Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 485-492

STEFANIA DONNINI (*)

Due generalizzazioni delle varietà quasi kähleriane (**)

1. - Introduzione.

Alcuni lavori recenti di A. Gray, L. Hervella, G. B. Rizza, S. Sawaki, E. Vidal e di altri autori hanno condotto a considerare alcune classi di varietà che generalizzano quella delle varietà kähleriane.

Nello stesso ordine di idee, in questo lavoro, vengono introdotte due classi di varietà, che generalizzano la classe delle varietà quasi kähleriane.

Le varietà della prima di queste due classi sono quelle per cui il campo di Kähler $\mathscr{K}$ è parallelo nella connessione di Levi-Civita (n. **3**).

Le varietà della seconda classe, denominata con $\boldsymbol{D}$, sono quelle per le quali il campo di Kähler K soddisfa alla condizione D di G. B. Rizza (n. **4**).

Il confronto delle classi sopra accennate con altre classi di varietà, note nella letteratura, conduce a diverse caratterizzazioni delle varietà kähleriane (teorema T_1 del n. **3**; teoremi T_4, T_6 e corollario C_3 del n. **4**) e ad una caratterizzazione delle varietà quasi kähleriane (teorema T_5 del n. **4**).

La classe $\boldsymbol{D}$, che può anche essere caratterizzata da una condizione sul campo di Nijenhuis $\mathscr{N}$ (teorema T_3 del n. **4**), presenta una certa analogia formale con la classe delle varietà quasi Kotō. Ciò appare dal teorema T_2 del n. **4**, che caratterizza appunto quest'ultima classe mediante la condizione C di G. B. Rizza sul campo di Kähler K.

I teoremi T_1, T_4, T_6 generalizzano alle varietà delle classi qui considerate risultati già noti per le varietà quasi kähleriane.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito come Borsista del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 6-XI-1978.

2. - Struttura quasi hermitiana.

Sia V una *varietà quasi hermitiana*, $\dim_R V = 2n$ $(n \geqslant 2)$, $\operatorname{cl}_R V = 2n+1$ (1).

Sia $\mathscr{T}^r_s$ lo spazio dei campi tensoriali di tipo (r, s) su V. In particolare sia J il campo di $\mathscr{T}^1_1$ di classe C^{2n} che definisce la *struttura quasi complessa* di V e g il campo simmetrico di $\mathscr{T}^0_2$ che definisce la *metrica riemanniana* di V.

Intervengono nel seguito gli isomorfismi λ, W (2), definiti per ogni campo $L \in \mathscr{T}^1_2$ da

$$\lambda L = c^1_3(L \otimes J)\ (^3)\,, \qquad WL = -\, c^2_2(\lambda L \otimes J)\,.$$

Siano poi G, H i campi di $\mathscr{T}^2_0$, $\mathscr{T}^0_2$ rispettivamente, definiti da

$$c^1_1(g \otimes G) = \delta\,, \qquad H = c^1_2(J \otimes g)\,,$$

essendo δ il campo di Kronecker. Come noto, il campo G è simmetrico, mentre il campo H è emisimmetrico.

Si denoti poi con Γ la *connessione di Levi-Civita* definita dalla metrica g.

Sia DJ il campo tensoriale ottenuto da J per derivazione covariante nella connessione Γ (4) ed N il *campo tensoriale di Nijenhuis* definito da

$$N = -\, 4\varepsilon c^1_3\big(J \otimes \varepsilon(DJ)\big)\ (^5)\,.$$

Come noto V è a *struttura hermitiana*, se e solo se $N = 0$ (6); cioè la struttura quasi complessa è integrabile.

Si consideri ora il *campo tensoriale di Kähler* $\mathscr{K} = 6\varepsilon_{123}DH$, dove DH è il campo tensoriale di $\mathscr{T}^0_3$ ottenuto da H per derivazione covariante nella connessione di Levi-Civita. Come noto, se $\mathscr{K} = 0$ la varietà V si dice *quasi kähleriana* (7).

---

(1) Per le nozioni generali si veda p. es. K. Yano [**9**], Ch. 5, 6, 9.

(2) G. B. Rizza [**7**]$_4$, p. 472.

(3) In generale c^i_k è l'applicazione tensoriale di contrazione relativa all'i-esimo indice di contravarianza e al k-esimo indice di covarianza (cfr. p. es. N. Bourbaki [**1**], p. 45).

