Riv. Mat. Univ. Parma (4) **5** (1979), 55-76

PIERO BASSANINI e M. CESARINA SALVATORI (*)

Problemi ai limiti per sistemi iperbolici quasilineari e generazione di armoniche ottiche (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

1. - Introduzione. Il problema di Graffi-Cesari

In questo lavoro si studiano fenomeni non lineari di generazione di armoniche ottiche, in particolare, generazione di seconda armonica, di onde elettromagnetiche emesse da un laser e che si propagano attraverso mezzi non lineari. Fenomeni di questo tipo furono messi in luce per la prima volta sperimentalmente da Franken, Ward e collaboratori [**6**], [**7**], [**12**] per la radiazione luminosa emessa da un laser a rubino attraverso una sottile lamina di cristallo di quarzo. È noto che l'impiego dei laser è essenziale per il rilevamento di tali effetti non lineari in Ottica, per via della debole non linearità delle equazioni di Maxwell (a temperature ordinarie, ed escludendo materiali ferromagnetici), ed è altresì noto che la generazione di seconda armonica è possibile solo se la lamina è costituita da un mezzo anisotropo privo di simmetria centrale, cioè un cristallo piezoelettrico [**7**], [**12**].

Recentemente $[\mathbf{8}]_{1,2}$, D. Graffi ha proposto una semplice schematizzazione della situazione sperimentale di Franken, Ward et al., basata sull'uso delle equazioni di Maxwell non lineari (quasilineari) dell'Elettrodinamica classica, che L. Cesari $[\mathbf{3}]_{1,2,3,4}$ ha poi inquadrato in una teoria matematica rigorosa mediante la dimostrazione di un teorema di esistenza, unicità e dipendenza continua, di tipo costruttivo, basato sull'uso di operatori di

---

(*) Indirizzo degli Autori: Istituto Matematico, Università, 06100 Perugia, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 9-VI-1978.

contrazione in opportuni spazi di Banach, in una classe funzionale ben appropriata per le applicazioni fisico-matematiche. Si tratta, nei casi considerati qui ed in [**3**]$_1$, [**1**], [**2**], di funzioni (soluzioni) periodiche, limitate ed uniformemente Lipschitziane, per le quali quindi è garantita l'uniforme convergenza delle serie di Fourier associate; le soluzioni sono intese in senso generalizzato (q. o.). L. Cesari, in [**3**]$_{1,4}$, ha poi raffinato la teoria ed elaborato un metodo numerico convergente di approssimazioni successive per il calcolo numerico della seconda armonica, nello schema proposto da D. Graffi (*problema di Graffi-Cesari*). Il metodo rigoroso proposto da Cesari conduce allo studio di problemi ai limiti per sistemi iperbolici quasilineari, di tipo essenzialmente nuovo (cfr. anche [**10**]); in [**1**], [**2**] si è mostrato che le ipotesi e le restrizioni richieste dal teorema di Cesari sono del tutto ragionevoli ed in buon accordo con le più comuni situazioni sperimentali [**6**], [**7**], [**12**].

Scopo del presente lavoro è quello di estendere ed applicare lo schema ed i procedimenti elaborati nel contesto del «problema di Graffi-Cesari», per sistemi iperbolici quasilineari 2×2, al problema concreto della propagazione di un'onda laser attraverso una lamina di cristallo piezoelettrico della classe 32-D_3 (come il quarzo), tagliata parallelamente od ortogonalmente all'asse ottico (lineare), con incidenza normale, seguendo la situazione sperimentale di [**6**], [**7**]. Si precisa così lo schema proposto da D. Graffi [**8**]$_{1,2}$ e si dimostra che la teoria matematica elaborata da Cesari resta generalmente valida o comunque può facilmente essere estesa, con una sola eccezione (n. **5**), ai sistemi iperbolici quasilineari con più di due funzioni incognite qui considerati.

Nel n. **3**, si considera la propagazione lungo l'asse ottico non lineare x (definito al n. **2**): si enuncia un Teorema di esistenza ed unicità, basato sulla teoria di Cesari, e si fornisce un'espressione approssimata, seguendo il metodo proposto in [**9**], della seconda armonica, dalla quale si deduce la dipendenza esplicita dalla polarizzazione dell'onda laser incidente: l'intensità della seconda armonica trasmessa risulta proporzionale a $\sin^4 \theta$, con θ angolo di polarizzazione (v. n. **3**). Si confermano e si precisano così noti risultati sperimentali [**6**], [**7**].

Nel n. **4**, si considera la propagazione lungo l'asse ottico non lineare y (definito al n. **2**), si enuncia un teorema di esistenza ed unicità, basato sulla teoria di Cesari, e si mostra che, nei limiti della teoria approssimata proposta in [**9**], non si ha generazione di seconda armonica, in accordo con i risultati sperimentali [**6**], [**7**].

Il caso della propagazione lungo l'asse ottico z, considerato nel n. **5**, è singolare, nel senso che non si riesce ad estendere il metodo ed il teorema di Cesari (viene meno l'ipotesi chiave di «diagonale principale dominante» delle pertinenti matrici). Per definizione, l'asse ottico (lineare) z corrisponde alla radice doppia dell'equazione di Fresnel e la quadrica indicatrice del tensore permittività lineare è rotonda attorno all'asse ottico; di conseguenza, le caratteristiche del sistema linearizzato sono multiple (doppie), come del resto avviene per le equazioni di Maxwell lineari in un mezzo isotropo per qualsiasi direzione di propagazione [**5**]. Allora, le caratteristiche del sistema non lineare si « biforcano » da caratteristiche multiple del sistema linearizzato, e la loro molteplicità non rimane costante. Si noti, a questo proposito, che i cristalli della classe qui considerata sono uniassici, e che si trascura l'attività ottica [**11**]. Manca dunque in questo caso, allo stadio attuale, un teorema di esistenza ed unicità. D'altra parte, il metodo approssimato proposto in [**9**] permette di ottenere un'espressione approssimata per la seconda armonica, la cui intensità risulta indipendente dalla polarizzazione dell'onda incidente, in accordo con i risultati sperimentali.

