Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 247-258

DANIELA PARMIGIANI (*)

Sulla $\mathscr{K}$-categoria dei gruppi abeliani in $\mathscr{K}$ (**)

Introduzione.

In una categoria cartesiana chiusa $\mathscr{K}$ è noto che l'oggetto B^A « delle funzioni da A a B » è un oggetto-gruppo (abeliano) se A e B lo sono. Nel presente lavoro si definisce l'oggetto hom (A, B) « degli omomorfismi da A a B » e si dimostra che è un sottogruppo di B^A.

La definizione di hom (A, B) si basa sulla biiezione naturale

$$[X, \hom(A, B)] \simeq \operatorname{Hom}[A, B^X],$$

dove B^X ha la struttura « potenza diretta » di B.

Basandosi principalmente sulle proprietà dell'aggiunzione

$$\frac{A \times B \to C}{B \to C^A},$$

si perviene poi a dimostrare alcuni risultati fra cui:

(α) la composizione naturale $B^A \times C^B \to C^A$ indotta dalla struttura di categoria cartesiana chiusa « porta omomorfismi in omomorfismi », per cui i gruppi (abeliani) in $\mathscr{K}$ costituiscono una $\mathscr{K}$-categoria (sotto-$\mathscr{K}$-categoria di $\mathscr{K}$);

(β) la composizione è « distributiva rispetto alla somma », per cui la $\mathscr{K}$-categoria dei gruppi abeliani in $\mathscr{K}$ risulta $\mathscr{K}$-additiva.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 12-XII-1977.

1. – Com'è noto, esistono due famiglie di biiezioni

$$\varphi^A_{X,Y}\colon [A\times X,\, Y] \xrightarrow{\approx} [X,\, Y^A]\,, \tag{1}$$

$$\Phi^A_{X,Y}\colon [X,\, Y^A] \xrightarrow{\approx} [A,\, Y^X]\,, \tag{2}$$

naturali in X, Y e A, e legate dalla relazione

$$\Phi^A_{X,Y}(k) = \varphi^X_{A,Y}\big((\varphi^A_{X,Y})^{-1}(k)\,\tau\big) \tag{3}$$

per $k\colon X \to Y^A$ e dove $\tau\colon X\times A \xrightarrow{\approx} A\times X$ è l'isomorfismo canonico definito da

$$\varepsilon_j\tau = \varepsilon_i \qquad (i,\, j = 1, 2;\ i \neq j)\,. \tag{4}$$

Si ricordi inoltre che se Y è munito di una qualunque struttura algebrica ed $f\colon X' \to X$, allora Y^f è un omomorfismo tra le strutture indotte su Y^X e $Y^{X'}$. Siano ora A, B gruppi abeliani in $\mathscr{K}$, $\mathrm{Hom}[A, B]$ l'insieme degli omomorfismi da A a B, cioè degli $f \in [A, B]$ tali che il diagramma

$$\begin{tikzcd} A^2 \arrow[r, "f^2"] \arrow[d, "m_A"'] & B^2 \arrow[d, "m_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

sia commutativo, dove m_A e m_B indicano le operazioni binarie rispettivamente di A e B (1).

Si osservi inoltre che, per ogni $f\colon X' \to X$, l'applicazione

$$[A,\, B^f]\colon [A,\, B^X] \to [A,\, B^{X'}]$$

manda $\mathrm{Hom}[A, B^X]$ in $\mathrm{Hom}[A, B^{X'}]$; indicando con $\mathrm{Hom}[A, B^f]$ la restrizione di tale applicazione ad $\mathrm{Hom}[A, B^X]$, si può concludere che $\mathrm{Hom}[A, B^{(-)}]$ è un sottofuntore di $[A, B^{(-)}]$.

---

(1) D'ora in avanti con m_X indicheremo l'operazione binaria del generico gruppo abeliano X, in $\mathscr{K}$.

Definizione 1. Diremo *omico* un morfismo $f\colon X \to B^A$ tale che $\Phi^A_{X,B}(f)\colon A \to B^X$ sia un omomorfismo.

