F}_1] .$$

Si ha allora:

$$(4)_5 \qquad \pi_3 \equiv \lambda_3 \urcorner (\lambda_2 \urcorner \lambda_1) = \lambda_3 \urcorner \pi_2 = (\mathrm{D} + \lambda_3)\pi_2 = (\mathrm{D} + \lambda_3\underset{\leftarrow}{)(}\mathrm{D} + \lambda_2\underset{\leftarrow}{)(}\mathrm{D} + \lambda_1)1$$

$$[\lambda_1 \in \boldsymbol{F}_1^{(2)},\ \lambda_2 \in \boldsymbol{F}_1^{(1)},\ \lambda_3 \in \boldsymbol{F}_1] ,$$

$$(4)_6 \qquad \pi_4 \equiv \lambda_4 \urcorner \{\lambda_3 \urcorner (\lambda_2 \urcorner \lambda_1)\} = \lambda_4 \urcorner \pi_3 = (\mathrm{D} + \lambda_4)\pi_3 =$$

$$= (\mathrm{D} + \lambda_4\underset{\leftarrow}{)(}\mathrm{D} + \lambda_3\underset{\leftarrow}{)(}\mathrm{D} + \lambda_2\underset{\leftarrow}{)(}\mathrm{D} + \lambda_1)1 \qquad [\lambda_1 \in \boldsymbol{F}_1^{(3)},\ \lambda_2 \in \boldsymbol{F}_1^{(2)},\ \lambda_3 \in \boldsymbol{F}_1^{(1)},\ \lambda_4 \in \boldsymbol{F}_1] ,$$

. . . .

In tali derprodotti $(4)_5$, $(4)_6$, ..., ossia $\lambda_3 \urcorner (\lambda_2 \urcorner \lambda_1)$, $\lambda_4 \urcorner \{\lambda_3 \urcorner (\lambda_2 \urcorner \lambda_1)\}$, ..., le parentesi necessarie diventano sempre più numerose, il che crea molte incomodità. Decidiamo quindi, nel seguito, l'abolizione di tutte queste parentesi, purchè sia ben fissato che *l'ordine di successione dei fattori* (anche se tali fattori non sono numerati) *sia sempre da destra verso sinistra.* In generale abbiamo dunque:

$$(4)_n \qquad \pi_n \equiv \lambda_n \urcorner \lambda_{n-1} \urcorner \ldots \urcorner \lambda_3 \urcorner \lambda_2 \urcorner \lambda_1 =$$

$$= (\mathrm{D} + \lambda_n\underset{\leftarrow}{)(}\mathrm{D} + \lambda_{n-1}\underset{\leftarrow}{)} \ldots \underset{\leftarrow}{(}\mathrm{D} + \lambda_3\underset{\leftarrow}{)(}\mathrm{D} + \lambda_2\underset{\leftarrow}{)(}\mathrm{D} + \lambda_1)1$$

$$[\lambda_1 \in \boldsymbol{F}_1^{(n-1)},\ \lambda_2 \in \boldsymbol{F}_1^{(n-2)},\ \ldots,\ \lambda_{n-1} \in \boldsymbol{F}_1^{(1)},\ \lambda_n \in \boldsymbol{F}_1] .$$

5. - « Elevazione a derpotenza » nella deralgebra $\mathrm{A}_{1,1}$.

5.1. – Consideriamo il caso particolare in cui nelle precedenti *relazioni deralgebriche* sia

$$(5)_1 \qquad \lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv \lambda_3 \equiv \ldots \equiv \lambda_n \equiv \ldots \equiv \lambda$$

con λ determinata funzione (*non identicamente nulla*). In tale caso i derprodotti precedenti

$$\lambda_2 \urcorner \lambda_1, \quad \lambda_3 \urcorner \lambda_2 \urcorner \lambda_1, \quad \lambda_4 \urcorner \lambda_3 \urcorner \lambda_2 \urcorner \lambda_1, \quad \ldots, \quad \lambda_n \urcorner \lambda_{n-1} \urcorner \ldots \urcorner \lambda_3 \urcorner \lambda_2 \urcorner \lambda_1, \quad \ldots$$

diventano, rispettivamente, le seguenti *derpotenze* di λ:

$$(5)_2 \qquad \lambda^{\overline{2|}}, \quad \lambda^{\overline{3|}}, \quad \lambda^{\overline{4|}}, \quad \ldots, \quad \lambda^{\overline{n|}}, \quad \ldots$$

(di e s p o n e n t i $2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$) da leggersi, ordinatamente,

λ a due der, λ a tre der, λ a quattro der, ..., λ a enne der, ...