La presenza di una seconda armonica osservabile è stata dimostrata rigorosamente da L. Cesari in $[\mathbf{3}]_{1,4}$ mediante il procedimento numerico convergente di approssimazioni successive basato sulla teoria matematica rigorosa elaborata in $[\mathbf{3}]_{1,2,4}$ in corrispondenza al caso $\theta = \pi/2$ del n. **3**. Rimane aperto il problema di chiarire i limiti di validità del metodo approssimato proposto in [**9**] e di un suo possibile inquadramento nell'ambito della teoria rigorosa proposta dal Cesari.

2. - Relazioni costitutive

Consideriamo mezzi non lineari anisotropi costituiti da cristalli piezoelettrici della classe 32-D_3, come l'α-quarzo. Denotando con x, y, z gli assi ottici non lineari (v. [**12**]), le relazioni costitutive $\underline{D} = \underline{D}(\underline{E})$ hanno la seguente forma (¹)

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon^{(0)} E_x + \alpha(E_x^2 - E_y^2) + \beta E_y E_z\,, \\ D_y &= \varepsilon^{(0)} E_y - \beta E_x E_z - 2\alpha E_x E_y\,, \qquad D_z = \varepsilon_s E_z\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Si tratta di cristalli uniassici, con asse ottico (lineare) diretto come l'asse z; $\varepsilon^{(0)}$ ed ε_s sono i valori principali del tensore doppio permittività lineare ε_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$, mentre α e β sono le sole componenti non nulle del tensore triplo suscettività non lineare χ_{ijk} $(i, j, k = 1, 2, 3)$ [**1**], [**12**].

Si osservi che la forma differenziale $\underline{D}\cdot \mathrm{d}\underline{E}$ non risulta esatta, per le (1), se $\beta \neq 0$. La congettura, formulata per la prima volta da Kleinman [**7**] su

(¹) Si trascura l'attività ottica [**11**].

base termodinamica, che tale forma differenziale sia esatta, cioè che valgano le relazioni di simmetria $\chi_{ijk} = \chi_{jik}$ (oltre a quelle, sempre valide, $\chi_{ijk} = \chi_{ikj}$), richiederebbe dunque che sia $\beta = 0$ nelle (1) [**4**]. D'altra parte, tale congettura non è certamente valida per quei materiali che esibiscono assorbimento alle frequenze ottiche che si considerano, dato che in questo caso $\oint \underline{D} \cdot d\underline{E} \neq 0$. Fortunatamente, la maggior parte dei materiali per i quali si studia la generazione di seconda armonica sono estremamente trasparenti alle frequenze fondamentali ed armoniche [**7**]. Ciò che può distruggere la validità della congettura in tali materiali, però, è la presenza della dispersione, che, a rigore, cancellerebbe il carattere monodromo della relazione funzionale fra D ed E e richiederebbe l'uso di relazioni costitutive di tipo ereditario [**8**]$_1$, al posto delle (1). La dispersione nei cristalli tipici usati per la generazione di seconda armonica con radiazione di un laser è relativamente molto piccola in generale (dell'1 % per il quarzo), ma è sufficiente in molti casi a invalidare la congettura di Kleinman [**7**].

Appare dunque ragionevole, in prima approssimazione, trascurare l'assorbimento e tenere conto della dispersione solo in quanto non si assume a priori $\beta = 0$ nelle (1). In molti casi risulta comunque $|\beta| \ll |\alpha|$: ad esempio, per il quarzo è $|\beta/\alpha| \approx 0.05$ per $\lambda = 10^4$ Å [**12**]. Nel seguito assumeremo quindi sempre valida la relazione $0 \leqslant |\beta| \leqslant |\alpha|$.

Si osservi infine che, per ragioni di omogeneità di notazioni con precedenti lavori [**3**]$_{1,2,3,4}$, [**1**], [**2**] scambieremo, nel seguito, il ruolo degli assi x e y, eseguendo la rotazione attorno all'asse z definita da $x' = y$, $y' = -x$, $z' = z$. Le (1) divengono allora (eliminando gli apici)

$$
\begin{aligned}
&D_x = \varepsilon^{(0)} E_x + \beta E_y E_z + 2\alpha E_x E_y\,, \\
&D_y = \varepsilon^{(0)} E_y + \alpha(E_x^2 - E_y^2) - \beta E_x E_z\,, \qquad D_z = \varepsilon_s E_z\,.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Per cristalli positivi è $\varepsilon_s > \varepsilon^{(0)}$ (caso del quarzo), per cristalli negativi è $\varepsilon_s < \varepsilon^{(0)}$. Considereremo, nei nn. seguenti, casi di propagazione parallela od ortogonale all'asse ottico z.

Per una discussione più approfondita sull'effetto della dispersione e sulle relazioni costitutive non lineari ereditarie dell'Ottica non lineare rimandiamo ad una nota in preparazione della Dr. Sabbi.

