Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 395-402

BIANCA MANFREDI (*)

Asperiodicità e asquasiperiodicità (**)

1. - Introduzione

Secondo M. Fréchet [2] una funzione continua $y(t)_{t\geqslant t_0}$ è « asintoticamente periodica » (brev. *asperiodica*) quando è somma di una funzione continua periodica e di una funzione continua che tende a zero per t tendente a $+\infty$; analogamente, una funzione continua $y(t)_{t\geqslant t_0}$ è « asintoticamente quasi periodica » (brev. *asquasiperiodica*) quando è la somma di una funzione continua quasiperiodica e di una funzione continua che tende a zero per t tendente a $+\infty$.

In [4], indicata con $\mathscr{K}_{+\infty}$ la classe di tutte e sole le funzioni della variabile t definite in intorni di $+\infty$ ed ivi reali, univoche, limitate e continue, una funzione $y(t)\in\mathscr{K}_{+\infty}$ viene definita « asperiodica nel continuo in $+\infty$, di asperiodo τ» quando

$$(*)\quad \lim_{t\to+\infty}\big(y(t+m\tau)-y(t)\big)=0\,,\qquad \text{uniformemente rispetto ad } m=1,2\,...\,,$$

Questa relazione limite nel continuo risulta poi equivalente alla seguente relazione limite nel discreto (essendo $\nu=1,2,...$)

$$(*)'\quad \lim_{\nu\to+\infty}\big(y(t+(\nu+m)\tau)-y(t+\nu\tau)\big)=0\,,$$

uniformemente $\begin{array}{l}\text{rispetto a } t\geqslant -T \text{ (con } T>0 \text{ e grande a piacere)},\\ \text{rispetto ad } m=1,2,\dots .\end{array}$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 29-V-1978.

In questa nota, osservato che le funzioni asperiodiche e asquasiperiodiche sono uniformemente continue in futuro, viene proposto un criterio di asquasiperiodicità e, in particolare, di asperiodicità per le funzioni di $\mathscr{K}_{+\infty}$ uniformemente continue. Questo criterio, che si riallaccia alla condizione $(*)'$ e che si estende alle funzioni vettoriali in spazi a dimensione finita, implica le condizioni di asperiodicità e di asquasiperiodicità secondo Fréchet, ed appare proficuo nello studio del comportamento delle vibrazioni nei problemi di Meccanica non lineare con termine forzante periodico. Infatti, in conseguenza di alcune osservazioni qui rilevate, l'applicazione del criterio alle soluzioni di sistemi differenziali periodici porta ad affermare [1] l'esistenza di oscillazioni equiquasiperiodiche (in numero infinito e nessuna periodica di periodo eguale al periodo del sistema dinamico) e, in particolare, alla esistenza di un'armonica o di subarmoniche (in numero finito, e, per una certa classe di sistemi [2], ne viene individuato il periodo minimo). Si osserva infine che queste conclusioni sono state ottenute senza ipotesi di unicità e di stabilità sulle soluzioni del sistema differenziale.

2. – Si considera, qui, *la classe* $\mathscr{K}^*_{+\infty}$ di tutte e sole le funzioni, di una variabile t, definite in intorni di $+\infty$ ed ivi reali, univoche, limitate e uniformemente continue. Per le funzioni di $\mathscr{K}^*_{\infty}$ vale il seguente

Criterio (di asquasiperiodicità e di asperiodicità). *Sia $y(t)_{t\geqslant t_0}$ una funzione di $\mathscr{K}^*_{+\infty}$ e sia τ un numero positivo. Presa ad arbitrio una successione divergente di interi positivi $\{\nu_{k'}\}$ con $\nu_{k'}<\nu_{k'+1}$ $(k'=1,2,\ldots)$, sia $\{\nu_k\}\in\{\nu_{k'}\}$ una successione (certamente esistente) tale che*

$$(1)\qquad \lim_{k\to+\infty} y(t+\nu_k\tau) \quad \textit{esiste uniforme per } t_0\leqslant t<t_0+\tau\,.$$

Allora, (a) *la funzione $y(t)$ è asquasiperiodica se, e solo se,*

$$(2)\qquad \lim_{k\to+\infty} y(t+(\nu_k+m)\tau)_{t_0\leqslant t<t_0+\tau} \quad \textit{esiste uniforme per } m=0,1,2,\ldots;$$