Definizione 2. Indicheremo con $\hom(A, B)$ un oggetto (se esiste) tale che

$$[-, \hom(A, B)] \xrightarrow{\approx} \mathrm{Hom}[A, B^{(-)}] . \tag{5}$$

Proposizione 1.

(a) *Esiste un monomorfismo* $u\colon \hom(A, B) \rightarrowtail B^A$ *tale che*

(i) u *è omico,* (ii) u *è universale* (*rispetto a* (i)).

(b) *Se* $u\colon H \to B^A$ *è omico e universale, allora*

$$[-, H] \xrightarrow{\approx} \mathrm{Hom}[A, B^{(-)}] .$$

Dimostrazione. Si indichi con $\mathrm{Om}[X, B^A]$ l'insieme dei morfismi omici da X in B^A e si osservi che $\mathrm{Om}[-, B^A]$ è un sottofuntore di $[-, B^A]$: dalla Definizione 1, infatti, esso risulta la controimmagine attraverso la biiezione naturale Φ del sottofuntore $\mathrm{Hom}[A, B^{(-)}]$ di $[A, B^{(-)}]$; da questo segue anche che i due sottofuntori $\mathrm{Om}[-, B^A]$ e $\mathrm{Hom}[A, B^{(-)}]$ sono isomorfi attraverso la biiezione naturale $\overline{\Phi}$ indotta, per restrizione dalla Φ stessa.

Per il teorema 3 del Cap. XV di [3], allora, tutto si riduce a dimostrare che $\mathrm{Hom}[A, B^{(-)}]$ è rappresentabile con $\hom(A, B)$ se e solo se $\mathrm{Om}[-, B^A]$ è rappresentabile con $\hom(A, B)$, e questo è ovvio essendo i due sottofuntori isomorfi, com'è stato sopra osservato.

La Proposizione 1 ci assicura che $\hom(A, B)$ può essere caratterizzato come il più grande sottoggetto di B^A, per cui $u\colon \hom(A, B) \rightarrowtail B^A$ sia omico.

Notazione. Quando $\hom(A, B)$ esiste (e dunque vale la (5)) indicheremo con $F_{(-)}$ un arbitrario ma fissato isomorfismo naturale fra $[-, \hom(A, B)]$ e $\mathrm{Hom}[A, B^{(-)}]$.

Lemma. *Per ogni* $f\colon X \to \hom(A, B)$, *si ha la seguente uguaglianza*

$$f = F_X^{-1}(\overline{\Phi}_X(uf)) . \tag{6}$$

Dimostrazione. Posto, per brevità, $\hom(A, B) = H$, per quanto osservato nella Proposizione 1, si sa che $\mathrm{Om}[-, B^A]$ è rappresentabile con H

e dunque uno degli isomorfismi naturali tra $[-, H]$ e $\mathrm{Om}[-, B^A]$ è la composizione $\Phi^{-1}_{(-)} \circ F_{(-)}$.

Ora, dal momento che u è universale per $\mathrm{Om}[-, B^A]$, $u = \overline{\Phi}^{-1}_H \circ F_H(1_H)$ (cfr. [**3**]). Dunque, per la naturalità di $\overline{\Phi}$ e di F, si ha

$$F_X^{-1}(\overline{\Phi}_X(uf)) = F_X^{-1}(B^f \overline{\Phi}_H(u)) = F_X^{-1}(B^f F_H(1_H)) = F_X^{-1}(F_X(f)) = f\,.$$

2. – È noto (cfr. [3]) che se A, B sono gruppi abeliani in $\mathscr{K}$, $\mathrm{Hom}[A, B^X]$ è un sottogruppo del gruppo concreto $[A, B^X]$. Dunque, in virtù della (5) mediante le biiezioni F_X, si può trasportare su ciascun insieme $[X, \mathrm{hom}(A, B)]$ una struttura di gruppo abeliano la cui operazione binaria è così definita

$$f_1 + f_2 = F_X^{-1}(m_{B^X}\{F_X(f_1), F_X(f_2)\}) \;(^2) \qquad (f_1, f_2 \in [X, \mathrm{hom}(A, B]) \,. \tag{7}$$

Proposizione 2. *Su* hom (A, B) *esiste una struttura di gruppo abeliano in* $\mathscr{K}$. *Indicheremo ancora con* hom (A, B) *questo gruppo.*