Alle $(5)_2$ sono da associare (rimanendo l'ipotesi che λ non sia identicamente nulla) le due c o n v e n z i o n i seguenti:

$$\lambda^{\overline{0|}} = 1, \qquad \lambda^{\overline{1|}} = \lambda.$$

Valendo la $(5)_1$, da la precedente $(4)_n$ si ricava subito:

$$(5)_3 \qquad \lambda^{\overline{n|}} = (\mathrm{D} + \lambda)^n 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

5.2. – Supposto che $\lambda = \lambda(t)$ sia i n t e g r a b i l e e $y = y(t)$ sia d e r i v a b i l e, abbiamo:

$$\mathrm{D}(e^{\int\lambda\,\mathrm{d}t} y) = e^{\int\lambda\,\mathrm{d}t} y' + e^{\int\lambda\,\mathrm{d}t} \lambda\, y = e^{\int\lambda\,\mathrm{d}t}(y' + \lambda\, y) = e^{\int\lambda\,\mathrm{d}t}(\mathrm{D} + \lambda) y,$$

onde da l'eguaglianza fra ultimo e primo membro segue:

$$(\mathrm{D} + \lambda) y = e^{-\int\lambda\,\mathrm{d}t} \mathrm{D}(e^{\int\lambda\,\mathrm{d}t} y),$$

oppure, sostituendo le parentesi rotonde del secondo membro con una semifreccia,

$$(\mathrm{D} + \lambda) y = e^{-\int\lambda\,\mathrm{d}t} \underset{\leftharpoondown}{\mathrm{D}} e^{\int\lambda\,\mathrm{d}t} y,$$

e, infine, eliminando y in ambo i membri,

$$(5)_4 \qquad \mathrm{D} + \lambda = e^{-\int\lambda\,\mathrm{d}t} \underset{\leftharpoondown}{\mathrm{D}} e^{\int\lambda\,\mathrm{d}t},$$

formula che dà *una utile fattorizzazione di un funderivatore primario* $\mathrm{D} + \lambda$ [cfr. le $(3)_0$].

Osservando che è

$$e^{-\int\lambda\,\mathrm{d}t} \underset{\leftharpoondown}{\mathrm{D}} e^{\int\lambda\,\mathrm{d}t} e^{-\int\lambda\,\mathrm{d}t} \underset{\leftharpoondown}{\mathrm{D}} e^{\int\lambda\,\mathrm{d}t} = e^{-\int\lambda\,\mathrm{d}t} \underset{\leftharpoondown}{\mathrm{D}}(e^{\int\lambda\,\mathrm{d}t} e^{-\int\lambda\,\mathrm{d}t}) \underset{\leftharpoondown}{\mathrm{D}} e^{\int\lambda\,\mathrm{d}t},$$

si ottiene (a semplificazione fatta)

$$(\mathrm{D}+\lambda)^2 = e^{-\int\lambda\,dt}\underleftarrow{\mathrm{D}^2} e^{\int\lambda\,dt} \qquad [\lambda \in \boldsymbol{F}_1^{(1)}],$$

e in generale si conclude:

$$(5)_4' \qquad (\mathrm{D}+\lambda)^n = e^{-\int\lambda\,dt}\underleftarrow{\mathrm{D}^n} e^{\int\lambda\,dt} \qquad [\lambda \in \boldsymbol{F}_1^{(n-1)}].$$

Se ambo i membri di $(5)_4'$ si applicano ad 1, abbiamo

$$(\mathrm{D}+\lambda)^n 1 = e^{-\int\lambda\,dt} D^n e^{\int\lambda\,dt},$$

ossia, per la $(5)_3$,

$$(5)_5 \qquad \lambda^{\overline{n|}} = e^{-\int\lambda\,dt}\mathrm{D}^n e^{\int\lambda\,dt} \qquad [\lambda \in \boldsymbol{F}_1^{(n-1)}].$$

Se ambo i membri di $(5)_4'$ si applicano ad una funzione ausiliaria $y = y(t) \in \boldsymbol{F}_1^{(n)}$, abbiamo:

$$(\mathrm{D}+\lambda)^n y = e^{-\int\lambda\,dt}\mathrm{D}^n(e^{\int\lambda\,dt}y) = e^{-\int\lambda\,dt}(e^{\int\lambda\,dt}y)^{(n)},$$

da cui, per la formula $(2)^{\mathrm{v}}$,

$$(\mathrm{D}+\lambda)^n y = e^{-\int\lambda\,dt}[(e^{\int\lambda\,dt})^{(n)} \overset{n}{:} y^{(n)}]$$

e, in virtù di $(5)_5$,

$$(\mathrm{D}+\lambda)^n y = e^{-\int\lambda\,dt}(e^{\int\lambda\,dt}\lambda^{\overline{n|}} \overset{n}{:} y^{(n)}).$$

Qui, tenendo presente una semplice proprietà del prodotto binomiale (cfr. la fine del n. **2.3**, prima degli Esempi), risulta:

$$(\mathrm{D}+\lambda)^n y = \lambda^{\overline{n|}} \overset{n}{:} y^{(n)} = \lambda^{\overline{n|}} \overset{n}{:} \mathrm{D}^n y = (\lambda^{\overline{n|}} \overset{n}{:} \mathrm{D}^n)y,$$

ossia, eliminando la y fra primo e ultimo membro, si ottiene la formula

$$(5)_6 \qquad (\mathrm{D}+\lambda)^n = \lambda^{\overline{n|}} \overset{n}{:} \mathrm{D}^n = \sum_0^n{}_k \binom{n}{k} \lambda^{\overline{k|}}\mathrm{D}^{n-k} \qquad [\lambda \in \boldsymbol{F}_1^{(n-1)}].$$

