Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 157-163

GIULIANELLA COLETTI (*)

Esistenza di soluzioni limitate per equazioni differenziali ordinarie non lineari (**)

1. - Introduzione.

Utilizzando un teorema di J. L. Massera e J. J. Schäffer [5] in $[6]_1$ e $[6]_2$ si fornisce una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di almeno una soluzione limitata per l'equazione differenziale

$$(\tilde{\mathrm{E}}) \qquad \dot{x} - A(t)x = g(t, x),$$

dove g appartiene alla classe $F^p_{R^n}(J \times R^n)$, $(1 \leq p \leq \infty)$, delle funzioni f soddisfacenti le condizioni di Carathëodory ($[4]_1$) e le seguenti

(i) esista un $\lambda \in L^p_R(J)$ in modo che risulti

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \lambda(t)\|x - y\|, \qquad \text{per ogni } (t, x), (t, y) \in J \times R^n;$$

(ii) $f(., 0) \in L^p_{R^n}(J)$.

Questo risultato è stato generalizzato in [1] dove si dimostra lo stesso risultato per la classe $\tilde{F}^p_{R^n}(J \times R^n) \subset F^p_{R^n}(J \times R^n)$, $(1 \leq p < \infty)$, delle funzioni f soddisfacenti le condizioni di Carathëodory e le seguenti

(h) per ogni insieme «limitato» $B \subset R^n$ esista un $\lambda_B \in L^p_{R^n}(J)$ in modo che risulti

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \lambda_B(t)\|x - y\|, \qquad \text{per ogni } (t, x), (t, y) \in J \times B;$$

(hh) $f(., 0) \in L^p_{R^n}(J)$.

(*) Indirizzo: Università di Perugia, Istituto di Matematica, via Vanvitelli 2, 06100 Perugia, Italy.

(**) Lavoro svolto nell'ambito dello G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 2-VIII-1977.

Scopo di questo lavoro è fornire teoremi analoghi ai suddetti, prescindendo da ipotesi di Lipschitzianità.

2. – Lo spazio funzionale fondamentale per le successive considerazioni sarà lo spazio $C_c = C_c(J, R^n)$ delle funzioni vettoriali continue su $J = [t_0, +\infty)$ a valori in R^n, dotato della topologia della uniforme convergenza sui compatti [**3**]$_1$, spazio vettoriale topologico, localmente convesso e metrizzabile.

Si considererà anche lo spazio di Banach $C_0 = C_0(J, R^n)$ delle funzioni continue e limitate su J a valori in R^n, con la norma definita come segue

$$|x|_{c_0} = \sup_{t \in J} \|x(t)\|$$

dove $\|...\|$ indica la norma euclidea. La topologia di questo spazio, (topologia della uniforme convergenza su J), è chiaramente più forte di quella di C_c.

Per la dimostrazione dei teoremi si farà uso del teorema del punto fisso di Tychonoff [**7**] e lo spazio fondamentale su cui si opererà sarà C_c, benchè la soluzione apparterrà a C_0.

Si consideri ora la classe delle equazioni differenziali «non lineari»

$$(\hat{\mathrm{E}}) \qquad \dot{x} - A(t)x = g(t, x),$$

dove $A: t \mapsto A(t)$ è una matrice reale $n \times n$, localmente sommabile su $J = [t_0, +\infty)$, e $g(t, x) \mapsto g:(t, x)$ una funzione appartenente all'una o all'altra delle seguenti classi:
$\hat{F}^p_{R^n} = \hat{F}^p_{R^n}(J \times R^n)$, $(1 \leqq p \leqq \infty)$, classe di tutte le funzioni f, definite in $J \times R^n$, a valori in R^n, soddisfacenti le condizioni di Carathëodory e la seguente (α) esista un numero $\delta > 0$ e una funzione $\lambda_\varrho \in L^p(J)$, tale che $\|f(t, x)\| \leqq \lambda_\varrho(t)$ per ogni $t \in J$ e per ogni $x \in S$, $S = \{x: t \mapsto x(t): |x|_{c_0} \leq \varrho\}$;
$Q^p_{R^n} = Q^p_{R^n}(J \times R^n)$, $(1 \leqq p \leqq \infty)$, classe di tutte le funzioni f, definite, in $J \times R^n$, a valori in R^n, soddisfacenti la (α) e la seguente $(\alpha\alpha)$ per ogni successione x_n di S, convergente (uniformemente sui compatti) a x di S, $g(t, x_n)$ converga in misura a $g(t, x)$.