Dimostrazione. Cominciamo col dimostrare che i seguenti diagrammi sono commutativi

(8)

(9)

$$\begin{tikzcd}
{[A, B^X]} \arrow[r, "{[A, B^h]}"] & {[A, B^{X'}]} \\
{\mathrm{Hom}[A, B^X]} \arrow[u, hook] \arrow[r, "{\mathrm{Hom}[A, B^h]}"] & {\mathrm{Hom}[A, B^{X'}]} \arrow[u, hook] \\
{[X, \mathrm{hom}(A, B)]} \arrow[u, "\approx"'] \arrow[r, "{[h, \mathrm{hom}(A, B)]}"] & {[X', \mathrm{hom}(A, B)]} \arrow[u, "\approx"']
\end{tikzcd}$$

per ogni $h\colon X' \to X$.

Infatti (8) commuta in virtù del fatto che $\mathrm{Hom}[A, B^h]$ è la restrizione di $[A, B^h]$, mentre (9) esprime la naturalità di $F_{(-)}$ e dunque è commutativo. Da questo essendo $F_{X, X'}$ isomorfismi di gruppi, si ha allora che $[h, \mathrm{hom}(A, B)]$

(2) Per $f\colon X \to A$, $g\colon X \to B$, con $\{f, g\}\colon X \to A \times B$ si indicherà l'unico morfismo tale che $\varepsilon_1\{f, g\} = f$ e $\varepsilon_2\{f, g\} = g$.

è un omomorfismo e ciò ci permette di concludere (cfr. [4]$_2$) che su $\hom(A, B)$ esiste una struttura di gruppo abeliano la cui operazione binaria è così definita

$$m = F^{-1}_{\hom(A,B)^2}\big(m_{B^{\hom(A,B)^2}}\{F_{\hom(A,B)}(\varepsilon_1), F_{\hom(A,B)}(\varepsilon_2)\}\big)\,. \tag{10}$$

Osservazione 1. Si osservi, ora, che presi comunque tre oggetti di $\mathscr{K}$, X, Y, Z, indicate con $\varepsilon_j\colon Z^2 \to Z$ le proiezioni canoniche, per ogni $f, g\colon X \to (Z^2)^Y$, si ha

$$f = g \quad \text{se e solo se} \quad \varepsilon_j^Y f = \varepsilon_j^Y g \qquad (j = 1, 2)\,. \tag{11}$$

Inoltre, indichiamo con $\alpha_{X,Y}\colon (X^2)^Y \approx (X^Y)^2$ l'isomorfismo canonico, definito da

$$\varepsilon_j \alpha_{X,Y} = \varepsilon_j^Y \tag{12}$$

e che gode della proprietà

$$m_{X^Y} = m_X^Y \alpha^{-1}_{X,Y}\,. \tag{13}$$

Dal momento che un tale isomorfismo esiste per ogni coppia d'oggetti, d'ora in avanti indicherò con α uno qualunque di essi.

Proposizione 3. *Il gruppo* $\hom(A, B)$ *è un sottogruppo di* B^A.

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che il morfismo

$$u\colon \hom(A, B) \to B^A$$

è un omomorfismo. Occorre dunque provare che il diagramma

$$\begin{tikzcd} \hom(A,B)^2 \arrow[r, "m"] \arrow[d, "u^2"'] & \hom(A,B) \arrow[d, "u"] \\ (B^A)^2 \arrow[r, "m_{B^A}"'] & B^A \end{tikzcd} \tag{14}$$

è commutativo.