5.3. – Osserviamo che se, come n, anche ν è un generico intero non negativo, si ha:

$$(5)_7 \qquad (\mathrm{D}+\lambda)^n\,(\mathrm{D}+\lambda)^\nu = (\mathrm{D}+\lambda)^{n+\nu} \qquad [\lambda \in \boldsymbol{F}_1^{(n+\nu-1)}],$$

$$(5)_8 \qquad [(\mathrm{D}+\lambda)^n]^\nu = (\mathrm{D}+\lambda)^{n\nu} \qquad [\lambda \in \boldsymbol{F}_1^{(n+\nu-1)}],$$

cioè per le potenze (con esponente intero non negativo) di un funderivatore primario $\mathrm{D}+\lambda$ valgono le stesse proprietà delle potenze dell'algebra. Considerata una seconda funzione $\mu=\mu(t)$, del tipo di λ, si constata che gli operatori

$$[(\mathrm{D}+\underset{\longleftarrow}{\mu})(\mathrm{D}+\lambda)]^n, \qquad (\mathrm{D}+\underset{\longleftarrow}{\mu})^n\,(\mathrm{D}+\lambda)^n$$

sono eguali se e solo se $\mathrm{D}+\lambda$ e $\mathrm{D}+\mu$ sono c o m m u t a b i l i .

Da $(5)_3$ segue

$$\lambda^{\overline{n+1}|} = (\mathrm{D}+\lambda)^{n+1}1\,,$$

da cui, applicando la $(5)_7$,

$$\lambda^{\overline{n+1}|} = (\mathrm{D}+\lambda)^n\,(\mathrm{D}+\lambda)1 = (\mathrm{D}+\lambda)^n\lambda\,.$$

Applicando la $(5)_6$, segue allora:

$$\lambda^{\overline{n+1}|} = (\lambda^{\overline{n}|} \overset{n}{\cdot} \mathrm{D}^n)\,\lambda = \lambda^{\overline{n}|} \overset{n}{\cdot} \mathrm{D}^n\lambda\,,$$

ossia, ponendo $\mathrm{D}^n\lambda = \lambda^{(n)}$,

$$(5)_9 \qquad \lambda^{\overline{n+1}|} = \lambda^{\overline{n}|} \overset{n}{\cdot} \lambda^{(n)}\,,$$

od estesamente [cfr. la $(2)''$]:

$$(5)_9' \qquad \lambda^{\overline{n+1}|} = \sum_0^n{}_k \binom{n}{k} \lambda^{\overline{k}|}\,\lambda^{(n-k)} \qquad [\lambda \in \boldsymbol{F}_1^{(n)};\ \ n=0,1,2,\ldots]\,.$$

5.4. – Essendo $\lambda=\lambda(t)$, $\mu=\mu(t)$ funzioni di $\boldsymbol{F}_1^{(n-1)}$, da $(5)_5$ segue:

$$(\lambda+\mu)^{\overline{n}|} = e^{-\int(\lambda+\mu)\,dt}\mathrm{D}^n e^{\int(\lambda+\mu)\,dt} = e^{-\int(\lambda+\mu)\,dt}\mathrm{D}^n(e^{\int\lambda\,dt}e^{\int\mu\,dt})\,,$$

ed applicando la formula $(2)^{\mathrm{v}}$ di Leibniz si ottiene:

$$(\lambda+\mu)^{\overline{n}|} = e^{-\int(\lambda+\mu)\,dt}\,[(e^{\int\lambda\,dt})^{(n)} \overset{n}{\cdot} (e^{\int\mu\,dt})^{(n)}]\,;$$

ma per la stessa $(5)_5$ risulta

$$(e^{\int\lambda\,dt})^{(n)} = e^{\int\lambda\,dt}\lambda^{\overline{n}|}\,, \qquad (e^{\int\mu\,dt})^{(n)} = e^{\int\mu\,dt}\mu^{\overline{n}|}\,,$$

onde si ottiene

$$(\lambda + \mu)^{\overline{n}|} = e^{-\int(\lambda+\mu)\,dt}\,(e^{\int\lambda\,dt}\,\lambda^{\overline{n}|} \overset{n}{:} e^{\int\mu\,dt}\,\mu^{\overline{n}|})\,,$$

ossia, riducendo [cfr. n. **2.3** verso la fine, prima degli Esempi, la proprietà semplice della moltiplicazione binomiale],

$$(5)_{10} \qquad (\lambda + \mu)^{\overline{n}|} = \lambda^{\overline{n}|} \overset{n}{:} \mu^{\overline{n}|} = \sum_{0}^{n}{}_{k} \binom{n}{k} \lambda^{\overline{n-k}|}\,\mu^{\overline{k}|}$$

che si dirà la *formula per la derpotenza di un binomio* $\lambda + \mu$. Ne segue, considerando una terza funzione $\gamma = \gamma(t) \in F_1^{(n-1)}$,

$$(\lambda + \mu + \gamma)^{\overline{n}|} = (\lambda + \mu)^{\overline{n}|} \overset{n}{:} \gamma^{\overline{n}|}\,,$$

onde:

$$(5)_{11} \qquad (\lambda + \mu + \gamma)^{\overline{n}|} = \lambda^{\overline{n}|} \overset{n}{:} \mu^{\overline{n}|} \overset{n}{:} \gamma^{\overline{n}|}\,.$$