Sia $m(t; P_1, P_2)$ la funzione così definita

$$(2.1) \quad m(t; P_1, P_2) = \begin{cases} \left[\int_{t_0}^{t} |Y(t)P_1Y^{-1}(s)|^q \, ds + \int_{t}^{+\infty} |Y(t)P_2Y^{-1}(s)|^q \, ds\right]^{1/q} & \text{se } 1 \leqq q < \infty, \\ \sup_{t_0 \leqq s \leqq t} |Y(t)P_1Y^{-1}(s)| + \sup_{t < s < \infty} |Y(t)P_2Y^{-1}(s)| & \text{se } q = \infty, \end{cases}$$

dove: Y è la matrice fondamentale della equazione omogenea associata a $(\hat{\mathrm{E}})$, con $Y(t_0) = I$, P_1 e P_2 le proiezioni di R^n sui sottospazi X_1 e X_2 (definiti in [**5**], p. 241); $|\ldots|$ una qualunque norma di matrici $n \times n$ e q l'esponente coniugato di p.

3. – Sussistono i seguenti teoremi.

Teorema 1. *Sia data l'equazione* ($\hat{\mathrm{E}}$) *con* $g \in \hat{F}^{\prime p}_{R^n}$, $1 \leqq p < \infty$. *Condizione necessaria e sufficiente perchè questa equazione ammetta almeno una soluzione limitata su* J *è che esista un* $K > 0$ *tale che*

$$\text{(H)} \qquad m(t; P_1, P_2) \leqq K \qquad \textit{per ogni } t \in J .$$

Condizione sufficiente.

Si definisca su $S \subset C_c$, (insieme convesso e chiuso in C_c) l'operatore « T » (¹)

$$\text{(3.1)} \quad T: x(t) \mapsto Tx(t) = \int_{t_0}^{t} Y(t) P_1 Y^{-1}(s) g(s, x(s))\, \mathrm{d}s - \int_{t}^{+\infty} Y(t) P_2 Y^{-1}(s) g(s, x(s))\, \mathrm{d}s .$$

I valori di questo operatore appartengono a C_0, infatti per ogni $x \in S$ si ha

$$\text{(3.2)} \quad \|Tx(t)\| \leqq c\, \Big(\int_{t_0}^{t} | Y(t) P_1 Y^{-1}(s)|^q \mathrm{d}s\Big)^{1/q} \Big(\int_{t}^{+\infty} \|g(s, x(s))\|^p \mathrm{d}s\Big)^{1/p} +$$

$$+ c\Big(\int_{t}^{+\infty} | Y(t) P_2 Y^{-1}(s)|^q \mathrm{d}s\Big)^{1/q} \Big(\int_{t}^{+\infty} \|g(s, x(s))\|^p \mathrm{d}s\Big)^{1/p} \leqq cK \Big(\int_{t_0}^{+\infty} \|g(s, x(s))\|^p \mathrm{d}s\Big)^{1/p}, \quad \forall t \in J ,$$

con la c costante che dipende dalla scelta della norma.

Tenendo poi conto dell'ipotesi (α), dalla (3.2) segue

$$\text{(3.3)} \qquad |Tx(t)|_{c_0} \leqq cK |\lambda_\varrho|_p ,$$

e, poichè spostando opportunamente t_0 (²) è possibile rendere $|\lambda_\varrho|_p < \varrho/2ck$, si ha che $TS \subset S$.

(¹) I due integrali che compaiono nella (3.1) esistono finiti: ciò segue da (H), dalle condizioni di Carathëodory e dal teorema di Holder [**3**]₂.

(²) Nella eventualità che occorra spostare t_0 in t_0^* ($> t_0$), si vede facilmente che la soluzione x limitata in $J^* = [t_0^*, \infty)$ è limitata in tutto $J = [t_0, \infty)$. Infatti, per le condizioni di Carathëodory, esiste una soluzione x in J, che coincide con la x^* per $t^* \leqq t < \infty$; essa si ottiene prolungando a sinistra, da t_0^* a t_0, la x^* e assumendo per condizione iniziale della soluzione di ($\hat{\mathrm{E}}$) il valore in t_0 di tale prolungamento. Da quanto detto e per la continuità della x, segue la sua limitatezza in J.

Per semplicità, si manterranno le stesse notazioni, anche in una ipotesi di spostamento.

Per dimostrare la continuità di T si osservi intanto che dalla (H) e dalle condizioni di Carathëodory segue l'esistenza di una funzione $\varphi\colon s \mapsto \varphi(t, s)$, integrabile in J, tale che

$$\|L(t, s)g(s, x(s))\| \leqq \varphi(t, s)\,, \qquad \forall x \in S\,, \tag{3.4}$$

essendo $L(t, s)$ la funzione così definita

$$L(t, s) = \begin{array}{ll} Y(t)P_1Y^{-1}(s)\,, & t_0 \leqq s \leqq t\,, \\ Y(t)P_2Y^{-1}(s)\,, & t \leqq s < \infty\,. \end{array}$$

Risultano così soddisfatte le ipotesi del teorema della dominata convergenza di Lebesgue che assicura la continuità di T.