Per brevità, si ponga $\hom(A, B) = H$. Per la (10) sappiamo che

$$um = uF_{H^2}^{-1}(m_{BH^2}\{F_{H^2}(\varepsilon_1), F_{H^2}(\varepsilon_2)\} ;$$

la (6) implica allora

$$\Phi(um) = m_{BH^2}\{\Phi(u\varepsilon_1), \Phi(u\varepsilon_2)\} .$$

La commutatività di (14) è dunque assicurata se si dimostra che

$$m_{BH^2}\{\Phi(u\varepsilon_1), \Phi(u\varepsilon_2)\} = \Phi(m_{B^A}\, u^2) . \tag{15}$$

Ora facendo uso della (13) e in virtù della naturalità di Φ, la (15) si riduce a

$$\alpha^{-1}\{\Phi(u\varepsilon_1), \Phi(u\varepsilon_2)\} = \Phi(\alpha^{-1}u^2) . \tag{16}$$

Dal momento che i due membri della (16) sono morfismi di codominio $(B^2)^{H^2}$, per la (11) è sufficiente dimostrare l'uguaglianza delle loro composizioni con $\varepsilon_j^{H^2}$.

Sempre per la naturalità di Φ e la (12), si ha

$$\varepsilon_j^{H^2}\Phi(\alpha^{-1}u^2) = \Phi(\varepsilon_j^A\alpha^{-1}u^2) = \Phi(\varepsilon_j u^2) = \Phi(u\varepsilon_j) ,$$

mentre

$$\varepsilon_j^{H^2}\alpha^{-1}\{\Phi(u\varepsilon_1), \Phi(u\varepsilon_2)\} = \varepsilon_j\{\Phi(u\varepsilon_1), \Phi(u\varepsilon_2)\} = \Phi(u\varepsilon_j) .$$

Questo conclude la dimostrazione.

3. – Siano ora A, B, C oggetti di $\mathscr{K}$ e sia $\psi: B^A \times C^B \to C^A$ il morfismo « composizione » definito da

$$\psi = \varphi(ev(ev \times id)\beta) , \tag{17}$$

dove ev è il morfismo « valutazione » dell'aggiunzione φ, e $\beta: A \times (B^A \times C^B) \to$ $\to (A \times B^A) \times C^B$ è l'isomorfismo canonico del prodotto [3] definito da

$$\beta = \{\{\varepsilon_1, \varepsilon_1\varepsilon_2\}, \varepsilon_2\varepsilon_2\} . \tag{18}$$

---

(3) D'ora in avanti, β indicherà uno qualunque di tali isomorfismi.

Supponiamo ora che C sia munito di struttura di gruppo abeliano; la seguente proposizione esprime, allora, la proprietà distributiva a destra del morfismo « composizione » rispetto alla somma.

Proposizione 4. *Se C è un gruppo in $\mathscr{K}$, allora il seguente diagramma è commutativo*

$$\begin{tikzcd} B^A \times (C^B)^2 \arrow[r, "id \times m_{C^B}"] \arrow[d, "\psi^2 i(\Delta \times id)"'] & B^A \times C^B \arrow[d, "\psi"] \\ (C^A)^2 \arrow[r, "m_{C^A}"'] & C^A \end{tikzcd} \tag{19}$$

dove $\Delta: B \to B^2$ è la diagonale ed $i: A^2 \times B^2 \to (A \times B)^2$ è l'isomorfismo canonico definito da

$$\varepsilon_j i = \varepsilon_j \times \varepsilon_j \qquad (j = 1, 2)\,. \tag{20}$$

Dimostrazione. Mediante alcuni semplici passaggi che tengono conto della naturalità di φ, della definizione di ψ e della (13), si ottiene $\psi(id \times m_{C^B}) = \varphi(m_C\, ev(ev \times \alpha^{-1})\beta)$. Analogamente, si ha

$$m_{C^A} \psi^2 i(\Delta \times id) = \varphi(m_C\, ev(id \times \alpha^{-1}\psi^2 i(\Delta \times id)))\,.$$

Per dimostrare la commutatività di (19), occorre allora provare che

$$\varphi(m_C\, ev(ev \times \alpha^{-1})\beta) = \varphi(m_C\, ev(id \times \alpha^{-1}\psi^2 i(\Delta \times id)))\,. \tag{21}$$

D'altra parte, poichè φ è una biezione, è sufficiente dimostrare che

$$ev(ev \times \alpha^{-1})\beta = ev(id \times \alpha^{-1}\psi^2 i(\Delta \times id))\,. \tag{22}$$

Ora, una nota proprietà dell'aggiunzione assicura che la (22) è equivalente a

$$\varphi(ev(ev \times \alpha^{-1})\beta) = \alpha^{-1}\psi^2 i(\Delta \times id)\,. \tag{23}$$

