Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 291-294

ANITA DALL'AGLIO ANGELOTTI (*)

Un'osservazione sul concetto di forte stabilità (**)

Introduzione.

In [3] A. Markov, introdotto il concetto di «forte stabilità» per una funzione vettoriale $X: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^n$, prova che la condizione di forte stabilità implica la quasiperiodicità di una funzione X limitata e continua. Inoltre, poichè una soluzione quasiperiodica di certi sistemi differenziali (v. n. **2**, Teor. II) è anche fortemente stabile, risulta che la forte stabilità è condizione caratteristica di certi moti quasiperiodici.

Recentemente, C. Risito in [5] definisce un tipo di stabilità più debole di quella di Markov, la T-stabilità nel passato e nel futuro, e dimostra che una soluzione, limitata e T-stabile nel passato e nel futuro, di un sistema differenziale T-periodico è certamente quasiperìodica.

A conferma del risultato ottenuto in [5], in questa nota si osserva che almeno nel caso scalare la condizione di forte stabilità data da Markov porta ad una classe assai ristretta di funzioni quasiperiodiche, quali sono le funzioni periodiche costanti (v. n. **3**). Si mostra poi che per un'equazione differenziale periodica le soluzioni (limitate) fortemente stabili sono soltanto le costanti, mentre le soluzioni (limitate) T-stabili nel passato e nel futuro sono, in generale, quasiperiodiche oscillanti.

2. - Alcuni richiami.

Per una funzione vettoriale $X: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^n$ si ha (cfr. [3]) la seguente

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Ricevuto: 11-I-1978.

Definizione. La funzione $X(t)$ si dice *fortemente stabile secondo Markov* (brevemente *fortemente stabile*) se

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) \quad (\forall t_1, t_2 \in \boldsymbol{R}\colon \|X(t_1) - X(t_2)\| < \delta)\ ,$$

$$\|X(t + t_1) - X(t + t_2)\| < \varepsilon \quad \forall t \in \boldsymbol{R}\,. \tag{2.1}$$

In [**3**] (v. pp. 712 e 717) Markov dimostra i teoremi seguenti.

Teorema I. *Una funzione $X(t)$ continua, limitata e fortemente stabile è quasi periodica* (1) *(secondo Bohr).*

Teorema II. *Se $X(t)$ è soluzione quasi periodica del sistema differenziale autonomo $\dot{X} = f(x)$ con $f(x)$ globalmente lipschitziana, $X(t)$ è necessariamente fortemente stabile.*

3. – Vado a provare che per una funzione *scalare* $X(t)\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ il Teorema I di Markov si riduce alla seguente

Proposizione I. *Ogni funzione scalare $X(t)$ continua, limitata e fortemente stabile è una funzione periodica costante.*

Dim. In virtù del Teorema I, dalle ipotesi segue subito che $X(t)$ è quasi periodica; dico che allora esistono almeno due istanti t_1 e $t_2 \in \boldsymbol{R}$ ($t_1 \neq t_2$, ad es. $t_1 < t_2$) tali che

$$X(t_1) = X(t_2)\,. \tag{3.1}$$

Invero, se ciò non fosse la funzione $X(t)$ risulterebbe strettamente monotona in $\boldsymbol{R}$, il che è assurdo perchè $X(t)$ è quasiperiodica.

Considero ora una successione di numeri strettamente positivi $\{\varepsilon_n\}$ convergente a zero. Dalla (3.1), essendo $X(t)$ fortemente stabile, segue

$$\forall t \in \boldsymbol{R}\,, \quad \|X(t + t_1) - X(t + t_2)\| < \varepsilon_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)\,. \tag{3.2}$$

---

(1) Una funzione $X(t)$ (reale o complessa) definita e continua per ogni valore reale di t, si chiama *quasi periodica* (*secondo Bohr*) (brevemente *quasi-periodica*) se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, l = l(\varepsilon, X(t))$, tale che ogni intervallo dell'asse t avente ampiezza l, contiene almeno un valore τ (detto *quasi-periodo*) per il quale si ha

$$\|X(t + \tau) - X(t)\| \le \varepsilon \qquad \forall\, t \in \boldsymbol{R}\,.$$

Poichè $\varepsilon_n \to 0$ per $n \to +\infty$, risulta da (3.2)

$$\forall t \in \boldsymbol{R}, \qquad X(t+t_1) = X(t+t_2), \tag{3.3}$$

cioè $X(t)$ è *periodica* di periodo $(t_2 - t_1) > 0$.

