Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 433-441

CORRADO SCARAVELLI (*)

Sulle soluzioni delle equazioni alle prederivate e delle equazioni differenziali, lineari e omogenee, a coefficienti costanti (**)

1. - Introduzione e richiami.

1.1. – In questa Nota, allo scopo di completare un risultato da me ottenuto in $[\mathbf{6}]_3$ (¹), riconsidero le due equazioni [l'una alle prederivate (²), l'altra differenziale] d'ordine n, lineari e omogenee (³)

$$(1) \qquad p_0 u^{(n;h)}(x;h) + p_1 u^{(n-1;h)}(x;h) + \ldots + p_{n-1} u^{(1;h)}(x;h) + p_n u(x;h) = 0\,,$$

$$(1)' \qquad p_0 v^{(n)}(x) + p_1 v^{(n-1)}(x) + \ldots + p_{n-1} v'(x) + p_n v(x) = 0\,,$$

con $p_0 \neq 0$, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ costanti (reali o complesse).

Un sistema fondamentale di soluzioni elementari dell'equazione (1) è dato da (cfr. $[\mathbf{6}]_2$, $[\mathbf{6}]_3$)

$$(2) \qquad \mathscr{U}_m(x;h) = h^{-1} A_{\nu-m+1} \qquad (m = 1, 2, \ldots, n;\ x \in (-\infty \ldots +\infty))\,,$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy. L'autore ringrazia, con affetto e riconoscenza, il proprio Maestro, professor ANTONIO MAMBRIANI, che con dedizione e preziosi consigli lo ha a suo tempo avviato a ricerche delle quali questo lavoro è una naturale conseguenza.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 19-VI-1978.

(¹) Cfr. il teorema II e l'annotazione (⁴) di $[\mathbf{6}]_3$.

(²) Sui concetti di: *equazione alle prederivate, prederivata, passo h*, e altri, qui dati come noti, cfr. $[\mathbf{6}]_1$, $[\mathbf{6}]_2$.

(³) In effetti, in $[\mathbf{6}]_3$, ho considerato le due equazioni non omogenee che si ottengono da (1) e (1)' ponendo nel loro secondo membro la stessa funzione $f(x)$: completato però il caso omogeneo, nulla più c'è da aggiungere, nel caso non omogeneo, all'affermazione del teorema I di $[\mathbf{6}]_3$ stesso.

con $\nu = \nu_{(x-x_0)/h}$ = [parte intera di $(x - x_0)/h$] ([4]), e con A_s esprimibile in due modi distinti, precisamente

$$(3) \qquad A_s = \sum_0^s{}_r \sum_0^r{}_{r_1} \dots \sum_0^{r_{n-2}}{}_{r_{n-1}} (-1)^r \binom{r}{r_1} \dots \binom{r_{n-2}}{r_{n-1}} a_0^{-r-1} a_1^{r-r_1} \dots a_{n-1}^{r_{n-2}-r_{n-1}} a_n^{r_{n-1}} \varepsilon_{s-\sigma} \,,$$

dove: $s = 0, 1, 2, \dots, \nu$; $\sigma = r + r_1 + \dots + r_{n-1}$, $\varepsilon_{s-\sigma} = \begin{matrix} 1 & \text{per } s - \sigma = 0 \\ 0 & \text{per } s - \sigma \neq 0 \end{matrix}$ ([5]),

$$a_\mu = \sum_0^\mu{}_r (-1)^{\mu-r} \binom{n-r}{\mu-r} p_r\, h^{r-n} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \dots, n)\,;$$

$$(3)' \qquad A_s = p_0^{-1} h^n \sum_0^s{}_r \sum_0^r{}_{r_1} \dots \sum_0^{r_{n-3}}{}_{r_{n-2}} (1 + \alpha_1 h)^{s-r} (1 + \alpha_2 h)^{r-r_1} \dots$$
$$\dots (1 + \alpha_{n-1} h)^{r_{n-3}-r_{r-2}} (1 + \alpha_n h)^{r_{n-2}} \,,$$

dove: $s = 0, 1, 2, \dots, \nu$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sono le radici dell'equazione caratteristica di (1) [o di (1)′] ([6]).