(b) *la funzione $y(t)$ e asperiodica nel continuo in $+\infty$, di asperiodo τ se, e solo se,*

$$(3)\qquad \lim_{k\to+\infty}\big(y(t+(\nu_k+m)\tau)-y(t+\nu_k\tau)\big)_{t_0\leqslant t<t_0+\tau}=0\,,$$

$$\textit{uniformemente per } m=0,1,2,\ldots.$$

---

[1] Cfr. S. Marchi, *Soluzioni quasi periodiche di sistemi differenziali quasi periodici non autonomi e non lineari*, Tesi di Laurea, Ist. di Mat. Univ. Parma (11-VII-1978).

[2] Precisamente per i sistemi differenziali del tipo $\dot{x}_i=f_i(x)+\varphi_i(t)$, con $i=1,\ldots,n$; $x=(x_1,\ldots,x_n)$; $\varphi_i(t)$ periodica (di periodo $\tau>0$).

Dim. (a)' *L'ipotesi* (2) *del Criterio implica l'asquasiperiodicità della funzione* $y(t)$. Osservo subito che, poichè $y(t)$ appartiene alla classe $\mathscr{K}^*_{+\infty}$, la successione $\{y(t+\nu\tau)\}$ è formata da funzioni equilimitate ed equicontinue; onde, in virtù del teorema di Ascoli, vale la relazione (1). Inoltre, quando si pensi di esprimere ogni istante $t' \geqslant t_0 + \tau$ nella forma $t' = m'\tau + t$, con $m' \geqslant 1$ e $t \in [t_0, \ldots, t_0 + \tau[$, si constata facilmente che l'ipotesi (2) implica l'estensione della relazione (1) a tutto l'intervallo illimitato $t \geqslant t_0$. Pertanto, in conseguenza dell'ipotesi (2), si ha (indicando con N^+ l'insieme dei numeri interi positivi)

$$(4)\qquad \forall\{\nu_{k'}\} \subset N^+,\quad \exists\{\nu_k\} \in \{\nu_{k'}\}\colon \lim_{k\to+\infty} y(t+\nu_k\tau) \qquad \text{esiste uniforme per } t \geqslant t_0 .$$

Sia ora $\{a_{k''}\}$ una successione (scelta ad arbitrio) divergente di numeri reali e positivi, ordinata in modo crescente; per ogni suo elemento vale la decomposizione seguente (essendo $\nu_{k''} \in N^+$)

$$a_{k''} = \nu_{k''}\tau + b_{k''}, \qquad (\nu_{k''} < \nu_{k''+1},\ t_0 \leqslant b_{k''} < t_0 + \tau,\ k'' = 1, 2, \ldots).$$

Poichè l'insieme $\{b_{k''}\}$ è limitato, è possibile estrarre da esso un insieme $\{b_{k'}\} \in \{b_{k''}\}$ convergente (a un numero reale dell'intervallo $[t_0 \ldots t_0 + \tau[$) e al quale facciamo corrispondere la successione

$$a_{k'} = \nu_{k'}\tau + b_{k'} \qquad (\nu_{k'} < \nu_{k'+1},\ t_0 \leqslant b_{k'} < t_0 + \tau,\ k' = 1, 2, \ldots),$$

che, manifestamente, appartiene a $\{a_{k''}\}$. D'altra parte dalla successione di interi positivi $\{\nu_{k'}\}$ è possibile estrarre una successione $\{\nu_k\}$ in modo che valga (4). Allora, la corrispondente successione $\{a_k\} \in \{a_{k'}\} \in \{a_{k''}\}$ data da

$$a_k = \nu_k\tau + b_k, \qquad (\nu_k < \nu_{k+1},\ t_0 \leqslant b_k < t_0 + \tau,\ k = 1, 2, \ldots),$$

è tale che, contemporaneamente, valgono le due relazioni

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\lim_{k\to+\infty} y(t+\nu_k\tau) && \text{esiste uniforme per } t \geqslant t_0, \\ &\lim_{k\to+\infty} b_k && \text{esiste in } t_0 \leqslant t < t_0 + \tau . \end{aligned}$$