(4) L'indice di derivazione è il primo indice.

(5) In generale $\varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_t}$ è l'applicazione tensoriale di emisimmetrizzazione rispetto agli indici di covarianza $j_1 j_2 \ldots j_t$. L'analoga applicazione tensoriale di simmetrizzazione relativa agli indici di covarianza $j_1 \ldots j_s$ è $\sigma_{j_1 \ldots j_s}$. Quando si opera su campi tensoriali di tipo $(p, 2)$ in luogo di ε_{12} e σ_{12} scriveremo sempre ε e σ.

(6) Ved. A. Newlander-L. Nrenberg [**6**], p. 393.

(7) Ved. K. Yano [**9**], p. 141.

Conviene ricordare che su una varietà quasi hermitiana V sussiste la *relazione*

$$\mathscr{N} = 2\varepsilon_{12}\big(c_2^1(J \otimes \mathscr{K})\big) + 2c_2^1(H \otimes \alpha DJ) \quad (1)$$ [8],

dove $\mathscr{N} = c_3^1(N \otimes g)$ ed $\alpha = \sigma - \varepsilon$.

Conviene ricordare che V è una *varietà kähleriana*, se e solo se risulta $\mathscr{K} = 0$ ed $N = 0$. Una condizione equivalente è $DJ = 0$ [9].

Più in generale se il campo tensoriale DJ verifica le condizioni

$$\sigma DJ = 0\,, \tag{2}$$

$$(1 + \alpha W \alpha) DJ = 0\,, \tag{3}$$

$$\varepsilon_{12} DDJ = 0\,, \tag{4}$$

$$\sigma(1 - \alpha W \alpha) DJ = 0\,, \tag{5}$$

la varietà si dice rispettivamente *quasi Tachibana* [10], *quasi Kotō* [11], *parakähleriana* [12], *underkähleriana* [13].

È utile per il seguito ricordare che se V è una varietà rispettivamente quasi kähleriana, quasi Tachibana, quasi Kotō ed inoltre la struttura quasi complessa di V è integrabile, allora V è una varietà kähleriana.

3. - Varietà a campi di Kähler parallelo.

Si consideri ora la *condizione*

$$D\mathscr{K} = 0\,. \tag{6}$$

---

(8) Ved. K. Yano [**9**], (4.10) p. 141. Tale relazione sussiste su una varietà quasi hermitiana e più in generale relativamente ad una connessione metrica e J-semisimmetrica (S. Donnini [**2**], n. **6**).

(9) Ved. G. B. Rizza [**7**]$_4$, n. **4**, p. 473.

(10) Ved. K. Yano [**9**], p. 141.

(11) Le varietà quasi Kotō sono anche chiamate *O*-spaces*. È immediato provare che la condizione (3) è equivalente alla condizione (4.1) di K. Yano [**9**], p. 197.

(12) Ved. G. B. Rizza [**7**]$_1$, p. 49.

(13) Ved. L. Hervella e E. Vidal [**5**], p. 117. Si riconosce senza difficoltà che la classe ivi indicata con G_1 coincide con la classe delle varietà che, seguendo altri autori, sono dette in questo lavoro under-kähleriane.

È immediato che la classe delle varietà a campo $\mathscr{K}$ parallelo contiene la classe delle varietà quasi kähleriane.

Sussiste il teorema

T_1. *Una varietà V quasi Tachibana a campo di Kähler parallelo è kähleriana; e viceversa.*

Il caso particolare di una varietà V quasi Tachibana e quasi kähleriana è noto (14).

Per la dimostrazione del teorema occorre ricordare che su una varietà quasi Tachibana il campo tensoriale di Kähler si riduce a

$$\mathscr{K} = 3\,DH \text{ (15)}\,. \tag{7}$$

Dalle (6), (7) segue $DDH = 0$ e quindi la (4) e segue l'asserto per il teorema T_2 del lavoro $[7]_2$. Il viceversa è banale.

In virtù del teorema 4.6 di K. Yano [**9**], da T_1 si deduce immediatamente il corollario

C_1. *Se V è una varietà quasi Kotō a campo di Kähler parallelo ed il campo di Nijenhuis $\mathscr{N}$ è emisimmetrico in tutti i suoi indici, allora V è una varietà kähleriana; e viceversa.*

Sussiste anche il corollario

C_2. *Se V è una varietà quasi Kotō e underkähleriana ed ha il campo di Kähler parallelo allora V è kähleriana; e viceversa.*

Basta osservare che le varietà quasi Tachibana risultano essere precisamente le varietà che sono simultaneamente quasi Kotō e underkähleriane (16).