Un sistema fondamentale di soluzioni della equazione (1)′ è dato da (cfr. [**4**], [**6**]$_3$)

$$(4) \qquad V_m(x) = p_0^{-1} \exp[-\alpha_n x_0] \exp[\alpha_m x] \cdot$$
$$\cdot \int_{x_0}^{x} \exp[(\alpha_{m+1} - \alpha_m) t_m]\, dt_m \int_{x_0}^{t_m} \exp[(\alpha_{m+2} - \alpha_{m+1}) t_{m+1}]\, dt_{m+1} \cdot$$
$$\cdot \int_{x_0}^{t_{m+1}} \exp[(\alpha_{m+3} - \alpha_{m+2})\, t_{m+2}]\, dt_{m+2} \dots \int_{x_0}^{t_{n-2}} \exp[(\alpha_n - \alpha_{n-1})\, t_{n-1}]\, dt_{n-1} \,,$$

$m = 1, 2, \dots, n-1$; $V_n(x) = p_0^{-1} \exp[\alpha_n(x - x_0)]$ ([7]), $x \in (-\infty \dots +\infty)$.

([4]) Qui, a differenza che in [**6**]$_3$, per x_0 basta prendere un qualsiasi numero reale, con $x_0 \leqslant x$.

([5]) Cfr. l'annotazione ([5]) di [**6**]$_1$ (Parte II).

([6]) Si tenga presente che, sia in (3)′ che nella seguente (4), per le n radici dell'equazione caratteristica (di grado n) della (1) [o (1)′], non occorre sapere se tali radici sono semplici o multiple.

([7]) Per x_0 cfr. l'annotazione ([4]). Qui, poi, rispetto a [**6**]$_3$, sono scambiate fra loro (per comodità) le radici $\alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ $(m = 1, 2, \dots, n)$ « equidistanti dagli estremi ».

Fra le soluzioni elementari $\mathcal{U}_m(x; h)$ $(m = 1, 2, ..., n)$ dell'equazione alle prederivate (1) e la soluzione particolare $V_1(x)$ dell'equazione differenziale (1)′ sussiste un legame (cfr. [**6**]$_3$, teorema II), dato dal seguente

Teorema. *Si ha*

$$\lim_{h\to 0+} \mathcal{U}_m(x; h) = V_1(x) \qquad (m = 1, 2, ..., n; \ -\infty < x < +\infty), \tag{5}$$

e questa tendenza è uniforme, rispetto alla variabile x, in ogni intervallo limitato.

1.2. – Come ho già detto in [**6**]$_3$, paragrafo **2.3**, il Teorema precedente dà la soluzione $V_1(x)$ [dell'equazione differenziale (1)′] come limite (uniforme, rispetto alla variabile x, in ogni intervallo limitato) della soluzione elementare $\mathcal{U}_m(x; h)$ [dell'equazione alle prederivate (1)], senza bisogno di conoscere le radici $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ dell'equazione caratteristica di (1)′ [o (1)] (8). Però afferma anche che *tutte* le $\mathcal{U}_m(x; h)$ tendono alla *sola* $V_1(x)$.

Per completare questo risultato seguo qui due vie distinte: dapprima indico un sistema fondamentale di soluzioni della (1) che tende (uniformemente rispetto ad x, in ogni intervallo limitato) (9) al sistema fondamentale di soluzioni $V_m(x)$ $(m = 1, 2, ..., n)$ della (1)′; poi individuo un altro sistema fondamentale di soluzioni di (1) che tende (uniformemente rispetto ad x, in ogni intervallo limitato) ad un secondo sistema fondamentale di soluzioni di (1)′.

Più precisamente dimostro i due Teoremi seguenti.