Queste affermazioni (5) permettono di provare l'uniforme convergenza della successione $\{y(t+a_k)\}$ nell'intervallo illimitato $t \geqslant t_0$. Invero, presi ad arbitrio due elementi, a_{k_r} e a_{k_s}, appartenenti a $\{a_k\}$ si ha

$$(6)\qquad \begin{aligned} |y(t+a_{k_r}) - y(t+a_{k_s})| &\equiv |y(t+\nu_{k_r}\tau + b_{k_r}) - y(t+\nu_{k_s}\tau + b_{k_s})| \\ &\leqslant |y(t+\nu_{k_r}\tau + b_{k_r}) - y(t+\nu_{k_r}\tau + b_{k_s})| \\ &\quad + |y(t+\nu_{k_r}\tau + b_{k_s}) - y(t+\nu_{k_s}\tau + b_{k_s})| . \end{aligned}$$

Ora, tenendo presente che $y(t)_{t \geqslant t_0}$ è uniformemente continua (e quindi tale è anche ogni sua traslata a parametro positivo) dalle (5) segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $K = K(\varepsilon)$, indipendente da t, tale che per ogni coppia di indici $k_r, k_s > K$ si ha

$$|y(t + \nu_{k_r}\tau + b_{k_r}) - y(t + \nu_{k_r}\tau + b_{k_s})| < \varepsilon ,$$

$$|y(t + \nu_{k_r}\tau + b_{k_s}) - y(t + \nu_{k_s}\tau + b_{k_s})| < \varepsilon ,$$

onde, in virtù di (6), l'uniforme convergenza di $\{y(t + a_k)\}$ per $t \geqslant t_0$.

Allora, per l'arbitrarietà della successione scelta, risulta: la data funzione $y(t)_{t \geqslant t_0}$ è tale che ogni successione del tipo $\{y(t + a_h)\}$, con $\{a_h\}$ a termini positivi e divergente, contiene almeno una successione che converge uniformemente per $t \geqslant t_0$. Ciò caratterizza [**3**] l'asquasiperiodicità della funzione $y(t)_{t \geqslant t_0}$.

(a)″ *L'asquasiperiodicità di* $y(t)_{t \geqslant t_0}$ *implica la relazione* (2). Questa affermazione discende dalla condizione caratteristica di asquasiperiodicità richiamata alla fine di (a)′. Invero, poichè $y(t)_{t_0}$ è asquasiperiodica, la relazione (1) vale per ogni $t' \geqslant t_0$; si ha così la relazione

$$\lim_{k \to +\infty} y(t' + \nu_k \tau) \qquad \text{esiste uniforme per } t' \geqslant t_0 ;$$

se si pone $t' = m\tau + t$, essendo $m \geqslant 1$ e $t_0 \leqslant t < t_0 + \tau$, si ottiene proprio la (2).

(b)′ *L'ipotesi* (3) *del teorema implica l'asperiodicità nel continuo in* $+\infty$, *di asperiodo* τ, *della funzione* $y(t)_{t \geqslant t_0}$. Poichè la (1) e l'ipotesi (3) implicano la (2) e quindi la relazione (4), posto

$$\lim_{k \to +\infty} y(t + \nu_k \tau) = \lambda(t) \qquad (t \geqslant t_0) , \tag{7}$$

risulta [leggendo in (7) $t + \tau$ al posto di t]

$$\lim_{k \to +\infty} y(t + (\nu_k + 1)\tau) = \lambda(t + \tau) , \qquad \text{uniformemente per } t \geqslant t_0 ;$$

quindi, in virtù dell'ipotesi (3), si ha $\lambda(t + \tau) = \lambda(t)$ $(t \geqslant t_0)$. Esiste pertanto una funzione d'accumulazione della successione $\{y(t + \nu\tau)\}$ periodica di periodo τ; ciò basta per assicurare (v. [**5**]$_1$) che

$$\lim_{\nu + \infty} y(t + \nu\tau) \qquad \text{esiste uniforme per } t \geqslant t_0 . \tag{8}$$

Allora, in virtù della affermazione (α) e quindi (β) del teorema 4 di [**4**] la funzione $y(t)_{t \geqslant t_0}$ è asperiodica nel continuo in $+\infty$, di asperiodo τ.