Per provare che $X(t)$ è, in particolare, una funzione periodica costante, verifico che non esiste per $X(t)$ un periodo minimo positivo. Ragiono per assurdo: abbia $X(t)$ il periodo (positivo minimo) T. Nell'intervallo chiuso $[0, T]$, poichè $X(0) = X(T)$ e $X(t)$ non è costante, dalla continuità di $X(t)$ discende l'esistenza di almeno due istanti t_1' e t_2', con $0 < t_1' < t_2' < T$, tali che $X(t_1') = X(t_2')$. Ma questa relazione è analoga alla (3.1); pertanto, ripetendo il procedimento già fatto, si viene a concludere che la funzione $X(t)$ è periodica di periodo $t_2' - t_1' < T$, in contrasto con l'ipotesi che T sia periodo minimo di $X(t)$.

Osservazioni. (I) Una funzione quasi periodica non è necessariamente fortemente stabile. Ad esempio, la funzione $\sin t$, è periodica e non è fortemente stabile in quanto, pur annullandosi negli istanti 0 e π, non soddisfa la (2.1) essendo: $|\sin t - \sin(t+\pi)| = 2|\sin t|$.

(II) Nel caso vettoriale, esistono funzioni continue, fortemente stabili quasi periodiche *oscillanti.*

Ad esempio in $\boldsymbol{R}^2$, la funzione $X(t)$ di componenti $X_1(t) = \sin t$, $X_2(t) = \cos t$ è periodica oscillante di periodo 2π ed è fortemente stabile, come segue dal fatto che $X(t)$ soddisfa la (2.1) per $\delta = \varepsilon$ (2).

4. - Applicazioni.

Per l'equazione differenziale

$$\dot{X} = f(X), \tag{4.1}$$

dove $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ è una funzione scalare localmente lipschitziana, si ha la seguente

Proposizione II. *Ogni soluzione limitata e fortemente stabile di* (4.1) *è costante.*

Ciò segue dalla Proposizione I.

---

(2) Invero, in norma Euclidea, risulta

$$\{[\sin t_1 - \cos t_1]^2 + [\sin t_2 - \cos t_2]^2\}^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \{[\sin(t+t_1) - \cos(t+t_1)]^2 + [\sin(t+t_2) - \cos(t+t_2)]^2\}^{\frac{1}{2}} \qquad \forall t \in \boldsymbol{R}.$$

Quando si tenga presente il Teorema II di Markov (v. n. **2**) la precedente affermazione diventa

Proposizione II'. *Ogni soluzione quasiperiodica di* (4.1) *è costante.*

Osservazioni. (I) In virtù della Prop. I, risulta che l'affermazione della Prop. II, si estende al caso dell'equazione differenziale scalare

$$\dot{X} = f(t, X)\,, \tag{4.2}$$

dove $f\colon \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ è una funzione continua e localmente lipschitziana.

(II) Se in (4.2) la funzione $f(t, X)$ è periodica oscillante le soluzioni limitate e fortemente stabili rappresentano soluzioni eccezionali [3] di (4.2) in quanto per la Prop. II sono funzioni periodiche costanti. Allora, in virtù dell'affermazione ottenuta da J. L. Massera in [4], queste soluzioni costanti sono le *uniche* soluzioni eccezionali di (4.2).

---

[3] Una soluzione periodica di (4.2) si dice *eccezionale* se essa ha un periodo a rapporto irrazionale con il periodo di $f(t, x)$.

Bibliografia

[1] A. M. Fink, *Almost periodic differential equations*, Springer-Verlag, Berlin 1974.

[2] T. Yoshizawa, *Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions*, Springer-Verlag, Berlin 1975.

[3] A. Markov, *Stabilität im Liapounoffschen Sinne und Fastperiodicität*, Math. Z. **36** (1933), 708-738.

[4] J. L. Massera, *Observaciones sobre las solucione periodicas de ecuaciones diferenciales*, Publ. Inst. Mat. y Est. Fac. Ing. Montevideo **2** (1950), 43-51.

[5] C. Risito, *On Markov stability*, in corso di pubblicazione in Proc. Amer. Math. Soc.

[6] G. Sansone e R. Conti, *Equazioni differenziali non lineari*, Cremonese Roma 1956.

Summary

It is proved that, every continuous, bounded, strongly stable scalar function, is a periodic constant function. Moreover the strongly stable and bounded solutions of scalar differential equations are only the constant solutions.

* * *