3. - Propagazione lungo l'asse x

Consideriamo il seguente problema, che generalizza ed estende il caso considerato in [**3**]$_1$, [**1**], [**2**]. Un'onda elettromagnetica piana monocromatica polarizzata linearmente nel piano (y, z) e propagantesi lungo l'asse x nella regione I $(x < 0)$ incide normalmente su una lamina $\overline{D}_a = \{(x, y, z) \in E^3: 0 \leqslant x \leqslant a\}$ (regione II), ed è parzialmente riflessa e parzialmente trasmessa nella regione III $(x > a)$, caratterizzata dalle stesse proprietà fisiche della regione I. Più precisamente, le regioni I e III si assumono occupate da un dielettrico lineare omogeneo ed isotropo, tipicamente l'aria o il vuoto $(\varepsilon = \varepsilon_0, \mu = \mu_0)$, mentre la regione II è costituita da una lamina di cristallo piezoelettrico della classe 32-D_3, caratterizzata dalle relazioni costitutive (2, 2) (n. **2**), con $\mu = \mu_0$ permeabilità magnetica del vuoto; sia θ l'angolo che l'asse ottico (asse z) forma con la direzione di polarizzazione del campo elettrico dell'onda incidente. È questa una buona schematizzazione degli esperimenti di Franken, Ward et al. [**6**], [**7**], se si assume l'onda incidente, emessa dal laser, data dalle (8) (v. sotto).

Cerchiamo soluzioni delle equazioni di Maxwell

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{rot} \underline{H} = \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} \underline{E} = -\mu_0 \frac{\partial \underline{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \underline{D} = 0 = \operatorname{div} \underline{H},$$

che dipendono solo da (x, t) (si fa uso, qui e nel seguito, del sistema Giorgi); le relazioni costitutive sono fornite dalle (2.2) all'interno della lamina e dalle usuali $\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E}$ all'esterno.

Le (1) diventano allora

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} -\frac{\partial H_z}{\partial x} &= \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, &\qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} &= \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}, &\qquad \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \end{aligned}$$

$$E_x = H_x = 0 \qquad\qquad (x < 0,\ x > a)$$

nelle regioni I e III, e

$$\text{(3)}_1 \qquad \begin{aligned} -\frac{\partial H_z}{\partial x} &= \varepsilon^{(0)} \frac{\partial E_y}{\partial t} + 2\alpha \left(E_x \frac{\partial E_x}{\partial t} - E_y \frac{\partial E_y}{\partial t}\right) - \beta \left(E_z \frac{\partial E_x}{\partial t} + E_x \frac{\partial E_z}{\partial t}\right), \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \end{aligned}$$

$$\text{(3)}_2 \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon_s \frac{\partial E_z}{\partial t}, \qquad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t},$$

$$\text{(3)}' \qquad \varepsilon^{(0)} E_x + \beta E_y E_z + 2\alpha E_x E_y = \varepsilon^{(0)} e_0 \equiv 0 = H_x \qquad (0 \leqslant x \leqslant a)$$

nella lamina (regione II).

3.1. - Teorema di esistenza e unicità

L'integrale generale delle equazioni (2), cioè fuori dalla lamina, è ben noto ed è dato dalla sovrapposizione di due *onde semplici* (« simple waves » [**5**]) arbitrarie: tenendo conto del fatto che l'onda semplice progressiva nella regione I (onda incidente) è quella emessa dal laser, e che nella regione III manca l'onda semplice regressiva, si ha

$$
\begin{aligned}
&E_z^{\mathrm{I}} = \varphi_1(2\pi\tilde{x} - \omega t) + \psi_1(2\pi\tilde{x} + \omega t)\,, \\
&H_y^{\mathrm{I}} = (\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac12}[-\varphi_1(2\pi\tilde{x} - \omega t) + \psi_1(2\pi\tilde{x} + \omega t)] \qquad (x < 0)\,;
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$$
(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac12} E_z^{\mathrm{III}} = -H_y^{\mathrm{III}} = \varphi_3(2\pi\tilde{x} - \omega t) \qquad (x > a)\,;
\tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
&E_y^{\mathrm{I}} = \varphi_2(2\pi\tilde{x} - \omega t) + \psi_2(2\pi\tilde{x} + \omega t)\,, \\
&H_z^{\mathrm{I}} = (\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac12}[\varphi_2(2\pi\tilde{x} - \omega t) - \psi_2(2\pi\tilde{x} + \omega t)] \qquad (x < 0)\,;
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$$
(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac12} E_y^{\mathrm{III}} = H_z^{\mathrm{III}} = \varphi_4(2\pi\tilde{x} - \omega t) \qquad (x > a)\,;
\tag{7}
$$

dove $\lambda = c_0 T$ è la lunghezza d'onda della radiazione laser (nel vuoto), $T = 2\pi/\omega$ il periodo, ω la pulsazione, $c_0 = (\varepsilon_0\mu_0)^{-\frac12}$, e $\tilde{x} = x/\lambda$. Assumiamo che l'onda emessa dal laser sia un'onda piana monocromatica armonica polarizzata linearmente, della forma

$$
\underline{E} = \underline{E}_L \cos[\beta_0(x - c_0\tilde{t})]\,, \qquad \underline{H} = \underline{H}_L \cos[\beta_0(x - c_0\tilde{t})]\,,
\tag{8}
$$

con

$$
\underline{E}_L = E_L(\sin\theta\underline{j} + \cos\theta\underline{k})\,, \qquad \underline{H}_L = -(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac12} E_L(\cos\theta\underline{j} - \sin\theta\underline{k})\,,
\tag{8$'$}
$$

dove $\beta_0 = 2\pi/\lambda$, $\tilde{t} = t - t_0$, t_0 un opportuno termine di sfasamento (v. la (14)); E_L rappresenta quindi l'ampiezza del campo elettrico dell'onda emessa dal laser, che è polarizzata linearmente nel piano (y, z), con θ angolo di polarizzazione. Le funzioni φ_i e ψ_i nelle (4) ... (7) sono arbitrarie.