5.5. – Indicando, ora, con $\lambda = \lambda(t)$ una funzione che, nel suo campo di definizione, non sia identicamente nulla e abbia tutte le derivate che necessita considerare, indicheremo *le espressioni delle sue prime* derpotenze. Per lo studio di queste espressioni è opportuno fissare opportunamente l'ordine dei loro termini, che diventono rapidamente molto numerosi. Considerando, ad esempio, la derpotenza $\lambda^{\overline{5}|}$, l'ordine da noi stabilito è il seguente: prima la comune potenza λ^5, poi *i termini di grado* 1 nelle derivate λ', λ'', λ''', $\lambda^{(4)}$, infine *i termini di grado* >1 nel complesso di dette derivate.

Espressioni delle prime derpotenze di $\lambda = \lambda(t)$.

Termini di primo grado in λ', λ'', λ''', ...

Termini di grado >1 nel complesso delle derivate λ', λ'', λ''', ...

$$\lambda^{\overline{0}|} = 1,$$

$$\lambda^{\overline{1}|} = \lambda,$$

$$\lambda^{\overline{2}|} = \lambda^2 + \binom{2}{2}\lambda',$$

$$\lambda^{\overline{3}|} = \lambda^3 + \binom{3}{2}\lambda\lambda' + \binom{3}{3}\lambda'',$$

$$\lambda^{\overline{4}|} = \lambda^4 + \binom{4}{2}\lambda^2\lambda' + \binom{4}{3}\lambda\lambda'' + \binom{4}{4}\lambda''' + 3\lambda'^2,$$

$$\lambda^{\overline{5}|} = \lambda^5 + \binom{5}{2}\lambda^3\lambda' + \binom{5}{3}\lambda^2\lambda'' + \binom{5}{4}\lambda\lambda''' + \binom{5}{5}\lambda^{(4)} + 15\lambda\lambda'^2 + 10\lambda'\lambda'',$$

$$\lambda^{\overline{6}|} = \lambda^6 + \binom{6}{2}\lambda^4\lambda' + \binom{6}{3}\lambda^3\lambda'' + \binom{6}{4}\lambda^2\lambda''' + \binom{6}{5}\lambda\lambda^{(4)} + \binom{6}{6}\lambda^{(5)} + 45\lambda^2\lambda'^2 + 60\lambda\lambda'\lambda'' + 15\lambda'^3 + 15\lambda'\lambda''' + 10\lambda''^2,$$

$$\lambda^{\overline{7}|} = \lambda^7 + \binom{7}{2}\lambda^5\lambda' + \binom{7}{3}\lambda^4\lambda'' + \binom{7}{4}\lambda^3\lambda''' + \binom{7}{5}\lambda^2\lambda^{(4)} + \binom{7}{6}\lambda\lambda^{(5)} + \binom{7}{7}\lambda^{(6)} + 105\lambda^3\lambda'^2 + 210\lambda^2\lambda'\lambda'' + 105\lambda\lambda'^3 + 105\lambda\lambda'\lambda''' + 70\lambda\lambda''^2 +$$
$$+ 105\lambda'^2\lambda'' + 26\lambda'\lambda^{(4)} + 40\lambda''\lambda'''.$$

6. - Prodotti di funderivatori primari.

6.1. – Anzitutto, una premessa. Considerate le funzioni $\mu=\mu(t)$, $\lambda=\lambda(t)$, $y=y(t)$, con λ e y derivabili, si ha

$$(\mathrm{D}+\mu)(\lambda y)=\mathrm{D}(\lambda y)+\mu\lambda y=\lambda y'+\lambda' y+\mu\lambda y=[\lambda\mathrm{D}+(\lambda'+\mu\lambda)]y\,,$$

cioè, sopprimendo i passaggi intermedi,

$$(\mathrm{D}+\mu)(\lambda y)=[\lambda\mathrm{D}+(\lambda'+\mu\lambda)]y\,,$$

od anche, introducendo nel primo membro una semifreccia orientata [conformemente a quanto si è fatto per ottenere la $(5)_4$], abbiamo:

$$(\mathrm{D}+\underleftarrow{\mu)}\,\lambda y=[\lambda\mathrm{D}+(\lambda'+\mu\lambda)]y\,.$$

