Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 269-275

CRISTINA REGGIANI (*)

Le SH nei limiti diretti di strutture e di interpretazioni (**)

1. - Introduzione.

Scopo del presente lavoro è di dimostrare che se una SH è uniformemente vera in una «famiglia diretta iniettiva» $(\mathscr{A}_k)_{k\in\mathscr{I}}$ di strutture del 1° ordine, essa è vera anche nel suo limite diretto $\mathscr{A}$.

Ci si pone in una categoria $\mathscr{K}$ con limiti diretti e limiti finiti, tale che i limiti diretti siano permutabili con i limiti finiti, e si prova che esiste il limite diretto, $\mathscr{A}$, della famiglia $(\mathscr{A}_k)_{k\in\mathscr{I}}$ e che ogni $\mathscr{A}_k$ ne è sottostruttura. L'asserto seguirà dall'osservare che, se $(\mathscr{A}_k^*)_{k\in\mathscr{I}}$ è una famiglia uniforme di interpretazioni associate in cui sia vera una SH, questa è vera anche nel suo limite diretto $\mathscr{A}^*$, che risulta una interpretazione associata ad $\mathscr{A}$.

2. - Le SH ridotte.

Sia $\mathscr{K}$ una categoria con prodotti finiti e sia $\mathscr{L}$ un linguaggio dei predicati del 1° ordine con uguaglianza; si useranno le stesse notazioni per i termini (astratti) elementari e per le loro interpretazioni [1].

Definizione. Dicesi *ridotta* ogni SH di rango $n\geqslant 1$ nella quale compaiono tutte le n proiezioni astratte n-arie e ogni SH di rango 1 nella quale non compaiono proiezioni.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 6-I-1978.

[1] Per le definizioni di termine (astratto) elementare, di interpretazione e di verità di una SH, si veda $[4]_1$; di tale lavoro si utilizzeranno definizioni e notazioni senza specifica menzione.

Proposizione. *È possibile associare ad ogni SH, H, di rango r una SH ridotta, $\bar{H}$, di rango $n \leqslant r$ ad essa equivalente, cioè tale che in ogni interpretazione di $\mathscr{L}$ sia vera H se e solo se è vera $\bar{H}$.*

Dimostrazione. Sia H una SH di rango r nella quale compaiono $n \leqslant r$, $(n \neq 0)$, proiezioni astratte r-arie, diciamo $\varepsilon_{k_1}^r, \varepsilon_{k_2}^r, \ldots, \varepsilon_{k_n}^r$, con $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$. Per ogni termine t di H indichiamo con $\bar{t}$ il termine di rango n ottenuto da t sostituendo ogni presenza di $\varepsilon_{k_i}^r$, $i = 1, 2, \ldots, n$, con ε_i^n e α_r con α_n. Ovviamente, se t è un termine elementare di H, anche $\bar{t}$ è elementare. Sia $\mathscr{A}^*$ una $\mathscr{L}$-interpretazione di dominio A e sia $\tau = \{\varepsilon_{k_1}^r, \varepsilon_{k_2}^r, \ldots, \varepsilon_{k_n}^r\}: A^r \to A^n$. Per ogni termine t di H si ha

$$\bar{t}\tau = t\,. \tag{1}$$

Sia $\sigma: A^n \to A^r$ tale che $\varepsilon_{k_i}^r \sigma = \varepsilon_i^n$, $i = 1, 2, \ldots, n$. È immediato verificare che $\tau\sigma = 1_{A^n}$, quindi, per ogni termine t di H si ha