È possibile allora, seguendo il procedimento indicato per la prima volta da L. Cesari [**3**]$_3$, ricavare le condizioni ai limiti per il campo elettromagnetico nella lamina, sulle pareti $x = 0$ e $x = a$. Si ha infatti ($\zeta \in \boldsymbol{R}$)

$$
\begin{aligned}
(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac12}\varphi_1(\zeta) &= (\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac12} E_L \cos\zeta\cos\theta = \psi(\zeta)\cos\theta\,, \\
(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac12}\varphi_2(\zeta) &= (\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac12} E_L \cos\zeta\sin\theta = \psi(\zeta)\sin\theta\,, \\
\psi(\zeta) &= (\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac12} E_L \cos\zeta\,.
\end{aligned}
$$

Per $x = 0$ segue allora dalle (4), (6), (8)

$$
(9) \qquad \begin{aligned} &(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}} E_z(0, t) - H_y(0, t) = 2\psi(\omega\tilde{t}) \cos\theta\,, \\ &(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}} E_y(0, t) + H_z(0, t) = 2\psi(\omega\tilde{t}) \sin\theta\,, \end{aligned}
$$

e per $x = a$ segue dalle (5), (7), (8)

$$
(10) \qquad \begin{aligned} &(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}} E_z(a, t) + H_y(a, t) = 0\,, \\ &(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}} E_y(a, t) - H_z(a, t) = 0\,. \end{aligned}
$$

Per la continuità delle componenti tangenziali di $\underline{E}$ e $\underline{H}$ attraverso le pareti della lamina, le (9) e (10) valgono anche per il campo entro la lamina. Siamo condotti quindi allo studio del seguente problema ai limiti

$$
(11)_1 \qquad \begin{aligned} &(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}} E_y(0, t) + H_z(0, t) = 2\psi \sin\theta\,, \\ &(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}} E_y(a, t) - H_z(a, t) = 0\,; \end{aligned}
$$

$$
(11)_2 \qquad \begin{aligned} &(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}} E_z(0, t) - H_y(0, t) = 2\psi \cos\theta\,, \\ &(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}} E_z(a, t) + H_y(a, t) = 0\,; \qquad (-\infty < t < +\infty) \end{aligned}
$$

per il sistema iperbolico quasilineare (3) nella lamina $(0 \leqslant x \leqslant a)$.

Si noti che in questo paragrafo ammettiamo la presenza di una (eventuale) componente longitudinale (necessariamente costante) del vettore spostamento elettrico $\underline{D}$: $D_x = D_0 \neq 0$ (cioè ammettiamo $e_0 \neq 0$ nella (3)$'$).

Si consideri dapprima il problema lineare costituito dai secondi blocchi 2×2 di (3) e (11): per il teorema di esistenza e unicità di Cesari $[\mathbf{3}]_{1,2,3,4}$, [**1**], [**2**] la soluzione esiste ed è unica. Con qualche calcolo (v. [**9**]), si trova che essa è data, in forma complessa, da

$$
(12) \qquad \begin{aligned} &E_z(x, t) = \{M_1' \exp[i\omega t - i\beta_1 x] + N_1' \exp[i\omega t + i\beta_1 x]\} \cos\theta\,, \\ &H_y(x, t) = (\varepsilon_s/\mu_0)^{\frac{1}{2}}\{- M_1' \exp[i\omega t - i\beta_1 x] + N_1' \exp[i\omega t + i\beta_1 x]\} \cos\theta \end{aligned}
$$

(per $0 \leqslant x \leqslant a$), con $\beta_1 = 2\pi K_1/\lambda$, $K_1 = (\varepsilon_s/\varepsilon_0)^{\frac{1}{2}}$ (indice di rifrazione), $K_1 > 1$, $r_1 = (K_1 - 1)(K_1 + 1)^{-1}$ (coefficiente di riflessione)

$$
(13) \qquad \begin{aligned} &N_1' = r_1 M_1' \exp(-2i\beta_1 a)\,, \\ &M_1' = 2E_L(K_1 + 1)^{-1}\delta_1^{-1}[1 - r_1^2 \exp(2i\beta_1 a)] \exp(-i\omega t_0)\,, \end{aligned}
$$

con $\delta_1 = 1 + r_1^4 - 2r_1^2 \cos(2\beta_1 a)$.

Infine, lo sfasamento ωt_0 è definito dalle relazioni

$$\text{(14)} \qquad \cos(\omega t_0) = \delta^{-1}[1 - r^2 \cos(2\hat{\beta} a)], \qquad \sin(\omega t_0) = - r^2 \sin(2\hat{\beta} a)\, \delta^{-1},$$

con $\delta = [1 + r^4 - 2r^2 \cos(2\hat{\beta} a)]^{\frac{1}{2}}$, $\hat{\beta} = 2\pi K/\lambda$, $K = (\varepsilon^{(0)}/\varepsilon_0)^{\frac{1}{2}}$ (indice di rifrazione), $K > 1$, $r = (K-1)(K+1)^{-1}$ (coefficiente di riflessione).

Ci si riduce pertanto allo studio del seguente problema ai limiti (in cui E_z è data dalle (12)-(14))

$$\text{(15)} \qquad \begin{aligned} -\frac{\partial H_z}{\partial x} &= \varepsilon^{(0)} \frac{\partial E_y}{\partial t} + 2\alpha \left(E_x \frac{\partial E_x}{\partial t} - E_y \frac{\partial E_y}{\partial t}\right) - \beta \left(E_z \frac{\partial E_x}{\partial t} + E_x \frac{\partial E_z}{\partial t}\right) \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \qquad (0 \leqslant x \leqslant a); \end{aligned}$$

$$\text{(15)}' \qquad \varepsilon^{(0)} E_x + \beta E_y E_z + 2\alpha E_x E_y = \varepsilon^{(0)} e_0 ;$$

$$\text{(16)} \qquad \begin{aligned} &(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}} E_y(0, t) + H_z(0, t) = 2\psi \sin\theta , \\ &(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}} E_y(a, t) - H_z(a, t) = 0 \qquad (t \in E^1) . \end{aligned}$$