Poichè i due membri della (23) sono morfismi di codominio $(C^2)^A$, per la (11) resta dimostrata la loro uguaglianza, e dunque la tesi, se si prova l'uguaglianza delle loro composizioni con ε_j^A. Ora per la naturalità di ev e di φ e per la (12) si ha

$$\varepsilon_j^A \varphi\big(ev(ev\times\alpha^{-1})\beta\big) = \varphi\big(\varepsilon_j\, ev(ev\times\alpha^{-1})\beta\big) = \varphi\big(ev(id\times\varepsilon_j^B)(ev\times\alpha^{-1})\beta\big)$$

$$= \varphi\big(ev(ev\times\varepsilon_j)\beta\big)\,.$$

Ricordando, ora, la definizione di ψ si può concludere che

$$\varepsilon_j^A \varphi\big(ev(ev\times\alpha^{-1})\beta\big) = \psi(id\times\varepsilon_j)\,.$$

D'altra parte, la (12) e la (20) assicurano che

$$\varepsilon_j^A \alpha^{-1}\psi^2 i(\varDelta\times id) = \psi\varepsilon_j i(\varDelta\times id) = \psi(id\times\varepsilon_j)\,.$$

Questo conclude la dimostrazione.

5. – Siano ora A, B, C gruppi abeliani in $\mathscr{K}$ e siano $\hom(A, B) \overset{u}{\rightarrowtail} B^A$, $\hom(B, C) \overset{v}{\rightarrowtail} C^B$, $\hom(A, C) \overset{w}{\rightarrowtail} C^A$ gli oggetti, definiti da (5), ad essi relativi. Sia infine $\psi\colon B^A\times C^B \to C^A$ la composizione come definita nel § **4**. La proposizione seguente afferma, allora, che la composizione ψ all'interno della categoria $\mathscr{K}$, «porta omomorfismi in omomorfismi».

P r o p o s i z i o n e 5. *Esiste un morfismo* $\bar\psi\colon \hom(A, B)\times\hom(B, C) \to$ $\to \hom(A, C)$ *tale che il seguente diagramma sia commutativo*

(24)
$$\begin{tikzcd} B^A\times C^B \arrow[r, "\psi"] & C^A \\ \hom(A,B)\times\hom(B,C) \arrow[u, tail, "u\times v"] \arrow[r, "\bar\psi"'] & \hom(A,C). \arrow[u, tail, "w"'] \end{tikzcd}$$

D i m o s t r a z i o n e. Per la proprietà universale di w, è sufficiente provare che $\psi(u\times v)$ è omico. A tal scopo, dimostriamo dapprima la seguente uguaglianza

(25)
$$\varPhi\big(\psi(u\times v)\big) = C^\tau\gamma\big(\varPhi(v)\big)^{\hom(A,B)}\varPhi(u)\,,$$

dove τ è definito dalla (4) e $\gamma\colon (C^{\hom(B,C)})^{\hom(A,B)} \approx C^{\hom(B,C)\times\hom(A,B)}$ è l'isomorfismo canonico definito da

$$\gamma = \varphi\big(ev(id\times ev)\beta^{-1}\big)\,. \tag{26}$$

Per la (3) e la (17) si ha dapprima

$$\Phi\big(\psi(u\times v)\big) = \varphi\big(\varphi^{-1}\big(\psi(u\times v)\big)\tau\big) = \varphi\big(\varphi^{-1}\big(\varphi(ev(ev\times id)\beta)(u\times v)\big)\tau\big)\,.$$

Ora, per la naturalità di φ e note proprietà del morfismo valutazione, si perviene alla seguente catena di uguaglianze

$$\varphi\big(\varphi^{-1}\big(\varphi(ev(ev\times id)\beta)(u\times v)\big)\tau\big) = \varphi\big(ev(ev(id\times u)\times v)\beta\tau\big) = \varphi\big(ev(\varphi^{-1}(u)\times v)\beta\tau\big) =$$
$$= \varphi\big(ev(id\times v)(\varphi^{-1}(u)\times id)\beta\tau\big) = \varphi\big(\varphi^{-1}(v)(\varphi^{-1}(u)\times id)\beta\tau\big)\,.$$