Infine, sopprimendo la y in ambo i membri e notando che è $\lambda'+\mu\lambda=\mu\neg\lambda$, otteniamo:

$$(6)_1 \qquad (\mathrm{D}+\underleftarrow{\mu)}\,\lambda=\lambda\,\mathrm{D}+(\lambda'+\mu\lambda)=\lambda\,\mathrm{D}+\mu\neg\lambda\,.$$

6.2. – Riprendiamo ora i prodotti di funderivatori primari della deralgebra $\mathrm{A}_{1,1}$, indicati in $(3)_1$. Abbiamo già fatto il primo passo occupandoci del primo di questi prodotti, cioè di $\mathscr{P}_2$, ed abbiamo visto che vale la seguente identità deralgebrica [cfr. la $(3)'_2$]:

$$(6)_2 \qquad \mathscr{P}_2\equiv(\mathrm{D}+\underleftarrow{\lambda_2)}(\mathrm{D}+\lambda_1)=\mathrm{D}^2+(\lambda_2+\lambda_1)\mathrm{D}+\lambda_2\neg\lambda_1 \quad [\lambda_1\in \boldsymbol{F}_1^{(1)},\ \lambda_2\in\boldsymbol{F}_1]\,.$$

Questa $(6)_2$ è in completo parallelismo con l'identità algebrica di A_1 [cfr. $(2)_2$]

$$(t+a_2)(t+a_1)=t^2+(a_2+a_1)t+a_2a_1\,.$$

Inoltre, abbiamo considerato anche il caso particolare in cui sia $\lambda_1\equiv\lambda_2\equiv\lambda$, e si è trovato [cfr. $(3)'_5$] che si ha

$$(6)'_2 \qquad (\mathrm{D}+\lambda)^2=\mathrm{D}^2+2\lambda\,\mathrm{D}+\lambda^{2\neg} \quad [\lambda\in\boldsymbol{F}_1^{(1)}]\,,$$

in completo parallelismo con l'identità algebrica di A_1 :

$$(t+a)^2=t^2+2at+a^2\,.$$

6.3. – Restano da considerare gli altri infiniti prodotti di funderivatori primari: $\mathscr{P}_3, \mathscr{P}_4, \ldots$. Se anche per il calcolo di questi prodotti si fa intervenire una funzione ausiliaria $y = y(t)$, come si è fatto al n. **3.3** per il calcolo di $\mathscr{P}_2$ [ed allora, per $\mathscr{P}_3$ dovrà aversi $y \in \boldsymbol{F}_1^{(3)}$, per $\mathscr{P}_4$ dovrà aversi $y \in \boldsymbol{F}_1^{(4)}$, ecc.], si trova:

$$(6)_3 \quad \begin{cases} \mathscr{P}_3 \equiv (\mathrm{D}+\lambda_3)\underset{\longleftarrow}{}(\mathrm{D}+\lambda_2)\underset{\longleftarrow}{}(\mathrm{D}+\lambda_1) = \\ = \mathrm{D}^3 + (\lambda_3+\lambda_2+\lambda_1)\mathrm{D}^2 + (\lambda_3\urcorner\lambda_2 + \lambda_3\urcorner\lambda_1 + \lambda_2\urcorner\lambda_1)\mathrm{D} + \lambda_3\urcorner\lambda_2\urcorner\lambda_1 \\ \qquad [\lambda_1 \in \boldsymbol{F}_1^{(2)},\ \ \lambda_2 \in \boldsymbol{F}_1^{(1)},\ \ \lambda_3 \in \boldsymbol{F}_1], \end{cases}$$

la quale è in completo parallelismo con l'identità algebrica di A_1 [cfr. la $(2)_3$]

$$(t+a_3)(t+a_2)(t+a_1) = t^3 + (a_3+a_2+a_1)t^2 + (a_3a_2+a_3a_1+a_2a_1)t + a_3a_2a_1 .$$

Inoltre, abbiamo già considerato il caso particolare in cui sia $\lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv \lambda_3 \equiv \lambda$, e si è trovato [cfr. la $(5)_6$ per $n = 3$]:

$$(6)_3' \qquad (\mathrm{D}+\lambda)^3 = \mathrm{D}^3 + 3\lambda\,\mathrm{D}^2 + 3\lambda^{\overline{2|}}\,\mathrm{D} + \lambda^{\overline{3|}} \qquad [\lambda \in \boldsymbol{F}_1^{(2)}],$$

in completo parallelismo con l'identità algebrica

$$(t+a)^3 = t^3 + 3at^2 + 3a^2t + a^3 .$$

Si ha poi:

$$(6)_4 \quad \begin{cases} \mathscr{P}_4 \equiv (\mathrm{D}+\lambda_4)\underset{\longleftarrow}{}(\mathrm{D}+\lambda_3)\underset{\longleftarrow}{}(\mathrm{D}+\lambda_2)\underset{\longleftarrow}{}(\mathrm{D}+\lambda_1) = \\ \quad = \mathrm{D}^4 + (\lambda_4+\lambda_3+\lambda_2+\lambda_1)\mathrm{D}^3 + \\ \quad + (\lambda_4\urcorner\lambda_3 + \lambda_4\urcorner\lambda_2 + \lambda_4\urcorner\lambda_1 + \lambda_3\urcorner\lambda_2 + \lambda_3\urcorner\lambda_1 + \lambda_2\urcorner\lambda_1)\mathrm{D}^2 + \\ \quad + (\lambda_4\urcorner\lambda_3\urcorner\lambda_2 + \lambda_4\urcorner\lambda_3\urcorner\lambda_1 + \lambda_4\urcorner\lambda_2\urcorner\lambda_1 + \lambda_3\urcorner\lambda_2\urcorner\lambda_1)\mathrm{D} + \lambda_4\urcorner\lambda_3\urcorner\lambda_2\urcorner\lambda_1 \\ \qquad [\lambda_1 \in \boldsymbol{F}_1^{(3)},\ \ \lambda_2 \in \boldsymbol{F}_1^{(2)},\ \ \lambda_3 \in \boldsymbol{F}_1^{(1)},\ \ \lambda_4 \in \boldsymbol{F}_1], \end{cases}$$

la quale è in completo parallelismo con la identità algebrica di A_1 [cfr. la $(2)_4$]

$$\begin{aligned} (t+a_4)(t+a_3)(t+a_2)(t+a_1) &= t^4 + (a_4+a_3+a_2+a_1)t^3 + \\ &+ (a_4a_3+a_4a_2+a_4a_1+a_3a_2+a_3a_1+a_2a_1)t^2 + \\ &+ (a_4a_3a_2+a_4a_3a_1+a_4a_2a_1+a_3a_2a_1)t + a_4a_3a_2a_1 . \end{aligned}$$

Inoltre, abbiamo già considerato il caso particolare in cui sia $\lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv \lambda_3 \equiv \equiv \lambda_4 \equiv \lambda$, e si è trovato [cfr. la $(5)_6$ per $n = 4$]:

$$(6)'_4 \qquad (\mathrm{D} + \lambda)^4 = \mathrm{D}^4 + 4\lambda\,\mathrm{D}^3 + 6\lambda^{\overline{2}|}\,\mathrm{D}^2 + 4\lambda^{\overline{3}|}\,\mathrm{D} + \lambda^{\overline{4}|} \qquad [\lambda \in \boldsymbol{F}_1^{(3)}],$$

in completo parallelismo con l'identità algebrica di A_1 :

$$(t + a)^4 = t^4 + 4at^3 + 6a^2t^2 + 4a^3t + a^4 .$$

Ed ora una domanda: Questo parallelismo continuerà indefinitamente? La risposta sembra essere *sì*! Ma conviene analizzare se è possibile stabilire le basi per procedere con il m e t o d o i n d u t t i v o . A questo scopo abbiamo già stabilito la semplice formula $(6)_1$, inoltre servirà anche la $(4)_3$.

Analizziamo il passaggio da $\mathscr{P}_2$ a $\mathscr{P}_3$, cioè da $(6)_2$ a $(6)_3$. La $(6)_3$, in virtù di $(6)_2$, si può scrivere:

$$\mathscr{P}_3 \equiv (\mathrm{D} + \underleftarrow{\lambda_3})(\mathrm{D} + \underleftarrow{\lambda_2})(\mathrm{D} + \lambda_1) = (\mathrm{D} + \underleftarrow{\lambda_3})[\mathrm{D}^2 + (\lambda_2 + \lambda_1)\mathrm{D} + \lambda_2 \neg \lambda_1]$$

$$= (\mathrm{D} + \lambda_3)\mathrm{D}^2 + (\mathrm{D} + \underleftarrow{\lambda_3})(\lambda_2 + \lambda_1)\mathrm{D} + (\mathrm{D} + \underleftarrow{\lambda_3})(\lambda_2 \neg \lambda_1),$$

dove i tre termini dell'ultimo membro si indicheranno, ordinatamente, con i simboli $\mathscr{P}_{3,1}$, $\mathscr{P}_{3,2}$, $\mathscr{P}_{3,3}$:

Per $\mathscr{P}_{3,1}$ si ha subito $\mathscr{P}_{3,1} = (\mathrm{D} + \lambda_3)\mathrm{D}^2 = \mathrm{D}^3 + \lambda_3\mathrm{D}^2$.

Per $\mathscr{P}_{3,2}$ occorre applicare prima $(6)_1$ e poi $(4)_3$, così s'ottiene:

$$\mathscr{P}_{3,2} = [(\mathrm{D} + \underleftarrow{\lambda_3})(\lambda_2 + \lambda_1)]\mathrm{D} = [(\lambda_2 + \lambda_1)\mathrm{D} + \lambda_3 \neg (\lambda_2 + \lambda_1)]\mathrm{D} =$$

$$= (\lambda_2 + \lambda_1)\mathrm{D}^2 + (\lambda_3 \neg \lambda_2 + \lambda_3 \neg \lambda_1)\mathrm{D} .$$

Per $\mathscr{P}_{3,3}$ basta applicare $(6)_1$:

$$\mathscr{P}_{3,3} = (\lambda_2 \neg \lambda_1)\mathrm{D} + \lambda_3 \neg (\lambda_2 \neg \lambda_1) = (\lambda_2 \neg \lambda_1)\mathrm{D} + (\lambda_3 \neg \lambda_2 \neg \lambda_1) .$$

Riunendo le tre conclusioni si ottiene così proprio la $(6)_3$.