Poniamo (v. [**2**], [**3**]$_1$)

$$\text{(17)} \qquad E_y = E_y^0 + \tilde{E}_y , \qquad H_z = H_z^0 + \tilde{H}_z , \qquad E_x = e_0 + \tilde{E}_x .$$

Dalla (15)$'$ si ottiene allora

$$\text{(18)} \qquad \tilde{E}_x = - E_y(2\alpha e_0 + \beta E_z)[\varepsilon^{(0)} + 2\alpha E_y]^{-1} .$$

Posto

$$\text{(19)} \qquad m = 2\alpha e_0 + \beta E_z ; \qquad n = \varepsilon^{(0)} + 2\alpha E_y ,$$

segue

$$\text{(20)} \qquad \frac{\partial E_x}{\partial t} \equiv \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial t} = - \varepsilon^{(0)} m n^{-2} \frac{\partial E_y}{\partial t} - \beta n^{-1} E_y \frac{\partial E_z}{\partial t} .$$

Assumiamo poi che (E_y^0, H_z^0) soddisfino al sistema

$$\text{(21)} \qquad \begin{aligned} -\frac{\partial H_z^0}{\partial x} &= \varepsilon^{(0)} \frac{\partial E_y^0}{\partial t} - \beta e_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} , \\ \frac{\partial E_y^0}{\partial x} &= -\mu_0 \frac{\partial H_z^0}{\partial t} \qquad (0 \leqslant x \leqslant a) , \end{aligned}$$

ed alle condizioni ai limiti (16): in altri termini, (E_y^0, H_z^0) rappresentano, per $\beta e_0 = 0$, la soluzione lineare di (15), (16), cioè la soluzione del problema (15), (16) *linearizzato* (ottenuto ponendo $\alpha = \beta = 0$ nelle (15)). In forza delle (17), $(\tilde{E}_y, \tilde{H}_z)$ soddisfano allora alle condizioni ai limiti *omogenee* corrispondenti alle (16); inoltre, tenendo conto delle (18)-(21), si trova che esse soddisfano al sistema

$$(22)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial x} + \varepsilon^{(0)}[1+\eta]\,\frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial t} = 2\alpha(E_y^0 + \tilde{E}_y)\,\frac{\partial E_y^0}{\partial t} + \tilde{\Phi}\,, \\ &\frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial x} + \mu_0\,\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial t} = 0 \qquad\qquad (0 \leqslant x \leqslant a)\,, \end{aligned}$$

dove

$$\eta = -\,2\alpha e_0 m n^{-2} + 2\alpha E_y m^2 n^{-3} - 2\alpha[\varepsilon^{(0)}]^{-1} E_y + E_z m n^{-2}\beta\,,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} = -\,n^{-1}\,\Big\{ &-2\alpha e_0 \varepsilon^{(0)} m n^{-1}\,\frac{\partial E_y^0}{\partial t} - 2\alpha\beta e_0 E_y\,\frac{\partial E_z}{\partial t} + 2\alpha\varepsilon^{(0)} m^2 n^{-2} E_y\,\frac{\partial E_y^0}{\partial t} + \\ &+ 2\alpha\beta\, m n^{-1} E_y^2\,\frac{\partial E_z}{\partial t} + \beta\varepsilon^{(0)} E_z m n^{-1}\,\frac{\partial E_y^0}{\partial t} + \beta^2 E_z E_y\,\frac{\partial E_z}{\partial t} + \beta m E_y\,\frac{\partial E_z}{\partial t}\Big\}\,. \end{aligned}$$

Osserviamo che il sistema (22) con le condizioni ai limiti omogenee corrispondenti alle (16) è dello stesso tipo considerato in [**2**], [**3**]$_1$; introducendo le quantità adimensionali

$$(23)\qquad \varepsilon = \alpha\,\frac{E_L}{\varepsilon^{(0)}}\,, \qquad\qquad \tilde{\varepsilon} = \alpha\,\frac{e_0}{\varepsilon^{(0)}}\,,$$

si ha

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{(0)}\eta = -\,2\alpha E_y + O(\varepsilon)^2 + O(\varepsilon)O(\tilde{\varepsilon}) + O(\tilde{\varepsilon})^2\,, \\ &\tilde{\Phi} = O(\varepsilon)^2 + O(\varepsilon)O(\tilde{\varepsilon}) + O(\tilde{\varepsilon})^2\,, \qquad\qquad \text{per} \quad \varepsilon,\ \tilde{\varepsilon} \to 0\,. \end{aligned}$$

Pertanto, in forza dei risultati riportati in [**1**], [**2**], [**3**]$_1$ si ha il

TEOREMA 1. *Se* $|\varepsilon|$, $|\tilde{\varepsilon}|$, a *sono abbastanza piccoli, esiste in* $D_a = \{(x,t) \in E^2\colon\ 0 \leqslant x \leqslant a\}$ *una funzione vettoriale* (E_y, H_z) *che soddisfa al si-*

stema (15) q.o. *in* D_a *ed alle condizioni al contorno* (16), *nonchè alla* (15)' *ovunque in* E^1. *Tale funzione risulta periodica in* t *con lo stesso periodo* T *di* ψ, *limitata ed* (*uniformemente*) *Lipschitziana in* D_a. *Inoltre, per ogni fissato valore di* e_0, *tale soluzione è unica e dipende con continuità da* ψ (*nel senso della topologia uniforme* [**3**]).