(b)$''$ *L'asperiodicità nel continuo in* $+\infty$, *di asperiodo* τ, *della funzione* $y(t)_{t \geqslant t_0}$ *implica le relazioni* (2) *e* (3). Invero, per l'affermazione (β) e quindi (α) del citato teorema 4 di [**4**], se $y(t)_{t \geqslant t_0}$ è asperiodica nel continuo in $+\infty$, di asperiodo τ, vale la relazione (8). Allora osservato che in (2) gli istanti $t + m\tau$, con $t_0 \leqslant t < t_0 + \tau$ e $m = 0, 1, 2, \ldots$, esauriscono l'intervallo $t \geqslant t_0$, vale la relazione (2); inoltre, poichè il limite figurante in (8) risulta (v. teorema 3 di [**4**]) una funzione periodica di periodo τ, vale anche la relazione (3).

Il Criterio è così concluso.

3. – Alcune osservazioni.

I. – Per una funzione $y(t) \in \mathscr{K}^*_{+\infty}$ che soddisfa la relazione (2) vale la decomposizione (unica)

$$y(t) = p(t) + q(t)\,, \qquad \lim_{t \to +\infty} q(t) = 0\,, \tag{9}$$

ove $p(t)$ è una funzione quasiperiodica. Invero, dalla (2) segue l'affermazione figurante alla fine della parte (a)$'$ della Dim., e questa affermazione implica la (9) (v. [**3**], p. 21). Viceversa, se per una funzione $y(t) \in \mathscr{K}^*_{+\infty}$ vale la decomposizione (9), poichè (9) implica (v. [**3**], p. 23) la soprarichiamata affermazione, la funzione $y(t)$ verifica (v. parte (a)$''$ della Dim.) la condizione (2).

Ora, la relazione (9) coincide con la definizione di asquasiperiodicità secondo Fréchet (v. Introduzione); pertanto nell'ambito delle funzioni di $\mathscr{K}^*_{+\infty}$, *la relazione* (2) *è equivalente alla definizione di asquasiperiodicità secondo Fréchet.*

Ancora, *la relazione* (3) *è equivalente alla definizione di asperiodicità secondo Fréchet*, in quanto la (3) implica la definizione ($*$) dell'Introduzione e viceversa (v. parte (b)$'$ della Dim.), essendo poi la ($*$) equivalente alla definizione di asperiodicità secondo Fréchet, come è stato provato in [**7**].

II. – Procedendo come in [**5**]$_2$, dalla relazione (9) segue che il limite figurante nella condizione (2) è la funzione quasiperiodica data da

$$\lambda(t) = \lim_{k \to +\infty} p(t + \nu_k \tau)\,. \tag{10}$$

III. – Se, e soltanto se, vale la condizione (3) *la successione di funzioni* $\{y(t + \nu\tau)\}$, *con* $y(t) \in \mathscr{K}^*_{+\infty}$, *è uniformemente convergente per* $t \geqslant t_0$. Invero la (3) implica la (8) e viceversa.

IV. – Non valendo (3), se $\bar{K} > 1$ è il minimo intero tale che (essendo $\bar{\tau} = \bar{K}\tau$)

$$(3)' \quad \lim_{k \to +\infty} \left(y(t + (\nu_k + m)\bar{\tau}) - y(t + \nu_k \bar{\tau})\right)_{t_0 \leqslant t < t_0 + \bar{\tau}} = 0 ,$$

uniformemente per $m = 0, 1, \ldots,$

la successione di funzioni $\{y(t + \nu\tau)\}$, *per* $t \geqslant t_0$, *ha* $\bar{K}$, *e soltanto* $\bar{K}$, *accumulazioni distinte, tutte periodiche di periodo* $\bar{\tau}$ *e non di periodi* $\tau, 2\tau, \ldots, (\bar{K}-1)\tau$. Vale anche il viceversa. Invero da (3)′ segue ([3]) che la successione $\{y(t + \nu\bar{\tau})\} \subset \{y(t + \nu\tau)\}$ converge uniformemente per $t \geqslant t_0$ a una funzione periodica $\lambda(t)$ di periodo $\bar{\tau}$ e non di periodi $\tau, 2\tau, \ldots, (\bar{K}-1)\tau$. Ne segue (v. [**5**]$_1$, p. 156) l'esistenza di $\bar{K}$, e soltanto $\bar{K}$, accumulazioni distinte date dalle funzioni $\lambda(t)$, $\lambda(t + \tau), \ldots, \lambda(t + (\bar{K}-1)\tau)$. Viceversa, se la successione di funzioni $\{y(t + \nu\tau)\}$ ha $\bar{K}$ accumulazioni distinte periodiche di periodo $\bar{\tau} = \bar{K}\tau$ e non di periodi $\tau, 2\tau, \ldots (\bar{K}-1)\tau$, la sottosuccessione $\{y(t + \nu\bar{\tau})\} \subset \{y(t + \nu\tau)\}$ è uniformemente convergente per $t \geqslant t_0$ (v. [**4**], p. 284), onde (v. osservazione III) vale la condizione (3).