$$t\sigma = \bar{t}\,. \tag{2}$$

Per ogni sottoformula H_0 di H, indichiamo con $\bar{H}_0$ la SH ottenuta da H_0 sostituendo ad ogni termine t il corrispondente $\bar{t}$. È evidente che $\bar{H}$ è ridotta. Inoltre si prova facilmente che $\models_{\mathscr{A}^*} H$ se e solo se $\models_{\mathscr{A}^*} \bar{H}$. Infatti, se H è una SH atomica, da (1) segue che per ogni $s: X \to A^r$, $\models_{\mathscr{A}^*} H[s]$ se e solo se $\models_{\mathscr{A}^*} \bar{H}[\tau s]$, mentre da (2) segue che per ogni $g: X \to A^n$, $\models_{\mathscr{A}^*} \bar{H}[g]$ se e solo se $\models_{\mathscr{A}^*} H[\sigma g]$. Tenendo poi presente che $\overline{H_1 \wedge H_2} = \bar{H}_1 \wedge \bar{H}_2$ e $\overline{H_1 \to H_2} = \bar{H}_1 \to \bar{H}_2$, si ha l'asserto.

Sia ora H una SH di rango r nella quale non compaiono proiezioni; tutti i termini di H saranno della forma $f\alpha_r$. Indichiamo ancora con $\bar{H}_0$ la SH ottenuta da H_0 sostituendo ad ogni termine di rango r, $f\alpha_r$, il termine di rango 1, $f\alpha_1$. Ovviamente $\bar{H}$ è ridotta; inoltre H e $\bar{H}$ sono equivalenti. Infatti, indicata ancora con $\mathscr{A}^*$ una $\mathscr{L}$-interpretazione di dominio A, se H è atomica, per ogni $g: X \to A$, posto $g_r = \{g, g, \ldots, g\}: X \to A^r$, accade che $\models_{\mathscr{A}^*} \bar{H}[g]$ se e solo se $\models_{\mathscr{A}^*} H[g_r]$, e per ogni $s: X \to A^r$, $\models_{\mathscr{A}^*} H[s]$ se e solo se $\models_{\mathscr{A}^*} \bar{H}[\varepsilon s]$, dove $\varepsilon: A^r \to A$ è un morfismo qualunque. Da osservazioni analoghe a quelle del caso precedente, segue la tesi.

3. - Costruzione dei limiti diretti.

In questo paragrafo e nel successivo aggiungiamo l'ipotesi che $\mathscr{K}$ abbia i limiti diretti (colimiti di diagrammi diretti) e i limiti finiti e che

($\mathscr{P}$) *i limiti diretti siano permutabili con i limiti finiti.*

Sia $\mathscr{K}(\mathscr{L})$ la categoria delle $\mathscr{L}$-strutture (in $\mathscr{K}$) e $\boldsymbol{U}: \mathscr{K}(\mathscr{L}) \to \mathscr{K}$ il funtore dimenticante. Sia $\mathscr{I}$ un insieme parzialmente ordinato filtrante superiormente, $\boldsymbol{T}: \mathscr{I} \to \mathscr{K}(\mathscr{L})$ un diagramma in $\mathscr{K}(\mathscr{L})$ di schema $\mathscr{I}$ tale che, se $k \leqslant h$, il corrispondente omomorfismo $j_{hk}: \boldsymbol{T}(k) \to \boldsymbol{T}(h)$ sia un omomorfismo iniettivo forte. Indicata allora con $\mathscr{A}_k = \langle A_k, \Phi_k \rangle$ la $\mathscr{L}$-struttura $\boldsymbol{T}(k)$, $k \in \mathscr{I}$, sarà $\mathscr{A}_k$ sottostruttura di $\mathscr{A}_h$ se $k \leqslant h$ e diremo che $(\mathscr{A}_k)_{k \in \mathscr{I}}$ è una *famiglia diretta iniettiva di strutture.*

Sia $(A_k \xrightarrow{\alpha_k} A)_{k \in \mathscr{I}}$ il limite diretto del diagramma $\boldsymbol{UT}: \mathscr{I} \to \mathscr{K}$. Si ha allora il seguente