D'altra parte, ricordando che $C^\tau = \varphi\big(ev(\tau\times id)\big)$, si ha

$$C^\tau\gamma\big(\Phi(v)\big)^{\hom(A,B)}\Phi(u) = \varphi\big(ev(\tau\times id)\big)\cdot\varphi\big(ev(id\times ev)\beta^{-1}\big)\cdot\varphi\big(\Phi(v)\,ev\big)\,\Phi(u)\,.$$

Esplicitando ora la Φ secondo la (3) e applicando più volte le proprietà di naturalità della aggiunzione e quelle della valutazione anche il secondo membro dell'uguaglianza (25) risulta uguale al morfismo $\varphi\big(\varphi^{-1}(v)(\varphi^{-1}(u)\times id)\beta\tau\big)$. Questo ci permette di concludere che $\Phi\big(\psi(u\times v)\big)$ è un omomorfismo: infatti tali sono $\Phi(u)$ e $\big(\Phi(v)\big)^{\hom(A,B)}$, essendo u e v omici. Inoltre com'è stato osservato in **1** anche C^τ è un omomorfismo dal momento che C è un gruppo; γ, infine, è un isomorfismo tra gruppi. Da questo si conclude che $\psi(u\times v)$ è omico.

Proposizione 6. *Il seguente diagramma è commutativo*

$$\begin{tikzcd}
(B^A)^2\times \hom(B,C) \arrow[r, "m_{B^A}\times v"] \arrow[d, "\psi^2 i(id\times v^2\Delta)"'] & B^A\times C^B \arrow[d, "\psi"] \\
(C^A)^2 \arrow[r, "m_{C^A}"] & C^A
\end{tikzcd} \tag{27}$$

Dimostrazione. L'uguaglianza dei morfismi $\psi(m_{B^A}\times v)$ e $m_{C^A}:\psi^2 i(id\times v^2\Delta)$ si ottiene in modo analogo a quello delle precedenti proposizioni, tenendo conto, al solito, della naturalità delle biiezioni φ e Φ, del fatto che v è omico e quindi che $\Phi(v)$ è un omomorfismo, e infine delle proprietà (11), (12), (13) prima esposte.

6. – Si supponga, ora, che per ogni coppia A, B di gruppi abeliani in $\mathscr{K}$, esista l'oggetto $\hom(A, B)$ degli omomorfismi.

I risultati dei paragrafi precedenti si possono, allora, così riassumere:

Proposizione 7. *La famiglia $\mathscr{C}$ dei gruppi abeliani in $\mathscr{K}$ è una $\mathscr{K}$-categoria, $\mathscr{K}$-additiva.*

Dimostrazione. Poichè $\mathscr{K}$ è cartesiana chiusa, $(\mathscr{K}, \times, 1, \beta, \lambda, \varrho)$ è una categoria monoidale (cfr. [1]) dove β è l'isomorfismo $\{\{\varepsilon_1, \varepsilon_1\varepsilon_2\}, \varepsilon_2\varepsilon_2\}$, e per ogni $A \in |\mathscr{K}|$, $A \times 1 \xrightarrow{\lambda} A \xleftarrow{\varrho} 1 \times A$. Pongo $|\mathscr{C}| = \{A \in |\mathscr{K}| : A$ gruppo abeliano in $\mathscr{K}\}$ e per ogni A, $B \in |\mathscr{C}|$, sia $\mathscr{C}[A, B] = \hom(A, B)$. Inoltre assumiamo, per ogni $A, B, C \in |\mathscr{C}|$, il morfismo $\bar{\psi}\colon \hom(A, B) \times \hom(B, C) \to \to \hom(A, C)$, della Proposizione 5, come composizione interna. Sia, poi, per ogni $A \in |\mathscr{C}|$, $e_A\colon 1 \to \hom(A, A)$ l'unico morfismo tale che

$$ue_A = \Phi(\delta) \quad \text{con} \quad \delta\colon A \approx A^1; \quad u\colon \hom(A, A) \to A^A .$$