Analogamente si procede nel caso di $\mathscr{P}_4$.

L'applicabilità del metodo induttivo è così assicurata.

Si conclude quindi in generale [in parallelismo con la $(2)_n$]:

$$(6)_n \qquad \underleftarrow{(D+\lambda_n)}\underleftarrow{(D+\lambda_{n-1})}\dots\underleftarrow{(D+\lambda_2)}\underleftarrow{(D+\lambda_1)} =$$

$$= D^n + \mu_1 D^{n-1} + \mu_2 D^{n-2} + \dots + \mu_{n-2} D^2 + \mu_{n-1} D + \mu_n\,,$$

dove è:

$$\left[\begin{array}{ll}
\mu_1 & = \lambda_n + \lambda_{n-1} + \dots + \lambda_2 + \lambda_1\,, \\
\mu_2 & = (\lambda_n \urcorner \lambda_{n-1} + \lambda_n \urcorner \lambda_{n-2} + \dots + \lambda_n \urcorner \lambda_1) + \\
 & \quad + (\lambda_{n-1}\urcorner\lambda_{n-2} + \lambda_{n-1}\urcorner\lambda_{n-3} + \dots + \lambda_{n-1}\urcorner\lambda_1) + \dots + (\lambda_3\urcorner\lambda_2 + \lambda_3\urcorner\lambda_1) + \lambda_2\urcorner\lambda_1\,, \\
\dots & \dots \\
\mu_{n-2} & = (\lambda_n\urcorner\lambda_{n-1}\urcorner\dots\urcorner\lambda_4\urcorner\lambda_3 + \lambda_n\urcorner\lambda_{n-1}\urcorner\dots\urcorner\lambda_4\urcorner\lambda_2 + \lambda_n\urcorner\lambda_{n-1}\urcorner\dots\urcorner\lambda_4\urcorner\lambda_1) + \\
 & \quad + (\lambda_{n-1}\urcorner\lambda_{n-2}\urcorner\dots\urcorner\lambda_3\urcorner\lambda_2 + \lambda_{n-1}\urcorner\lambda_{n-2}\urcorner\dots\urcorner\lambda_3\urcorner\lambda_1) + \dots + \\
 & \quad + (\lambda_{n-2}\urcorner\lambda_{n-3}\urcorner\dots\urcorner\lambda_2\urcorner\lambda_1)\,, \\
\mu_{n-1} & = (\lambda_n\urcorner\lambda_{n-1}\urcorner\dots\urcorner\lambda_3\urcorner\lambda_2 + \lambda_n\urcorner\lambda_{n-1}\urcorner\dots\urcorner\lambda_3\urcorner\lambda_1) + \lambda_{n-1}\urcorner\lambda_{n-2}\urcorner\dots\urcorner\lambda_2\urcorner\lambda_1\,, \\
\mu_n & = \lambda_n\urcorner\lambda_{n-1}\urcorner\dots\urcorner\lambda_2\urcorner\lambda_1 \\
 & \qquad [\lambda_1 \in \boldsymbol{F}_1^{(n-1)},\quad \lambda_2 \in \boldsymbol{F}_1^{(n-2)},\quad \dots,\quad \lambda_{n-1}\in\boldsymbol{F}_1^{(1)},\quad \lambda_n \in \boldsymbol{F}_1]\,.
\end{array}\right.$$

La somma a secondo membro di $(6)_n$ si chiamerà un **funderivatore** (*ordinario*) **razionale intero** (di ordine n), e le funzioni $\mu_0 = 1$, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-2}, \mu_{n-1}, \mu_n$ si diranno i *coefficienti* di tale funderivatore.

6.4. – Il caso particolare importante in cui nelle precedenti affermazioni deralgebriche sia

$$\lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv \lambda_3 \equiv \dots \equiv \lambda$$

è già stato considerato [cfr. la $(5)_6$] e si è trovato:

$$(\mathrm{D}+\lambda)^n = \sum_0^n {}_k \binom{n}{k} \lambda^{\overline{k}|}\, \mathrm{D}^{n-k} \qquad [\lambda \in \boldsymbol{F}_1^{(n-1)}]\,,$$

in completo parallelismo con l'identità algebrica di A_1 :

$$(t+a)^n = \sum_0^n {}_k \binom{n}{k} a^k \, t^{n-k} .$$

7. - Equazioni deralgebriche ed equazioni differenziali ordinarie.