4. - Varietà appartenenti alla classe *D*.

Conviene ora introdurre anche il campo di Kähler di tipo (1, 2)

$$K = c_1^1(\mathscr{K} \otimes G)\,.$$

---

(14) Ved. p. es. A. Gray [**4**], Cor. 4.3, p. 279.

(15) Ved. K. Yano [**9**], th. 1.3, p. 177.

(16) Ved. L. Hervella e E. Vidal [**5**], prop. 2, p. 177, tenendo conto della nota (13). Alla stessa conclusione si perviene subito utilizzando le (3), (5) e ricordando che $WDJ = -DJ$. (Ved. G. B. Rizza $[\mathbf{7}]_4$, P_1, p. 473).

Si dice che la *varietà* V *appartiene alla classe* $\boldsymbol{D}$, *se il campo tensoriale* K *soddisfa alla condizione formale* D *di G. B. Rizza* (17), vale a dire se risulta

$$(W\alpha W)K = K\,. \tag{8}$$

È immediato che la classe $\boldsymbol{D}$ contiene la classe delle varietà quasi kähleriane.

Tenuto presente che K è emisimmetrico, cioè $K = -\alpha K$, e che $W\alpha W\alpha = \alpha W\alpha W$ (18) la (8) equivale a

$$(1 + \alpha W\alpha W)K = 0\,. \tag{9}$$

Dunque, la varietà V *appartiene alla classe* $\boldsymbol{D}$, *se e solo se* K *soddisfa alla condizione* $\bar{C}$ *di G. B. Rizza.*

È naturale ora considerare, in luogo della condizione $\bar{C}$, l'analoga condizione C, cioè

$$(1 - \alpha W\alpha W)K = 0\,. \tag{10}$$

Sussiste il teorema

T$_2$. *Condizione necessaria e sufficiente perchè la varietà* V *sia quasi Kotō è che il campo tensoriale di Kähler* K *soddisfi alla condizione* C.

Per stabilire il teorema è opportuno osservare che le condizioni C, $\bar{C}$ di G. B. Rizza per un campo tensoriale $L \in \mathscr{T}_2^1$ equivalgono rispettivamente al fatto che L sia *puro*, *ibrido* rispetto agli indici di covarianza (19). Ciò consente di enunciare un lemma di S. Sawaki (20) nel modo seguente

L. *La condizione* C *per il campo* DJ *equivale alla condizione* C *per il campo* K.

In virtù del lemma L e del teorema 5 del lavoro [7]$_4$ di G. B. Rizza si perviene immediatamente all'asserto.

Conviene ora tornare alla classe $\boldsymbol{D}$, che, in base a quanto si è visto, appare in certo modo analoga alla classe delle varietà quasi Kotō.

Sussiste il teorema

---

(17) Ved. G. B. Rizza [**7**]$_4$, n. **3**.

(18) G. B. Rizza [**7**]$_3$, formula (4), p. 11.

(19) Infatti le condizioni C, $\bar{C}$ sono equivalenti rispettivamente alle (4.13), (4.14) di K. Yano [**9**], p. 60.

(20) S. Sawaki [**8**], lemma 2.2, p. 23.

T_3. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una varietà quasi hermitiana V appartenga alla classe **D** è*

$$\mathcal{N} = 2c_2^1(H \otimes \alpha DJ)\,. \tag{11}$$

Poichè la condizione D per il campo K equivale a $\varepsilon_{12}(c_2^1(J \otimes \mathcal{K})) = 0$ ([21]), dalla (1) segue subito l'asserto.

Un altro risultato sulle varietà della classe **D** è il seguente

T_4. *Una varietà V quasi Tachibana, appartenente alla classe **D**, è kähleriana; e viceversa.*

Il caso particolare di una varietà quasi Tachibana e quasi kähleriana è noto ([22]).

Su una varietà quasi Tachibana vale la (7), onde $K = 3DJ$. La (9) si riduce quindi a $(1 + \alpha W \alpha W)DJ = 0$, che equivale a $N = 0$ ([23]). L'osservazione alla fine del n. **2** permette di concludere che V è kähleriana. Il viceversa è ovvio.