Non riportiamo qui la dimostrazione (che è del resto del tutto analoga a quella esposta nei citati lavori), e stime numeriche accurate per il massimo spessore ammissibile a della lamina, per ε e per $\tilde{\varepsilon}$ (si veda in proposito i lavori [**1**], [**2**]). Osserviamo invece che la presenza di un campo longitudinale costante ($e_0 \neq 0$) comporta in sostanza, se il campo non è troppo intenso, soltanto una (lieve) modifica della soluzione lineare se $\beta \neq 0$ (v. la (21)); per $\beta = 0$, $e_0 = 0$ si ha $E_x = 0$, $\widehat{\Phi} = 0$, $\varepsilon^{(0)}\eta = -2\alpha E_y$, e si ritrova esattamente lo stesso sistema considerato in [**1**], [**2**], [**3**]$_1$, con un diverso termine noto (dipendente da θ) nelle condizioni ai limiti.

3.2. - Calcolo approssimato della seconda armonica

Un'espressione approssimata della seconda armonica si può ottenere facendo uso del metodo proposto in [**9**]. Scriviamo innanzitutto la soluzione del sistema *linearizzato*, cioè la soluzione delle (2), (3) ove si ponga $\alpha = \beta = 0$, con le condizioni di raccordo continuo (per le componenti tangenziali) sulle pareti $x = 0$ e $x = a$. Fuori dalla lamina si ha allora, in forma complessa, per $x < 0$

$$(24)_1 \qquad \begin{aligned} E_z^{\mathrm{I}} &= \{E_L \exp[i\omega\tilde{t} - i\beta_0 x] - M_0' \exp[i\omega t + i\beta_0 x]\}\cos\theta\,,\\ H_y^{\mathrm{I}} &= (\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac12}\{-E_L \exp[i\omega\tilde{t} - i\beta_0 x] - M_0' \exp[i\omega t + i\beta_0 x]\}\cos\theta\,; \end{aligned}$$

$$(24)_2 \qquad \begin{aligned} E_y^{\mathrm{I}} &= \{E_L \exp[i\omega\tilde{t} - i\beta_0 x] - M_0 \exp[i\omega t + i\beta_0 x]\}\sin\theta\,,\\ H_z^{\mathrm{I}} &= (\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac12}\{E_L \exp[i\omega\tilde{t} - i\beta_0 x] + M_0 \exp[i\omega t + i\beta_0 x]\}\sin\theta\,; \end{aligned}$$

e per $x > a$

$$(25)_1 \qquad \begin{aligned} E_z^{\mathrm{III}} &= M_3 \exp[i\omega t - i\beta_0(x - a)]\cos\theta\,,\\ H_y^{\mathrm{III}} &= -(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac12} E_z^{\mathrm{III}}\,; \end{aligned}$$

$$(25)_2 \qquad \begin{aligned} E_y^{\mathrm{III}} &= M_2 \exp[i\omega t - i\beta_0(x - a)]\sin\theta\,,\\ H_z^{\mathrm{III}} &= (\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac12} E_y^{\mathrm{III}}\,. \end{aligned}$$

La soluzione lineare nella lamina ($0 \leqslant x \leqslant a$) è data dalle (12)-(14), e dalla soluzione delle (21) (con $e_0 = 0$); con qualche calcolo, si trova per quest'ultima

$$\text{(26)}\qquad \begin{aligned} E_y^0 &= M_1\{\exp[i\omega t - i\hat{\beta}x] + r\exp[i\omega t + i\hat{\beta}(x - 2a)]\}\sin\theta\,, \\ H_z^0 &= (\varepsilon^{(0)}/\mu_0)^{\frac{1}{2}} M_1\{\exp[i\omega t - i\hat{\beta}x] - r\exp[i\omega t + i\hat{\beta}(x - 2a)]\}\sin\theta\,, \end{aligned}$$

con

$$\text{(27)}\qquad \begin{aligned} &M_1 = 2E_L(K+1)^{-1}\delta^{-1}\,, \qquad M_2 = M_1(1+r)\exp(-i\hat{\beta}a)\,, \\ &M_0 = (K-1)^{-1}\{(K+1)E_L\exp(-i\omega t_0) - 2KM_1\}\,, \\ &M_0' = 2^{-1}(K_1 - 1)M_1'(1 - \exp(-2i\beta_1 a)]\,, \quad M_3 = (1+r_1)M_1'\exp(-i\beta_1 a)\,. \end{aligned}$$

Operiamo, come nelle (17), la decomposizione

$$\text{(28)}\qquad E_y = E_y^0 + \tilde{E}_y\,, \qquad H_z = H_z^0 + \tilde{H}_z\,, \qquad E_x = \tilde{E}_x\,,$$

dove ora E_y^0 e H_z^0 sono date dalle (26). Il metodo di approssimazione proposto in [**9**] consiste essenzialmente nell'assumere $\tilde{E}_y$ e $\tilde{H}_z$ come soluzioni del sistema (15) in cui si trascurano, nei termini non lineari, $\tilde{E}_x$ ed $\tilde{E}_y$ rispetto a E_y^0 e a $E_z = E_z^0$ (data dalla (12)); si ha allora

$$\text{(29)}\qquad \begin{aligned} &-\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial x} = \varepsilon^{(0)}\frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial t} - 2\alpha E_y^0\frac{\partial E_y^0}{\partial t}\,, \\ &-\frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial x} = \mu_0\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial t} \qquad\qquad (0 \leqslant x \leqslant a)\,, \end{aligned}$$

con le condizioni al contorno omogenee

$$\text{(30)}\qquad \begin{aligned} &(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}}\tilde{E}_y(0, t) + \tilde{H}_z(0, t) = 0\,, \\ &(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}}\tilde{E}_y(a, t) - \tilde{H}_z(a, t) = 0 \qquad\qquad t \in E^1\,. \end{aligned}$$