V. – Se vale (2) e, per alcuno intero $\bar{K} \geqslant 1$, non vale la relazione (3), *la successione di funzioni* $\{y(t + \nu\tau)\}$ *ha un numero infinito di accumulazioni distinte. Queste accumulazioni, definite su tutto l'asse reale ed ivi non periodiche di periodo* $\bar{K}\tau$ $(\bar{K} = 1, 2, \ldots)$, *sono equiquasiperiodiche* ([4]). Le accumulazioni di $\{y(t + \nu\tau)\}$ sono infatti definite su tutto l'asse reale in virtù del teorema III di [**5**]$_1$; sono in numero infinito e nessuna di esse è periodica di periodo $\bar{K}\tau$ $(\bar{K} = 1, 2 \ldots)$ in conseguenza dell'osservazione IV; sono infine equiquasiperiodiche poichè la relazione (2) esprime la proprietà G' di [**6**] che è equivalente alla definizione di equiquasiperiodicità data nell'annotazione ([4]). Osserviamo, d'altra parte, che questa equiquasiperiodicità può essere qui giustificata dal fatto che la relazione (2) implica l'eguaglianza (10), dove nel secondo membro compare una successione di funzioni equiquasiperiodiche, essendo le traslate di una unica funzione quasiperiodica.

Ad esempio, sia $y(t) = \operatorname{sen} t$.

([3]) Basta procedere come nella parte (b)′ della Dim.

([4]) Le funzioni $\varphi(t)$ di un insieme $\mathscr{I}$, definite su tutto l'asse reale ed ivi continue, si dicono *equiquasiperiodiche* quando per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $l = l(\varepsilon, \mathscr{I}) > 0$ in modo che ogni intervallo temporale di grandezza l contiene almeno un $\tau' = \tau'(\varepsilon)$ tale che $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall \varphi \in \mathscr{I}$, $|\varphi(t + \tau') - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon$.

Per $\tau = (p/q)2\pi$, con p e q numeri interi, primi fra loro e $p < q$, la successione di funzioni $\{\text{sen}\,(t + \nu\tau)\}$ ha, come si vede facilmente, le seguenti q accumulazioni (per iterazione) distinte

$$\text{sen}\, t, \qquad \text{sen}\,(t + \tau), \ldots, \text{sen}\,\big(t + (q-1)\tau\big),$$

tutte periodiche di periodo $\bar{\tau} = q\tau$, a conferma dell'osservazione IV.

Per $\tau = 1$, la successione di funzioni $\{\text{sen}\,(t + \nu\tau)\} \equiv \{\text{sen}\,(t + \nu)\}$ ha infinite accumulazioni distinte. Infatti, se fossero in numero finito $\bar{K}$, la successione di funzioni $\{\text{sen}\,(t + \nu\bar{K}\} \subset \{\text{sen}\,(t + \nu)\}$ sarebbe uniformemente convergente su tutto l'asse reale (v. osservazione III), onde la differenza

$$\text{(11)} \qquad \text{sen}\,\big(t + (s+1)\bar{K}\big) - \text{sen}\,(t + s\bar{K}) = 2\cos\Big(t + s\bar{K} + \frac{\bar{K}}{2}\Big)\,\text{sen}\,\frac{\bar{K}}{2},$$

con s intero qualunque, dovrebbe tendere a zero per $s \to \infty$, uniformemente rispetto a t e ciò è manifestamente assurdo ([5]).