Lemma 1. *Sia P un predicato m-ario. Se per ogni $k \in \mathscr{I}$, $u_k: R_k \rightarrowtail A_k^m$ è l'interpretazione di P in $\mathscr{A}_k$, allora esiste un'unica interpretazione di P su A tale che gli α_k diventino fortemente compatibili.*

Dimostrazione. Siano $k, h \in \mathscr{I}$, con $k \leqslant h$. Indichiamo con $i_{hk}: R_k \to R_h$ il morfismo tale che il seguente diagramma sia un pullback

$$(3) \qquad \begin{tikzcd} R_k \arrow[r, tail, "u_k"] \arrow[d, "i_{hk}"'] & A_k^m \arrow[d, "j_{hk}^m"] \\ R_h \arrow[r, tail, "u_h"'] & A_h^m \end{tikzcd}$$

Allora $\boldsymbol{R}: \mathscr{I} \to \mathscr{K}$ definito dalle relazioni

$$\boldsymbol{R}(k) = R_k\,, \qquad \boldsymbol{R}(k \to h) = i_{hk}$$

è un funtore. Sia $(R_k \xrightarrow{\varrho_k} R)_{k \in \mathscr{I}}$ il suo limite diretto. È immediato verificare che $(R_k \xrightarrow{\alpha_k^m u_k} A^m)_{k \in \mathscr{I}}$ è una famiglia compatibile per $\boldsymbol{R}$. Ne segue che esiste uno ed un solo morfismo $u: R \to A^m$ tale che per ogni $k \in \mathscr{I}$ sia $u\varrho_k = \alpha_k^m u_k$. Fissato comunque $k \in \mathscr{I}$, sia $\mathscr{J} = \{h \in \mathscr{I} \mid h \geqslant k\}$. Allora $(R_h \xrightarrow{\varrho_h} R)_{h \in \mathscr{J}}$ è il limite diretto di $\boldsymbol{R}\restriction_{\mathscr{J}}$; inoltre, dall'ipotesi $(\mathscr{P})$, segue che $(A_k^m \xrightarrow{\alpha_k^m} A^m)_{k \in \mathscr{I}}$ è il limite diretto di $(-)^m \boldsymbol{UT}$ e quindi $(A_h^m \xrightarrow{\alpha_h^m} A^m)_{h \in \mathscr{J}}$ è il limite diretto di $(-)^m \boldsymbol{UT}\restriction_{\mathscr{J}}$. Allora, poichè (3) è un pullback, per $(\mathscr{P})$, sarà un pullback anche il seguente diagramma

$$(4) \qquad \begin{tikzcd} R_k \arrow[r, tail, "u_k"] \arrow[d, "\varrho_k"'] & A_k^m \arrow[d, "\alpha_k^m"] \\ R \arrow[r, "u"'] & A^m \end{tikzcd}$$

Poichè per ogni $k \in \mathscr{I}$, u_k è un monomorfismo, è un pullback il diagramma

$$\begin{tikzcd} R_k \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & R_k \arrow[d, "u_k"] \\ R_k \arrow[r, "u_k"'] & A_k^m \end{tikzcd}$$

Allora, da $(\mathscr{P})$, segue che anche u è monomorfismo. È possibile quindi interpretare il predicato P nel sottogetto $R \rightarrowtail^{u} A^m$. Da (4) segue che per ogni $k \in \mathscr{I}$, α_k è fortemente compatibile con P.

Indicata con Φ la funzione che associa a ciascun predicato m-ario P di $\mathscr{L}$ la relazione m-aria $u: R \rightarrowtail A^m$, costruita come nel lemma precedente, consideriamo la $\mathscr{L}$-struttura $\mathscr{A} = \langle A, \Phi \rangle$. Ovviamente $\alpha_k: A_k \to A$ è un omomorfismo forte tra $\mathscr{A}_k$ e $\mathscr{A}$, per ogni $k \in \mathscr{I}$. Si ha dunque il seguente