Dal momento che $\bar{\psi}$ è associativo e che i seguenti diagrammi commutano

(28)
$$\begin{tikzcd} 1 \times \hom(A,B) \arrow[rr, "e_A \times id"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & \hom(A,A) \times \hom(A,B) \arrow[dl, "\bar{\psi}"] \\ & \hom(A,B) & \end{tikzcd}$$

(29)
$$\begin{tikzcd} \hom(A,B) \times 1 \arrow[rr, "id \times e_B"] \arrow[dr, "\varrho"'] & & \hom(A,B) \times \hom(B,B) \arrow[dl, "\bar{\psi}"] \\ & \hom(A,B) & \end{tikzcd}$$

si può concludere che $\mathscr{C}$ è una $\mathscr{K}$-categoria (cfr. [1]). Ora, la nozione di categoria additiva (cfr. [2]), si può estendere alle $\mathscr{K}$-categorie, nel seguente modo.

Definizione 3. Sia $\mathscr{C}$ una $\mathscr{K}$-categoria,

$$h_{A,B,C}\colon \mathscr{C}[A, B]\times\mathscr{C}[B, C] \to \mathscr{C}[A, C]$$

la composizione interna, $e_A\colon I \to \mathscr{C}[A, A]$ l'identità; dirò che $\mathscr{C}$ è *$\mathscr{K}$-additiva* se sono soddisfatte le seguenti proprietà:

(i) per ogni $A, B \in |\mathscr{C}|$, $\mathscr{C}[A, B]$ è un gruppo abeliano in $\mathscr{K}$,
(ii) sono commutativi i diagrammi seguenti

$$(30)\qquad \begin{tikzcd}
(\mathscr{C}(A,B)^2 \times \mathscr{C}(B,C) \arrow[r, "m_{A,B}\times id"'] \arrow[d, "h^2_{A,B,C}\; i(id\times\Delta)"'] & \mathscr{C}(A,B)\times\mathscr{C}(B,C) \arrow[d, "h_{A,B,C}"] \\
(\mathscr{C}(A,C))^2 \arrow[r, "m_{A,C}"'] & \mathscr{C}(A,C)
\end{tikzcd}$$

$$(31)\qquad \begin{tikzcd}
\mathscr{C}(A,B)\times(\mathscr{C}(B,C))^2 \arrow[r, "id\times m_{B,C}"'] \arrow[d, "h^2_{A,B,C}\; i(\Delta\times id)"'] & \mathscr{C}(A,B)\times\mathscr{C}(B,C) \arrow[d, "h_{A,C}"] \\
(\mathscr{C}(A,C))^2 \arrow[r, "m_{A,C}"'] & \mathscr{C}(A,C),
\end{tikzcd}$$

dove i e Δ sono rispettivamente, l'isomorfismo dato dalla (20) e la diagonale.

Si può allora concludere che la $\mathscr{K}$-categoria $\mathscr{C}$ dei gruppi abeliani in $\mathscr{K}$ è $\mathscr{K}$-additiva: infatti, nel caso $\mathscr{C}[A, B] = \hom(A, B)$, la commutatività dei diagrammi (30), (31) si ricava immediatamente da quella già dimostrata dei diagrammi (27) e (19).

Bibliografia

[1] M. A. Arbib and E. G. Manes, *Arrows, structures, and functors, the categorical imperative*, Academic Press, New York 1975.

[2] S. MAC LANE, *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, Berlin 1971.

[3] S. MAC LANE and G. BIRKHOFF, *Algebra*, Mursia 1975.

[4] M. SERVI: $[\bullet]_1$ *Questioni di algebra universale in una categoria astratta* (I)' Ann. Univ. Ferrara Sez. VII **13** (1969), 93-116; $[\bullet]_2$ *Questioni di algebra universale in una categoria astratta* (II), Ann. Univ. Ferrara Sez. VII **15** (1970), 57-92.

Sommario

Sia $\mathscr{K}$ una categoria cartesiana chiusa e siano A, B gruppi abeliani in $\mathscr{K}$; si definisce un sottoggetto hom (A, B) *di B^A che corrisponde, all'interno della categoria, all' « insieme degli omomorfismi da A a B » e se ne studiano alcune proprietà.*

* * *