Ora, se $\lambda(t)$ è una qualunque delle accumulazioni di $\{\text{sen}\,(t + \nu)\}$ si ha

$$\lambda(t) = \lim_{k \to +\infty} \text{sen}\,(t + \nu_k), \qquad \text{uniformemente per } t > -\infty,$$

cioè

$$\lambda(t) = \lim_{k \to +\infty} (\text{sen}\,\nu_k \cos t + \cos \nu_k\, \text{sen}\, t).$$

Ne segue

$$\lambda(t) = \big(\lim_{k \to +\infty} \text{sen}\,\nu_k\big)\cos t + \big(\lim_{k \to +\infty} \cos \nu_k\big)\,\text{sen}\, t,$$

cioè

$$\text{(12)} \qquad \lambda(t) = \lambda(0)\cos t + \lambda(\pi/2)\,\text{sen}\, t.$$

Per l'arbitrarietà di $\lambda(t)$, questa relazione (12) esprime che le accumulazioni della successione di funzioni $\{\text{sen}\,(t + \nu)\}$ sono equiperiodiche e nessuna di esse è periodica di periodo $1, 2, 3, \ldots$. Ciò conferma l'osservazione V.

VI. – Poichè una funzione vettoriale definita in uno spazio ad n-dimensioni è asperiodica o asquasiperiodica, quando è tale ogni sua componente, il criterio di asperiodicità e di asquasiperiodicità proposto si estende anche alle funzioni vettoriali.

([5]) Invero, da (11) seguirebbe $\cos(t + s\bar{K} + \bar{K}/2) \xrightarrow[s \to +\infty]{} 0$ uniformemente rispetto a t, il che è impossibile.

VII. – In un prossimo lavoro si mostrerà come l'applicazione del teorema (qui provato) a sistemi differenziali periodici del tipo $\dot{x}_i = f_i(x) + \varphi_i(t)$ $(i = 1, \dots, n;\ x = (x_1, \dots, x_n))$ conduca ad individuare certe condizioni almeno sufficienti sulle funzioni f_i e φ_i $(i = 1, \dots, n)$ per l'esistenza di soluzioni asperiodiche o, più in generale, asquasiperiodiche. Queste soluzioni, portano (v. (8) e (10)) a soluzioni periodiche (e necessariamente armoniche o subarmoniche, avendo il periodo minimo eguale al periodo del sistema o un suo multiplo) o, più in generale, a soluzioni quasiperiodiche e quindi a moti ricorrenti.

Bibliografia

[1] A. M. Fink, *Almost periodic differential equations*, Springer-Verlag, New York 1974.

[2] M. Fréchet, *Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques*, Rev. Sci. **79** (1941), 341-354.

[3] T. Yoshizawa, *Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions*, Springer-Verlag, New York 1975.

[4] A. Mambriani e B. Manfredi, *Su le funzioni asperiodiche in* $+\infty$ (I), Riv. Mat. Univ. Parma (2) **12** (1971), 281-301.

[5] B. Manfredi: $[\bullet]_1$ *Su le progressioni di aritmeticità aventi funzioni d'accumulazione periodiche*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **8** (1967), 149-159; $[\bullet]_2$ *Su l'esistenza di certi moti quasiperiodici*, Actas del V Congreso de la Agrupación de Matemáticos de Expresión Latina (Palma de Mallorca, 19-23 septiembre 1977), 470-474.

[6] S. Marchi, *Alcune proprietà su gli insiemi di funzioni asquasiperiodiche*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **6** (1980) (in corso di stampa).

[7] C. Risito, *Criteri di asperiodicità nel continuo in* $+\infty$, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **2** (1976), 387-396.

Summary

A new definition (or criterium) of asymptotically almost periodicity and, in particular, of asperiodicity in $+\infty$, *of asperiod* τ [**4**] *is given in this paper. This definition refers to a given bounded and uniformly continuous function (such as any asymptotically almost periodic function) and in connection with a given parameter (such as, for example, the period* τ *of the differential system relative to a mechanical problem).*

Because of the results already obtained [**5**], *this criterium leads to the following conclusion: if a solution of a differential* τ*-periodic system is asymptotically almost periodic, but not asperiodic of asperiod* τ *(or of a multiple of its) there are infinitely many solution, all of them equi- almost-periodic but non periodic of* τ *period (or of a multiple of its).*

* * *