Lemma 2. *$(\mathscr{A}_k \xrightarrow{\alpha_k} \mathscr{A})_{k \in \mathscr{I}}$ è il limite diretto di $\boldsymbol{T}$; per ogni $k \in \mathscr{I}$, $\mathscr{A}_k$ è sottostruttura di $\mathscr{A}$.*

Dimostrazione. Se $(\mathscr{A}_k \xrightarrow{\beta_k} \mathscr{B})_{k \in \mathscr{I}}$, con $\mathscr{B} = \langle B, \Psi \rangle$, è una famiglia compatibile per $\boldsymbol{T}$, $(A_k \xrightarrow{\beta_k} B)_{k \in \mathscr{I}}$ è una famiglia compatibile per $\boldsymbol{UT}$; allora esisterà un unico morfismo $\gamma: A \to B$ tale che $\gamma \alpha_k = \beta_k$. Dimostriamo ora che γ è un omomorfismo. Se P è un predicato m-ario e $R_k \overset{u_k}{\rightarrowtail} A_k^m$, $R \overset{u}{\rightarrowtail} A^m$, $S \overset{v}{\rightarrowtail} B^m$ sono le sue interpretazioni nelle strutture $\mathscr{A}_k$, $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ rispettivamente, poichè β_k è un omomorfismo tra $\mathscr{A}_k$ e $\mathscr{B}$, esisterà un morfismo $x_k: R_k \to S$ tale che sia commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} R_k \arrow[r, tail, "u_k"] \arrow[d, "x_k"'] & A_k^m \arrow[d, "\beta_k^m"] \\ S \arrow[r, tail, "v"'] & B^m \end{tikzcd}$$

per ogni $k \in \mathscr{I}$. Si verifica facilmente che $(R_k \xrightarrow{x_k} S)_{k \in \mathscr{I}}$ è una famiglia compatibile per $\boldsymbol{R}$; dunque esisterà un (unico) morfismo $x: R \to S$ tale che sia $x\varrho_k = x_k$, per ogni $k \in \mathscr{I}$. Con semplici calcoli si prova che il morfismo x rende commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, tail, "u"] \arrow[d, "x"'] & A^m \arrow[d, "\gamma^m"] \\ S \arrow[r, tail, "v"'] & B^m \end{tikzcd}$$

Dunque γ è un omomorfismo tra $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$; ne segue che $(\mathscr{A}_k \xrightarrow{\alpha_k} \mathscr{A})_{k\in\mathscr{I}}$ è il limite diretto di $\boldsymbol{T}$.

Per dimostrare che $\mathscr{A}_k$ è sottostruttura di $\mathscr{A}$, resta ora da verificare che α_k è monomorfismo. Sappiamo che, per $k \leqslant h$, j_{hk} è monomorfismo (in $\mathscr{K}$); poichè ciò è esprimibile con un pullback, dall'ipotesi ($\mathscr{P}$) segue che α_k è monomorfismo (in $\mathscr{K}$).

Lemma 3. *Se per ogni $k \in \mathscr{I}$, $f_k\colon A_k^n \to A_k$ è un'operazione n-aria su A_k tale che ogni j_{hk} sia compatibile, allora esiste un'unica operazione n-aria $f\colon A^n \to A$ tale che α_k sia compatibile per ogni $k \in \mathscr{I}$.*

Dimostrazione. È immediato verificare che $(A_k^n \xrightarrow{\alpha_k f_k} A)_{k\in\mathscr{I}}$ è una famiglia compatibile per il funtore $(-)^n\boldsymbol{UT}$. Dunque, poichè $(A_k^n \xrightarrow{\alpha_k^n} A^n)_{k\in\mathscr{I}}$ è il limite diretto di $(-)^n\boldsymbol{UT}$, esisterà uno ed un solo morfismo $f\colon A^n \to A$ tale che $f\alpha_k^n = \alpha_k f_k$.