Teorema I. *Si ha*

$$\lim_{h\to 0+} U_m(x; h) = V_m(x) \qquad (m = 1, 2, ..., n; \ -\infty < x < +\infty), \tag{6}$$

dove: le $U_m(x; h)$ $(m = 1, 2, ..., n)$ costituiscono il sistema fondamentale di soluzioni (9) (v. n. **2.2**) *dell'equazione alle prederivate* (1); *le $V_m(x)$ $(m = 1, 2, ..., n)$ costituiscono il sistema fondamentale di soluzioni* (4) *dell'equazione differenziale* (1)′. *Inoltre, la tendenza espressa da* (6) *è uniforme rispetto alla variabile x in ogni intervallo limitato.*

---

(8) In virtù dell'espressione (3) di A_s, nella quale, appunto, non appaiono tali radici. Si dovrebbe anzi, più propriamente, parlare di *soluzioni elementari* di (1) solo quando si usa la (3) (cfr. [**6**]$_2$, [**6**]$_3$).

(9) Su questioni di convergenza cfr., anche, [**7**].

Teorema II. *Si ha*

$$(7) \qquad \lim_{h \to 0+} D^m_{x;h} \mathscr{U}_1(x;h) = V_1^{(m)}(x) \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \quad -\infty < x < +\infty),$$

dove: le $D^m_{x;h}\, \mathscr{U}_1(x;h)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ [*sono le prederivate m-esime* (10) *di* $\mathscr{U}_1(x;h)$ *e*] *costituiscono il sistema fondamentale elementare di soluzioni* (10) (v. n. **2.3**) *dell'equazione alla prederivate* (1); *le* $V_1^{(m)}(x)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ [*sono le derivate m-esime di* $V_1(x)$, *e*] *costituiscono il sistema fondamentale di soluzioni* (8) (v. n. **2.1**) *dell'equazione differenziale* (1)'. *Inoltre, la tendenza espressa da* (7) *è uniforme rispetto alla variabile* x *in ogni intervallo limitato.*

Va subito notato che, mentre nel primo Teorema, per scrivere le $U_m(x;h)$, occorre conoscere $m-1$ radici dell'equazione caratteristica di (1) [o (1)'] [v. (9) n. **2.2**], *nel secondo Teorema per scrivere le* $D^m_{x;h}\, \mathscr{U}_1(x;h)$, *non c'è alcun bisogno di conoscere tali radici* [v. (10) n. **2.3**] (11).

1.3. – Qui, dopo aver introdotto i sistemi fondamentali di soluzioni $V_1^{(m)}(x)$, $U_m(x;h)$, $D^m_{x;h}\mathscr{U}_1(x;h)$ [rispettivamente di (1)' e (1): cfr. § **2**], dò, nei paragrafi **3** e **4**, le dimostrazioni dei Teoremi I e II (sfruttando le affermazioni già fatte in [**6**]$_3$); infine (cfr. paragrafo **5**), scrivo per esteso l'espressione delle varie soluzioni delle equazioni (1) e (1)', nel caso dell'ordine $n = 3$.

2. - I sistemi fondamentali di soluzioni $V_1^{(m)}(x)$ [per la (1)'], $U_m(x;h)$ e $D^m_{x;h}\mathscr{U}_1(x;h)$ [per la (1)].

2.1. – Consideriamo la soluzione [della (1)'] $V_1(x)$ [data da (4) per $m = 1$] e le sue derivate successive fino alla $n-1$-esima: $V_1(x)$, $V_1'(x)$, $V_1''(x), \ldots$, $V_1^{(n-1)}(x)$. Con calcoli un po' laboriosi, ma semplici, si trova che

$$(8) \qquad V_1^{(m)}(x) = \sum_1^{m+1}{}_k \Big(\sum_{\substack{i_1+i_2+\ldots+i_k = m+1-k \\ i_s \geq 0}} \alpha_1^{i_1}\alpha_2^{i_2} \ldots \alpha_k^{i_k} \Big) V_k(x)$$
$$(m = 0, 1, 2, \ldots, n-1; -\infty < x < +\infty),$$

dove le $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sono le radici dell'equazione caratteristica di (1)' [o di (1)], e le $V_k(x)$ sono date da (4).

(10) Cfr. l'annotazione (2).