Per applicare il teorema di Tychonoff, rimane da mostrare che esiste un insieme compatto B in C_c, tale che $TS \subset B \subset S$.

Per questo basterà dimostrare che le funzioni appartenenti a TS sono uniformemente limitate e equicontinue su tutti gli intervalli limitati di J, si potrà infatti prendere così per B la chiusura di TS in C_c.

Per quanto riguarda la limitatezza essa segue immediatamente da (3.3).

Si ha inoltre, per ogni $a > t_0$ e $t_0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq a$

$$\begin{aligned} Tx(t_1) - Tx(t_2) &= \int_{t_0}^{t_2}[Y(t_1)P_1Y^{-1}(s) - Y(t_2)P_1Y^{-1}(s)]g(s, x(s))\,\mathrm{d}s \,+ \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} Y(t_2)P_1Y^{-1}(s)g(s,x(s))\mathrm{d}s - \int_{t_1}^{t_2} Y(t_1)P_2Y^{-1}(s)g(s,x(s))\,\mathrm{d}s \,+ \\ &+ \int_{t_2}^{+\infty}[Y(t)P_2Y^{-1}(s) - Y(t)P_2Y^{-1}(s)]g(s, x(s))\,\mathrm{d}s\,, \end{aligned} \tag{3.5}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \|Tx(t_1) - Tx(t_2)\| &\leqq \Big(\int_{t_0}^{t_2}\|Y(t_1)P_1Y^{-1}(s) - Y(t_2)P_1Y^{-1}(s)\|^q\Big)^{1/q}\Big(\int_{t_0}^{t_2}\|g(s,x(s))\|^p\,\mathrm{d}s^{1/p} \,+ \\ &+ \Big(\int_{t_1}^{t_2}\|Y(t_2)P_1Y^{-1}(s)\|^q\Big)^{1/q}\Big(\int_{t_1}^{t_2}\|g(s, x(s))\|^p\,\mathrm{d}s^{1/p} \,+ \\ &+ \Big(\int_{t_1}^{t_2}\|Y(t_1)P_2Y^{-1}(s)\|^q\Big)^{1/q}\Big(\int_{t_1}^{t_2}\|g(s, x(s))\|^p\,\mathrm{d}s\Big)^{1/p} \,+ \\ &+ \Big(\int_{t_2}^{+}\|Y(t_2)P_2Y^{-1}(s) - Y(t_1)P_2Y^{-1}(s)\|^q\Big)^{1/q}\Big(\int_{t_2}^{+\infty}\|g(s,x(s))\|^p\,\mathrm{d}s\Big)^{1/p}. \end{aligned} \tag{3.5'}$$

Per la continuità di $Y(t)P_1Y^{-1}(s)$ e di $Y(t)P_2Y^{-1}(s)$ in $[t_0, a]$, e per il teorema di Vitali si ottiene

$$(3.5)'_1 \qquad \Big(\int_{t_0}^{t_2}\| Y(t_1)P_1Y^{-1}(s) - Y(t_2)P_2\, Y^{-1}(s)\|^q\, ds\Big)^{1/q}\Big(\int_{t_0}^{t_2}\|g(s, x(s))\|^p\, ds\Big)^{1/p}$$

$$\leqq \Big(\int_{t_0}^{a}\| Y(t_1)P_1Y^{-1}(s) - Y(t_2)P_1Y^{-1}(s)\|^q\, ds\Big)^{1/q}\Big(\int_{t_0}^{a}\|\lambda_\varrho(s)\|^p\, ds\Big)^{1/p}\leqq \varepsilon\,,$$

e

$$(3.5)'_2 \qquad \Big(\int_{t_2}^{+\infty}\| Y(t_2)P_2Y^{-1}(s) - Y(t_1)P_2Y^{-1}(s)\|^q\, ds\Big)^{1/q}\Big(\int_{t_2}^{+\infty}\|g(s, x(s))\|^p\, ds\Big)^{1/p}$$

$$\leqq \Big(\int_{t_0}^{+\infty}\| Y(t_2)P_2Y^{-1}(s) - Y(t_1)P_2Y^{-1}(s)\|^q\, ds\Big)^{1/q}\Big(\int_{t_0}^{+\infty}\|\lambda_\varrho(s)\|^p\, ds\Big)^{1/p}\leqq \varepsilon\,,$$

per $|t_1 - t_2| < \delta_\varepsilon$. Inoltre si ha

$$(3.5)'_3 \qquad \Big(\int_{t_1}^{t_2}\| Y(t_2)P_1Y^{-1}(s)\|^q\, ds\Big)^{1/q}\Big(\int_{t_1}^{t_2}\|g(s, x(s))\|^p\, ds\Big)^{1/p}\leqq K\Big(\int_{t_1}^{t_2}\|\lambda_\varrho(s)\|^p\, ds\Big)^{1/p},$$

e

$$(3.5)'_4 \qquad \Big(\int_{t_1}^{t_2}\| Y(t_1)P_2Y^{-1}(s)\|^q\, ds\Big)^{1/q}\Big(\int_{t_1}^{t_2}\|g(s, x(s))\|^p\, ds\Big)^{1/p}\leqq K\Big(\int_{t_1}^{t_2}\|\lambda_\varrho(s)\|^p\, ds\Big)^{1/p}.$$