Consideriamo una « espressione differenziale ordinaria e lineare, d'ordine n » nella funzione variabile $y = y(t)$:

$$(7)_1 \qquad y^{(n)} + \mu_1 y^{(n-1)} + \mu_2 y^{(n-2)} + \ldots + \mu_{n-2} y'' + \mu_{n-1} y' + \mu_n y ,$$

dove i coefficienti $\mu_1 = \mu_1(t)$, $\mu_2 = \mu_2(t)$, ..., $\mu_{n-2} = \mu_{n-2}(t)$, $\mu_{n-1} = \mu_{n-1}(t)$, $\mu_n = \mu_n(t)$ si suppongono c o n t i n u e nel loro campo N^* di definizione.

Facciamo in $(7)_1$ la sostituzione di variabile indipendente

$$y = e^{\int x \, dt} ,$$

dove la nuova variabile $x = x(t)$ dovrà essere derivabile fino all'ordine $n-1$. In virtù di $(5)_5$ risulta allora:

$$y^{(n)} = y^n e^{\int x\, dt} = e^{\int x \, dt} x^{\overline{n}|} , \quad y^{(n-1)} = e^{\int x\, dt} x^{\overline{n-1}|} , \ \ldots ,$$

$$y'' = e^{\int x\, dt} x^{\overline{2}|} , \quad y' = e^{\int x\, dt} x , \quad y = e^{\int x\, dt} .$$

Si ottiene quindi:

$$y^{(n)} + \mu_1 y^{(n-1)} + \mu_2 y^{(n-2)} + \ldots + \mu_{n-2} y'' + \mu_{n-1} y' + \mu_n y =$$

$$= e^{\int x\, dt} \cdot (x^{\overline{n}|} + \mu_1 x^{\overline{n-1}|} + \mu_2 x^{\overline{n-2}|} + \ldots + \mu_{n-2} x^{\overline{2}|} + \mu_{n-1} x + \mu_n) .$$

Ne segue: *l'equazione differenziale lineare*

$$(7)_2 \qquad y^{(n)} + \mu_1 y^{(n-1)} + \mu_2 y^{(n-2)} + \ldots + \mu_{n-2} y'' + \mu_{n-1} y' + \mu_n y = 0$$

è e q u i v a l e n t e a l'equazione deralgebrica di $A_{1,1}$:

$$(7)_3 \qquad x^{\overline{n}|} + \mu_1 x^{\overline{n-1}|} + \mu_2 x^{\overline{n-2}|} + \ldots + \mu_{n-2} x^{\overline{2}|} + \mu_{n-1} x + \mu_n = 0 .$$

8. - Un cenno su gli sviluppi successivi.

Il presente lavoro, contenente le prime nozioni di deralgebra $A_{1,1}$, sarà seguito da altri lavori su questa stessa $A_{1,1}$.

A l'inizio della Introduzione, dopo avere concluso che la cosiddetta « meta feconda » auspicata dal Pincherle esiste veramente, chiamammo *deralgebra generale* la parte iniziale di tale « meta feconda ». Constatammo poi che le *deralgebre particolari* formano una successione doppia (o a due indici), il cui primo elemento venne detto deralgebra ristretta o deralgebra $A_{1,1}$.

Una seconda parte della detta « meta feconda » è data da ciò che chiameremo la **deranalisi infinitesimale generale**, avente come modello la comune « analisi infinitesimale ». Il prefisso *der*, dato al vocabolo *analisi* per ottenere *deranalisi*, ricorda l'intervento delle nuove operazioni di **derderivazione** (quella ordinaria e quelle parziali). Come abbiamo detto per le varie « deralgebre particolari », anche le varie *deranalisi particolari* formano una successione doppia (o a due indici), ed è importante lo studio del primo elemento di questa successione, elemento che si potrebbe chiamare la « deranalisi infinitesimale ristretta ». In queste deranalisi infinitesimali alle ordinarie funzioni si associano dei tipi di « funzionali funzioni » da noi detti **derfunzioni.**

All'interno della « deranalisi infinitesimale generale » sembra possibile riformulare i vari filoni del calcolo funzionale, cioè: il *calcolo delle variazioni* [**4**], la *teoria generale dei funzionali* [**2**] e la cosiddetta *analisi funzionale* (cfr. [**5**], [**6**]).

Bibliografia .

[**1**] S. Pincherle e U. Amaldi, *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'Analisi*, N. Zanichelli, Bologna 1901.

[**2**] V. Volterra et J. Pérès, *Théorie générale des fonctionnelles*, Tome I, Gauthier-Villars, Paris 1936.

[**3**] A. Mambriani, *Sull'Algebra delle successioni*, Annali di Matematica pura ed applicata: Serie IV, Tomo VIII (1930), pp. 103-139; Serie IV, Tomo IX (1931), pp. 25-56.

[**4**] L. Tonelli, *Fondamenti di Calcolo delle variazioni*: Vol. I (1921), Vol. II (1923), Nicola Zanichelli, Bologna.

[**5**] M. Picone, *Lezioni di Analisi funzionale*, Tumminelli, Roma 1947.

[**6**] M. Schechter, *Principles of functional analysis*, Academic Press, 1971.

* * *