Conviene ora segnalare il teorema

T_5. *Una varietà V quasi Kotō e appartenente alla classe **D** è quasi kähleriana; e viceversa.*

Tenuto presente il teorema T_2 sussistono simultaneamente le (9), (10). È immediato concludere che $K = 0$; di qui si ha subito l'asserto. Inversamente se V è quasi kähleriana è anche quasi Kotō ([24]) e, come si è osservato, appartiene alla classe **D**.

Si noti che il teorema ora dimostrato precisa che *la classe delle varietà quasi kähleriane è l'intersezione della classe **D** con la classe delle varietà quasi Kotō.*

Tenuto presente po il teorema T_1 del lavoro di G. B. Rizza ([25]), dal teorema T_5 segue subito

C_3. *Una varietà V quasi Kotō, parakähleriana e appartenente alla classe **D** è kähleriana; e viceversa.*

([21]) Ved. p. es. G. B. Rizza $[7]_1$, p. 240.
([22]) Vedi nota ([14]).
([23]) Ved. p. es. G. B. Rizza $[7]_4$, p. 473 e la nota ([16]).
([24]) Ved. K. Yano [**9**], Th. 4.4, p. 199.
([25]) G. B. Rizza $[7]_2$, p. 50.

Si stabilisce infine il teorema

T_6. *Se la varietà V appartiene alla classe $\mathbf{D}$ e il campo tensoriale di Nijenhuis $\mathcal{N}$ è emisimmetrico in tutti i suoi indici, allora V è kähleriana; e viceversa.*

Per ipotesi $\sigma_{23}\mathcal{N}=0$, da cui a causa del teorema T_3 segue $c_2^1(H\otimes\sigma DJ)=0$; in conclusione $\sigma DJ=0$, cioè V è una varietà quasi Tachibana. Dal teorema T_4 segue l'asserto. Il viceversa è ovvio.

Il teorema dimostrato generalizza sia un risultato di K. Yano ([26]), relativo alle varietà quasi kähleriane, sia il teorema T_4 di questo lavoro in quanto, se V è una varietà quasi Tachibana, $\mathcal{N}$ soddisfa alla proprietà di emisimmetria dell'enunciato ([27]).

([26]) K. Yano [**9**], Th. 1.2, p. 154.
([27]) Ved. K. Yano [**9**], th. 4.4, p. 142.

Bibliografia

[1] N. Bourbaki, *Algebre* 3, Hermann, Paris 1958.

[2] S. Donnini, *Una relazione concernente le connessioni di una varietà quasi hermitiana*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **2** (1976), 199-206.

[3] B. Eckmann, *Cours sur les varietés complexes*, C.I.M.E., III ciclo, Varenna, Cremonese, Roma 1953, 1-59.

[4] A. Gray, *Minimal varieties and almost hermitian submanifolds*, Michigan Math. J. **12** (1965), 273-287.

[5] L. Hervella et E. Vidal, *Nouvelles geometries pseudo-kähleriennes G_1 et G_2*, C. R. Acad. Sc. Paris **283** (1976), 115-118.

[6] A. Newlander and L. Nirenberg, *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, Ann. of Mat. **65** (1957), 391-404.

[7] G. B. Rizza: $[\bullet]_1$ *Sulle connessioni di una varietà quasi complessa*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **68** (1965), 233-254; $[\bullet]_2$ *Varietà parakähleriane*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **98** (1974), 47-61; $[\bullet]_3$ *Teoremi di rappresentazione per alcune classi di connessioni su una varietà quasi complessa*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste **1** (1969), 9-25; $[\bullet]_4$ *On Kähler manifolds and their generalizations*, Rend. Accad. Naz. Lincei (8) **62** (1977), 471-475.

[8] S. Sawaki, *Sufficient conditions for an almost hermitian manifold to be kahlerian*, Hoccaido Math. J. **1** (1972), 21-29.

[9] K. Yano, *Differential geometry on complexes and almost complexes spaces*, Pergamon Press, Oxford 1965.

Summary

Two classes of almost hermitian manifolds, generalizing the almost kähler manifolds, are introduces. One of these classes occurs when the kähler field K is parallel with respect to the Riemann connection; the other one when K satisfies a convenient linear condition.

For a manifold V, belonging to the first or to the second of the above classes necessary and sufficient conditions in order that V be a kähler manifold are obtained.

Some know results are derived as special cases.

* * *