Per la continuità dell'integrale, i secondi membri della $(3.5')_3$ e della $(3.5')_4$ risultano minori di ε per $|t_1 - t_2| < \delta_\varepsilon$. Pertanto, da quanto detto, segue la equicontinuità di TS. Essendo così soddisfatte le ipotesi del teorema di Tychonoff, l'operatore T ha un (unico) punto unito x in S.

La condizione necessaria si dimostra come in **[4]**$_2$.

Teorema 2. *Condizione necessaria affinchè la* (Ê), *con* $g \in Q^p_{R^n}$, $(1 \leqq p \leqq \infty)$, *ammetta almeno una soluzione limitata è che valga la* (H). *La proposizione risulta invertibile, purchè* $|\lambda_\varrho|_p$ *sia minore di* ϱ/ck.

Condizione sufficiente.

Definito ancora su S l'operatore T (cfr. (3.1)), procedendo come nel Teorema 1 si ottiene immediatamente

$$(3.3)' \qquad |Tx(t)|_{C_0} \leq \varrho\,,$$

da cui segue $TS \subset S$.

Per dimostrare la continuità di T su S, basta dimostrarne la continuità sulle successioni di S. Considerata per ciò una successione $t \mapsto x_n(t)$, $t \in J$, $x_n \in S$, convergente a x, si ha

$$\begin{aligned}(3.6) \qquad \|Tx_n(t) - Tx(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \| Y(t) P_1 Y^{-1}(s)[f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))] \mathrm{d}s + \\ &\quad + \int_{t}^{+\infty} \| Y(t) P_2 Y^{-1}(s)[f(s), x_n(s)) - f(s, x(s))] \| \,\mathrm{d}s \\ &\leq K(\int_{t_0}^{+\infty} \|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\|^p \mathrm{d}s)^{1/p} .\end{aligned}$$

Dalla (3.6), tenendo conto della (α) e della ($\alpha\alpha$), segue [**2**] la convergenza (in C_c) di Tx_n a Tx, e quindi la continuità di T. Poichè, procedendo come nel Teorema 1, si dimostra la equilimitatezza e la equicontinuità di TS, risultano soddisfatte le ipotesi del teorema di Tychonoff, che ci assicurano la esistenza di un punto unito per l'operatore T in S. La condizione necessaria si dimostra come in [**4**]$_2$.

Bibliografia

[**1**] A. Averna e G. Coletti, *Sulla esistenza di soluzioni limitate per le equazioni differenziali ordinarie non lineari,* Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste **9** (1977), 21-37

[**2**] R. G. Bartle, *The element of integration,* J. Wiley & Sons Inc., New York - London - Sydney 1966.

[**3**] N. Bourbaki: [•]$_1$ *Topologie général,* Hermann, Paris 1948-1949; [•]$_2$ *Integration,* Hermann, Paris 1965.

[**4**] R. Conti: [•]$_1$ *Recent trends in the theory of boundary value problems for ordinary differential equations,* Boll. Un. Mat. Ital. **22** (1967), 1-44; [•]$_2$ *On the boundedness of solutions of ordinary differential equations,* Funkcial. Ekvac. **9** (1966), 23-26.

[**5**] J. L. Massera and J. J. Schäffer, *Linear differential equations and functional analysis,* Ann. of Math. **67** (1958), 517-573.

[**6**] W. A. Staikos: [•]$_1$ *A note on the boundedness of solutions of ordinary differential equations,* Bull. Un. Mat. Ital. (1968), 256-261; [•]$_2$ *A correction to: A note on the boundedness of solutions of ordinary differential equations,* Boll. Un. Mat. Ital. (1968), 256-261.

[**7**] A. Tychonoff, *Ein fixpuntsats,* Math. Ann. **3** (1935), 767-776.

Summary

In this paper some necessary and sufficient conditions is proved for the existence of at last one bounded solution of the differential equation $\dot{x} - A(t)x = g(t, x)$, *for every* g *belonging to a suitable function class* $F^p_R(J \times R^n)$. *These theorems are applications of a well- known theorem of J. L. Massera and J. J. Schäffer* [**5**].

* * *