(11) Per questa ragione, e per il modo con cui si ottengono, anche le $D^m_{x;h}\mathscr{U}_1(x;h)$ vengono chiamate soluzioni *elementari* (cfr. [**6**]$_3$). Sull'utilità di un teorema di questo tipo, rinvio, poi, a quanto già detto in [**6**]$_3$, n. **2.3**.

Poichè le V_k sono soluzioni di (1)′, anche le $V_1^{(m)}(x)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ sono soluzioni di (1)′; dato poi che le $V_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sono un sistema fondamentale di soluzioni di (1)′ (cfr. [**6**]$_2$, [**6**]$_3$), si verifica immediatamente che tali sono anche le $V_1^{(m)}(x)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$.

2.2. – Un'osservazione attenta della struttura delle $\mathscr{U}_m(x; h)$ [cfr. (2), con A_s dato da (3)′] e delle $V_m(x)$ [cfr. (4)], ci porta a costruire, per gli scopi che vogliamo raggiungere, le funzioni

$$(9)\quad U_1(x; h) \equiv \mathscr{U}_1(x; h),\; U_m(x; h) = h^{-m+1} \sum_{0}^{m-1}{}_k\, (-1)^k \Big\{ \sum_{\substack{J \subseteq I_{m-1} \\ \operatorname{card}(J) = k}} \prod_{i \in J} (1 + \alpha_i h) \Big\}\, \mathscr{U}_{k+1}(x; h)$$

$(m = 2, 3, \ldots, n;\; I_{m-1} = \{1, 2, \ldots, m-1\};\; -\infty < x < +\infty$ e intendendo $\sum_{J=\phi} \ldots = 1)$.

È immediata l'affermazione che le $U_m(x; h)$ sono soluzioni di (1) [in quanto tali sono le $\mathscr{U}_k(x; h)$]. Che poi le (9) costituiscano un sistema fondamentale di soluzioni di (1) è banalmente vero: il loro determinante di Casorati ([12]) è, infatti, sempre diverso da zero.

2.3. – Sempre per i fini che ci siamo proposti, osserviamo ancora attentamente la struttura delle $\mathscr{U}_m(x; h)$, delle $U_m(x; h)$ testè costruite, e delle $V_1^{(m)}(x)$ [cfr. (8)]. Saremo indotti a considerare le funzioni

$$(10)\qquad D^m_{x;h}\mathscr{U}_1(x; h) = h^{-m} \sum_{0}^{m}{}_s\, (-1)^s \binom{m}{s} \Theta_h^{m-s} \mathscr{U}_1(x; h) \;\; ([13])$$

$$(m = 0, 1, \ldots, n-1;\;\; -\infty < x < +\infty).$$

È ancora immediata sia l'affermazione che le (10) sono soluzioni di (1), quanto quella che ne costituiscono un sistema fondamentale.

Si noti che se scriviamo la $\mathscr{U}_1(x; h)$ [data da (2) per $m = 1$] con A_s nella forma (3), *otteniamo per le* $D^m_{x;h}\mathscr{U}_1(x; h)$ *un'espressione che non contiene alcuna delle radici* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *dell'equazione caratteristica di* (1) [*o* (1)′]: il sistema (10) è allora detto *elementare* ([14]).

([12]) Sul determinante di Casorati si veda, ad es., [**1**], [**2**], [**5**].

([13]) Cfr., ad es., l'annotazione ([1]) di [**6**]$_2$. Qui, poi, con Θ_h indico il cosiddetto operatore di Casorati (cfr. [**1**]), che alcuni autori, come in [**3**], indicano con D; altri, come in [**2**] e [**5**], indicano con E (E^h).

([14]) Cfr. l'annotazione ([11]).

3. - Dimostrazione del Teorema I.