Sia $(\mathscr{A}_k^\bullet)_{k\in\mathscr{I}}$ una famiglia uniforme di interpretazioni associata alla famiglia di strutture $(\mathscr{A}_k)_{k\in\mathscr{I}}$. Indichiamo con $\boldsymbol{T}^*\colon \mathscr{I} \to \mathscr{K}(\mathscr{L}^*)$ il funtore definito dalle relazioni

$$\boldsymbol{T}^*(k) = \mathscr{A}_k^\bullet\,, \qquad \boldsymbol{T}^*(k \to h) = j_{hk}\,.$$

Se per ogni simbolo funzionale n-ario ω, indichiamo con $f_k\colon A_k^n \to A_k$ la sua interpretazione in $\mathscr{A}_k^\bullet$ e con Φ^* la funzione che estende Φ e che associa ad ω l'operazione $f\colon A^n \to A$ costruita come nel Lemma 3, $\mathscr{A}^* = \langle A, \Phi^*\rangle$ è una $\mathscr{L}$-interpretazione associata ad $\mathscr{A}$ tale che $\alpha_k\colon A_k \to A$ è un omomorfismo di interpretazioni per ogni $k \in \mathscr{I}$. Si ha dunque il seguente

Lemma 4. $(\mathscr{A}_k^\bullet \xrightarrow{\alpha_k} \mathscr{A}^*)_{k\in\mathscr{I}}$ *è il limite diretto di* $\boldsymbol{T}^*$.

Dimostrazione. In base al Lemma 2, segue banalmente dal teorema 11.5.7 di [**3**].

4. - Verità delle SH.

Nel presente paragrafo ci occuperemo della verità di una SH nel limite diretto di una famiglia diretta iniettiva di strutture. Allo scopo premettiamo la seguente

Osservazione. Sia $g\colon X \to A^n$ un morfismo (in $\mathscr{K}$). Per ogni $k \in \mathscr{I}$ indichiamo con $\xi_k\colon X_k \to X$, $g_k\colon X_k \to A_k^n$ i morfismi canonici del pullback del seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} & A_k^n \arrow[d, "\alpha_k^h"] \\ X \arrow[r, "g"'] & A^n \end{tikzcd}$$

Si ha $\alpha_h^n j_{hk}^n g_k = g\xi_k$, se $k \leqslant h$; esisterà allora un unico morfismo $\lambda_{hk}\colon X_k \to X_h$ tale che $\xi_h \lambda_{hk} = \xi_k$ e $g_h \lambda_{hk} = j_{hk}^n g_k$. Allora $S\colon \mathscr{I} \to \mathscr{K}$ definito dalle relazioni

$$S(k) = X_k\,, \qquad S(k \to h) = \lambda_{hk}$$

è un funtore e ha come limite diretto $(X_k \xrightarrow{\xi_k} X)_{k\in\mathscr{I}}$.

Sia $(\mathscr{A}_k^\bullet)_{k\in\mathscr{I}}$ una famiglia uniforme di interpretazioni e sia $(\mathscr{A}_k^\bullet \xrightarrow{\alpha_k} \mathscr{A}^*)_{k\in\mathscr{I}}$ limite diretto. Per ogni $g\colon X \to A^n$ consideriamo la famiglia di morfismi $(g_k)_{k\in\mathscr{I}}$ costruiti come nell'Osservazione precedente. Si ha allora il seguente

Lemma 5. *Sia H una* SH *atomica di rango n; allora $\models_{\overline{\mathscr{A}^*}} H[g]$ se e solo se $\models_{\overline{\mathscr{A}_k^*}} H[g_k]$ per ogni $k \in \mathscr{I}$.*