Infine,

$$\varepsilon^{(0)}\tilde{E}_x = -\beta E_y^0 E_z^0 . \tag{31}$$

Per il teorema di Cesari [**2**], [**3**]$_1$, la soluzione di (29), (30) esiste ed è unica; con qualche calcolo (v. [**9**]), si trova che essa è data dalla (parte reale di)

$$\tilde{E}_y(x, t) = 2^{-1}\gamma E_L\{2k_2 \exp(-2i\hat{\beta}x) + 2k_1 \exp(2i\hat{\beta}x) + \tag{32}$$

$$+ 2^{-1}(i\hat{\beta}x)[\exp(-2i\hat{\beta}x) - r^2 \exp\{2i\hat{\beta}(x-2a)\}] + r \exp(-2i\hat{\beta}a)\} \exp(2i\omega t) ,$$

$$\tilde{H}_z(x, t) = 2^{-1}\gamma E_L(\varepsilon^{(0)}/\mu_0)^{\frac{1}{2}}\{2k_2 \exp(-2i\hat{\beta}x) - 2k_1 \exp(2i\hat{\beta}x) + \tag{33}$$

$$+ 2^{-1} i\hat{\beta}x[\exp(-2i\hat{\beta}x) + r^2 \exp\{2i\hat{\beta}(x-2a)\}] - 4^{-1}\exp(-2i\hat{\beta}x) +$$

$$+ 4^{-1}r^2 \exp[2i\hat{\beta}(x-2a)]\} \exp(2i\omega t) \qquad (0 \leqslant x \leqslant a) .$$

Si è posto

$$\gamma = 8\delta^{-2}(K+1)^{-2}\varepsilon \sin^2\theta \tag{34}$$

$$k_1 = 2^{-1}C_1(1+K^{-1}) - 4^{-1}[r\exp(-2i\hat{\beta}a) - 4^{-1}r^2\exp(-4i\hat{\beta}a) + 4^{-1}] , \tag{35}$$

$$k_2 = 2^{-1}C_1(1-K^{-1}) - 4^{-1}[r\exp(-2i\hat{\beta}a) + 4^{-1}r^2\exp(-4i\hat{\beta}a) - 4^{-1}] ,$$

$$C_1 = 8^{-1}K(K+1)^{-1}[\exp(4i\hat{\beta}a) - r^2]^{-1}\{-[r\exp(-4i\hat{\beta}a) + 1]$$

$$[r^2 - \exp(4i\hat{\beta}a)] + 4i\hat{\beta}ar(1+r) + 4r[\exp(2i\hat{\beta}a) - r\exp(-2i\hat{\beta}a)] -$$

$$- 8r(1+K)^{-1} - 2(1-r^2)K(1+K)^{-1}\} .$$

Fuori della lamina si ha

$$\tilde{E}_y^{\mathrm{I}} = C_0 \exp(2i\beta_0 x)\exp(2i\omega t) , \qquad \tilde{H}_z^{\mathrm{I}} = -(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}}\tilde{E}_y^{\mathrm{I}} \qquad (x<0) , \tag{36}$$

$$\tilde{E}_y^{\mathrm{III}} = C_2 \exp[-2i\beta_0(x-a)]\exp(2i\omega t) , \qquad \tilde{H}_z^{\mathrm{III}} = (\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}}\tilde{E}_y^{\mathrm{III}} \qquad (x>a) . \tag{37}$$

Si è posto

$$C_0 = \gamma E_L C_1 , \qquad C_2 = 2^{-1}\gamma E_L\{2k_2\exp(-2i\hat{\beta}a) + 2k_1\exp(2i\hat{\beta}a) + \tag{38}$$

$$+ 2^{-1}i\hat{\beta}a[\exp(-2i\hat{\beta}a)](1-r^2) + r\exp(-2i\hat{\beta}a)\} .$$

Ricapitolando, abbiamo la soluzione *esatta* per le componenti (E_z, H_y) nelle tre regioni, data dalle (24), (12), e la soluzione *approssimata* per le componenti (E_y, H_z) data da

$$(39)\qquad \begin{aligned} &E_y = E_y^{\mathrm{I}} + \tilde{E}_y^{\mathrm{I}}, && H_z = H_z^{\mathrm{I}} + \tilde{H}_z^{\mathrm{I}} && \text{per } x < 0\,; \\ &E_y = E_y^{\mathrm{III}} + \tilde{E}_y^{\mathrm{III}}, && H_z = H_z^{\mathrm{III}} + \tilde{H}_z^{\mathrm{III}} && \text{per } x > a\,; \\ &E_y = E_y^{0} + \tilde{E}_y, && H_z = H_z^{0} + \tilde{H}_z && \text{per } 0 \leqslant x \leqslant a\,. \end{aligned}$$

L'intensità della seconda armonica trasmessa è proporzionale a $|C_2|^2$, ed è quindi proporzionale a $\sin^4\theta$ (cfr. (34 e (38)). In altri termini, si ha che *la seconda armonica dipende dalla polarizzazione dell'onda laser incidente attraverso il fattore* $\sin^4\theta$ (per la sua intensità), ed è quindi nulla per $\sin\theta = 0$, cioè quando l'onda incidente è polarizzata parallelamente all'asse ottico z. Invece, per $\theta = \pi/2$ si riottengono i risultati di [**1**], [**2**], [**3**]$_1$, e la seconda armonica ha intensità *massima*, cfr. [**6**], [**7**], [**12**].

Si verifica che la soluzione approssimata (32)-(39) è valida all'ordine $O(\varepsilon)$ per $\varepsilon \to 0$: cioè soddisfa al sistema (15) ed alle condizioni ai limiti a meno di termini dell'ordine $o(\varepsilon)$ per $\varepsilon \to 0$.

Si osservi infine che la presenza di una seconda armonica osservabile (nel caso $\theta = \pi/2$) è stata effettivamente messa in luce in [**3**]$_1$, [**3**]$_4$ mediante il procedimento numerico convergente elaborato da L. Cesari sulla base della teoria rigorosa da lui proposta [**3**]$_{1,2,3,4}$, in pieno accordo, quindi, con i risultati sperimentali [**6**], [**7**].