La dimostrazione è immediata. Infatti, tenendo presente le (2) e (3)′, possiamo scrivere le $U_m(x;h)$, date da (9), anche così

$$U_m(x;h) = h^{-m}\sum_{0}^{m-1}{}_k (-1)^k \{\sum_{\substack{J\subseteq I_{m-1}\\ \mathrm{card}\,(J)=k}} \prod_{i\in J} (1+\alpha_i h)\} A_{\nu-k}$$

$$= p_0^{-1} h^{n-m}\sum_{0}^{m-1}{}_k (-1)^k \{\sum_{\substack{J\subseteq I_{m-1}\\ \mathrm{card}\,(J)=k}} \prod_{i\in J} (1+\alpha_i h)\} \sum_{0}^{\nu-k}{}_r \sum_{0}^{r}{}_{r_1} \ldots$$

$$\ldots \sum_{0}^{r_{n-3}}{}_{r_{n-2}} (1+\alpha_1 h)^{\nu-k-r}(1+\alpha_2 h)^{r-r_1}\ldots(1+\alpha_n h)^{r_{n-2}} \qquad (m = 2, 3, \ldots, n),$$

oppure [con calcoli che per brevità ometto ([15])]

$$(9)' \qquad U_m(x;h) = p_0^{-1} h^{n-m} \sum_{0}^{\nu}{}_r \sum_{0}^{r}{}_{r_m} \sum_{0}^{r_m}{}_{r_{m+1}} \ldots$$

$$\ldots \sum_{0}^{r_{n-3}}{}_{r_{n-2}} (1+\alpha_m h)^{\nu-r}\, 1+\alpha_{m+1} h)^{r-r_m}\ldots(1+\alpha_n h)^{r_{n-2}} \qquad (m = 1, 2, \ldots, n)\ ([16]).$$

Confrontiamo ora le espressioni (9)′ delle $U_m(x;h)$ con le espressioni (4) delle $V_m(x)$; e notiamo che tali espressioni stanno fra loro nella stessa relazione in cui, in $[\mathbf{6}]_3$, stavano le espressioni di $\mathscr{U}_1(x;h)$ e $V_1(x)$, avendone inoltre formalmente, e rispettivamente, la stessa struttura.

Pertanto, lo stesso procedimento dimostrativo che in $[\mathbf{6}]_3$ ci ha condotto ad affermare che $\lim_{h\to 0+} \mathscr{U}_1(x;h) = V_1(x)$, uniformemente al variare di x in ogni intervallo limitato, ci porta a concludere, qui, con l'affermazione del Teorema I.

4. - Dimostrazione del Teorema II.

Anche qui la dimostrazione è immediata. Infatti, sempre con semplici passaggi ([17]), le $D^m_{x;h}\mathscr{U}_1(x;h)$ si possono scrivere [oltre che nella forma (10)]

([15]) Un'agevole verifica può, ad esempio, essere fatta nel caso $n=3$, per il quale, in **5**, riscrivo le principali formule.

([16]) Essendo $U_1(x;h) = \mathscr{U}_1(x;h)$, qui, in virtù di (2) e (3)′, si può partire da $m=1$.

([17]) Cfr. l'annotazione ([15]). Qui si sfrutta anche la relazione (di facile verifica) $D_{x;h} U_m(x;h) = \alpha_m U_m(x;h) + \Theta_h U_{m+1}(x;h)$ $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$.

nella forma

$$(10)' \quad D^m_{x;h}\mathscr{U}_1(x;h) = \sum_1^{m+1}{}_k \Big(\sum_{\substack{i_1+i_2+\ldots+i_k=m+1-k \\ i_s\geq 0}} \alpha_1^{i_1}\alpha_2^{i_2}\ldots\alpha_k^{i_k}\Big)\Theta_h^{k-1}U_k(x;h)$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ radici dell'equazione caratteristica di (1) [o (1)'].

Osserviamo ora che, come le $U_k(x;h)$ (per il Teorema I), anche le $\Theta_h^{k-1}U_k(x;h)$ tendono, quando $h\to 0+$, alle $V_k(x)$, uniformemente al variare di x in ogni intervallo limitato ([18]); e confrontiamo poi le espressioni (10)' delle $D^m_{x;h}\mathscr{U}_1(x;h)$ con quelle (8) di $V_1^{(m)}(x)$: si ha subito l'affermazione del Teorema II. Si noti che *usando, poi, l'espressione elementare* (10) *di* $D^m_{x;h}\mathscr{U}_1(x;h)$, *non c'è alcun bisogno di conoscere le radici* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *dell'equazione caratteristica di* (1) [*o* (1)'].