Dimostrazione. Sia $H = P(t_1, t_2, \ldots, t_m)$. Supponiamo che $\models_{\overline{\mathscr{A}_k^*}} H[g_k]$ per ogni $k \in \mathscr{I}$, cioè che $\{t_1^{(k)}, t_2^{(k)}, \ldots, t_m^{(k)}\} g_k \leqslant u_k$, dove $t_i^{(k)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, è l'interpretazione in $\mathscr{A}_k^\bullet$ del termine t_i e $u_k\colon R_k \rightarrowtail A_k^m$ è l'interpretazione in $\mathscr{A}_k^\bullet$ del predicato P. Allora, per ogni $k \in \mathscr{I}$, esisterà un morfismo $x_k\colon X_k \to R_k$ tale che

$$u_k x_k = \{t_1^{(k)}, t_2^{(k)}, \ldots, t_m^{(k)}\} g_k\,. \tag{5}$$

Indicata con $u\colon R \rightarrowtail A^m$ l'interpretazione del predicato P in $\mathscr{A}^*$, sappiamo che $(R_k \xrightarrow{\varrho_k} R)_{k\in\mathscr{I}}$ è limite diretto; quindi, poichè $(X_k \xrightarrow{\varrho_k \xi_k} R)_{k\in\mathscr{I}}$ è una famiglia compatibile per S, esisterà un unico morfismo $x\colon X \to R$ tale che

$$\varrho_k x_k = x\xi_k \,. \tag{6}$$

Indicata ancora con t_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, l'interpretazione in $\mathscr{A}^*$ del termine t_i, da (6) attraverso semplici calcoli segue

$$ux = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\} g \,, \tag{7}$$

quindi $\{t_1, t_2, \ldots, t_m\} g \leqslant u$, cioè $\models_{\mathscr{T}^*} H[g]$.

Viceversa, supponiamo che $\models_{\mathscr{T}^*} H[g]$, cioè che esista un morfismo $x\colon X \to R$ tale che valga la (7), Allora, per ogni $k \in \mathscr{I}$, sarà $ux\xi_k = \alpha_k^m \{t_1^{(k)}, t_2^{(k)}, \ldots, t_m^{(k)}\} g_k$, quindi, poichè (4) è un pullback, esisterà un morfismo che verifica la (5).

Teorema. *Sia* $(\mathscr{A}_k)_{k\in\mathscr{I}}$ *una famiglia diretta iniettiva di strutture e* $(\mathscr{A}_k \xrightarrow{\alpha_k} \mathscr{A})_{k\in\mathscr{I}}$ *il suo limite diretto. Sia* H *una* SH: *se* H *è uniformemente vera in* $(\mathscr{A}_k)_{k\in\mathscr{I}}$ (cfr. [4]$_2$), *allora* H *è vera in* $\mathscr{A}$.

Dimostrazione. Sia $(\mathscr{A}_k^*)_{k\in\mathscr{I}}$ una famiglia uniforme di interpretazioni, associata alla famiglia $(\mathscr{A}_k)_{k\in\mathscr{I}}$, nella quale H sia vera, e sia $(\mathscr{A}_k^* \xrightarrow{\alpha_k} \mathscr{A}^*)_{k\in\mathscr{I}}$ limite diretto. Dal Lemma 5, con considerazioni analoghe a quelle del teorema 1 di [4]$_2$, segue che H è vera in $\mathscr{A}^*$; quindi, per il Lemma 4 si ha l'asserto.

Bibliografia

[1] B. Mitchell, *Theory of Categories*, Academic Press, New York 1965.

[2] B. Pareigis, *Categories and Functors*, Academic Press, New York 1970.

[3] H. Schubert, *Categories*, Springer-Verlag, Berlin 1972.

[4] M. Servi: [•]$_1$ *Una questione di teoria dei modelli nelle categorie con prodotti finiti*, Matematiche (Catania) **26** (1971), 307-324; [•]$_2$ *Su alcuni funtori che conservano le* SH, Riv. Mat. Univ. Parma (3) **3** (1974), 291-308.

Summary

In a category in which direct limits commute with finite limits, if an SH *formula* H *is uniformly true in a direct family of structures, then it is true in its direct limit.*

* * *