5. - Caso delle equazioni del terzo ordine.

Per le equazioni (1) e (1)' con $n = 3$, le (2), (4), (8), (9), (10), (9)' (10)', si scrivono ordinatamente

$$(11) \quad \mathscr{U}_m(x;h) = h^{-1}\sum_0^{\nu-m+1}{}_r \sum_0^{r}{}_\varrho (-1)^r\binom{r}{\varrho}\binom{\varrho}{\nu-m+1-r-\varrho}\left(\frac{p_0}{h^3}\right)^{-r-1}\cdot$$

$$\cdot\left(-\frac{3p_0}{h^3}+\frac{p_1}{h^2}\right)^{r-\varrho}\left(\frac{3p_0}{h^3}-\frac{2p_1}{h^2}+\frac{p_2}{h}\right)^{r+2\varrho-\nu+m-1}\left(-\frac{p_0}{h^3}+\frac{p_1}{h^2}-\frac{p_2}{h}+p_3\right)^{\nu-m+1-r-\varrho}$$

[oppure

$$(11)' \qquad \mathscr{U}_m(x;h) = p_0h^2\sum_0^{\nu-m+1}{}_r\ \sum_0^{r}{}_\varrho\,(1+\alpha_1h)^{\nu-m+1-r}\,(1+\alpha_2h)^{r-\varrho}\,(1+\alpha_3h)^\varrho]$$

$$(m = 1, 2, 3) \ ([19]);$$

([18]) Si ha

$$|\Theta_h^{k-1}U_k(x;h) - U_k(x;h)| =$$
$$= |\Theta_h^{k-1}U_k(x;h) - V_k(x) - [U_k(x;h) - V_k(x)]| \leq 2\sup_x|U_k(x;h) - V_k(x)| \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} 0\,.$$

([19]) Nella (11) si è preso per A_s l'espressione (3) senza le radici α_i; nella (11)' quella (3)' con le radici α_i.

$$(12)\quad V_1(x) = p_0^{-1} \exp[-\alpha_3 x_0] \exp[\alpha_1 x] \int_{x_0}^{x} \exp[(\alpha_2-\alpha_1)\,t_1]\,\mathrm{d}t_1 \int_{x_0}^{t_1} \exp[(\alpha_3-\alpha_2)\,t_2]\,\mathrm{d}t_2,$$

$$V_2(x) = p_0^{-1} \exp[-\alpha_3 x_0] \exp[\alpha_2 x] \int_{x_0}^{x} \exp[(\alpha_3-\alpha_2)\,t_3]\,\mathrm{d}t_3, \quad V_3(x) = p_0^{-1} \exp[\alpha_3(x-x_0)];$$

$$(13)\quad V_1(x) \equiv V_1(x)\,, \quad V_1'(x) = \alpha_1 V_1(x) + V_2(x)\,,$$

$$V_1''(x) = \alpha_1^2 V_1(x) + (\alpha_1+\alpha_2)\, V_2(x) + V_3(x)\,;$$

$$(14)\quad U_1(x;h) \equiv \mathscr{U}_1(x;h)\,, \quad U_2(x;h) = h^{-1}\{\mathscr{U}_1(x;h) - (1+\alpha_1 h)\mathscr{U}_2(x;h)\}\,,$$

$$U_3(x;h) = h^{-2}\{\mathscr{U}_1(x;h) - [(1+\alpha_1 h) + (1+\alpha_2 h)]\mathscr{U}_2(x;h) + $$

$$+ (1+\alpha_1 h)(1+\alpha_2 h)\mathscr{U}_3(x;h)\}\,;$$

$$(15)\quad D^0_{x;h}\mathscr{U}_1(x;h) = \mathscr{U}_1(x;h)\,, \quad D_{x;h}\mathscr{U}_1(x;h) = h^{-1}\{\Theta_h \mathscr{U}_1(x;h) - \mathscr{U}_1(x;h)\}\,,$$

$$D^2_{x;h}\mathscr{U}_1(x;h) = h^{-2}\{\Theta_h^2 \mathscr{U}_1(x;h) - 2\Theta_h \mathscr{U}_1(x;h) + \mathscr{U}_1(x;h)\}$$

[con $\mathscr{U}_1(x;h)$ dato da (11), per $m=1$];

$$(14)'\quad U_1(x;h) \equiv \mathscr{U}_1(x;h) = p_0^{-1} h^2 \sum_0^{\nu}{}_r \sum_0^{r}{}_\varrho (1+\alpha_1 h)^{\nu-r} (1+\alpha_2 h)^{r-\varrho} (1+\alpha_3 h)^{\varrho},$$

$$U_2(x;h) = p_0^{-1} h \sum_0^{\nu}{}_r (1+\alpha_2 h)^{\nu-r} (1+\alpha_3 h)^{r}, \quad U_3(x;h) = p_0^{-1}(1+\alpha_3 h)^{\nu}\,;$$

$$(15)'\quad D^0_{x;h}\mathscr{U}_1(x;h) \equiv [\mathscr{U}_1(x;h)] \equiv U_1(x;h), \; D_{x;h}\mathscr{U}_1(x;h) = \alpha_1 U_1(x;h) + \Theta_h U_2(x;h),$$

$$D^2_{x;h}\mathscr{U}_1(x;h) = \alpha_1^2 U_2(x;h) + (\alpha_1+\alpha_2)\Theta_h U_2(x;h) + \Theta_h^2 U_3(x;h)\,.$$

Queste consentono un controllo, ovviamente meno laborioso, di tutto quanto è stato detto in precedenza.

Bibliografia

[1] F. CASORATI, *Il calcolo delle differenze finite interpretato ed accresciuto di nuovi teoremi a sussidio principalmente delle odierne ricerche basate sulla variabilità complessa*, Ann. Mat. Pura Appl. **10** (1880), 10-45.

[2] T. FORT, *Finite differences and difference equations in the real domain*, Clarendon Press, Oxford 1948.

[3] A. O. GUELFOND, *Calcul des différences finies*, Dunod, Paris 1963.

[4] A. MAMBRIANI, *Sulla risoluzione delle equazioni differenziali lineari*, Atti I Congresso Naz. U.M.I. (Firenze, aprile 1937), 231-237.

[5] L. M. MILNE-THOMSON, *The calculus of finite differences*, Macmillan and Co., London 1951.

[6] C. SCARAVELLI: $[\bullet]_1$ *Risoluzione, razionale nelle funzioni date, delle equazioni alle differenze (con un passo $h \neq 0$), d'ordine finito, lineari e a coefficienti periodici di periodo h* (I-II), Riv. Mat. Univ. Parma (2) **11** (1970), 15-41; (2) **12** (1971), 151-165; $[\bullet]_2$ *Opportunità di presentare le equazioni alle differenze finite anche nella forma di equazioni alle prederivate. Il caso lineare e a coefficienti costanti*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **52** (1972), 861-867; $[\bullet]_3$ *Stretto legame fra equazioni alle prederivate ed equazioni differenziali quando le equazioni sono lineari e a coefficienti costanti* (I-II), Riv. Mat. Univ. Parma (3) **2** (1973), 1-9; (3) **3** (1974), 273-290.

[7] A. WAKULICZ, *Metodi alle differenze per le equazioni differenziali alle derivate parziali*, Pubblicazioni IAC Serie II **28**, Roma 1970.

Summary

We complete an our previous result. Precisely, we show that two certain fundamental systems of solutions of the equations (1), *when step* $h \to 0^+$, *converge uniformly, and respectively, to two certain fundamental systems of solutions of the equations* (1)′. *One of two fundamental systems of equation* (1) *is elementarily given, without the roots of the characteristic equation of* (1) [*or* (1)′].

* * *