4. - Propagazione lungo l'asse y

Consideriamo ora il problema analogo a quello trattato al n. **3**, ma assumendo che la propagazione avvenga lungo l'asse (ottico non lineare) y, che la lamina occupi la regione $0 \leqslant y \leqslant a$, e che l'onda incidente emessa dal laser sia polarizzata linearmente nel piano (x, z), con z asse ottico. Denotiamo con θ l'angolo che l'asse ottico forma con la direzione di polarizzazione del campo elettrico dell'onda incidente (angolo di polarizzazione).

Cerchiamo soluzioni delle equazioni di Maxwell (3.1), nonchè delle relazioni costitutive (2.2), che dipendono solo da (y, t). Ammetteremo anche qui (per maggior generalità) la (eventuale) presenza di una componente longitudinale del vettore spostamento elettrico $\underline{D}$, necessariamente costante (ed uguale nelle tre regioni).

Seguendo lo stesso metodo del n. **3** si perviene al seguente sistema di equazioni per il campo elettromagnetico entro la lamina

$$(1)_1 \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial H_z}{\partial y} = \varepsilon^{(0)}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \beta\,(E_y\frac{\partial E_z}{\partial t} + E_z\frac{\partial E_y}{\partial t}) + 2\alpha\,(E_x\frac{\partial E_y}{\partial t} + E_y\frac{\partial E_x}{\partial t})\,,\\ &\frac{\partial E_x}{\partial y} = \mu_0\frac{\partial H_z}{\partial t}\,; \end{aligned}$$

$$(1)_2 \qquad -\frac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon_s\frac{\partial E_z}{\partial t}\,, \qquad -\frac{\partial E_z}{\partial y} = \mu_0\frac{\partial H_x}{\partial t}\,;$$

$$(2) \qquad \varepsilon^{(0)}E_y + \alpha E_x^2 - \alpha E_y^2 - \beta E_x E_z = \varepsilon^{(0)}e_0 \qquad (0\leqslant y\leqslant a)\,,$$

e con le condizioni ai limiti

$$(1)_1' \qquad \begin{aligned} &(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac12}E_x(0,t) - H_z(0,t) = 2\psi(\omega\tilde t)\sin\theta\,,\\ &(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac12}E_x(a,t) + H_z(a,t) = 0\,; \end{aligned}$$

$$(1)_2' \qquad \begin{aligned} &(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac12}E_z(0,t) + H_x(0,t) = 2\psi(\omega\tilde t)\cos\theta\,,\\ &(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac12}E_z(a,t) - H_x(a,t) = 0 \qquad (-\infty<t<+\infty)\,. \end{aligned}$$

Si consideri dapprima il secondo blocco 2×2 di (1) e (1)$'$: esso è soddisfatto dalla soluzione lineare (E_z^0, H_x^0) della forma (3.12) (con le opportune sostituzioni, e cambiando il segno del campo magnetico) per (E_z, H_x); tale soluzione è unica, per il teorema di Cesari [**3**]$_1$, [**1**].

Poniamo poi

$$(3) \qquad E_x = E_x^0 + \tilde E_x\,, \qquad H_z = H_z^0 + \tilde H_z\,, \qquad E_y = e_0 + \tilde E_y\,,$$

dove (E_x^0, H_z^0) (soluzione lineare) soddisfa al sistema

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial H_z^0}{\partial y} = [\varepsilon^{(0)} + 2\alpha e_0]\frac{\partial E_x^0}{\partial t} + \beta e_0\frac{\partial E_z^0}{\partial t}\,,\\ &\frac{\partial E_x^0}{\partial y} = \mu_0\frac{\partial H_z^0}{\partial t} \qquad (0\leqslant y\leqslant a)\,, \end{aligned}$$

ed al primo blocco delle condizioni ai limiti (1'). Dalle (2), (3) segue

$$\varepsilon^{(0)}\tilde{E}_y + \alpha E_x^2 - \alpha(e_0 + \tilde{E}_y)^2 - \beta E_x E_z^0 = 0\,, \tag{5}$$

che permette di esprimere $\tilde{E}_y$ in termini di E_x (e di e_0 e E_z^0): si trova

$$\tilde{E}_y = [O(\varepsilon) + O(\tilde{\varepsilon})]\, E_L \qquad \text{per } \varepsilon,\ \tilde{\varepsilon} \to 0\,, \tag{6}$$

dove ε, $\tilde{\varepsilon}$ sono definite nelle (3.23). Si ottiene allora da (1), (4), (5)

$$\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial y} = \varepsilon^{(0)}\frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial t} + \{\beta \tilde{E}_y \frac{\partial E_z^0}{\partial t} + \beta E_z^0 \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial t} + $$
$$+ 2\alpha \tilde{E}_x \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial t} + 2\alpha \tilde{E}_y \frac{\partial E_x}{\partial t} + 2\alpha E_x^0 \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial t}\} + 2\alpha\, e_0 \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial t}\,.$$

Pertanto, $(\tilde{E}_x, \tilde{H}_z)$ soddisfano ad un sistema della forma

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial y} - [\varepsilon^{(0)} + 2\alpha e_0 + \varepsilon^{(0)}\hat{\eta}]\,\frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial t} = \varepsilon^{(0)}[O(\varepsilon+\tilde{\varepsilon})^2 \frac{\partial E_z^0}{\partial t} + O(\varepsilon+\tilde{\varepsilon})^2 \frac{\partial E_x^0}{\partial t}]\,,\\ &\frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} - \mu_0 \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial t} = 0 \qquad\qquad (0 \leqslant y \leqslant a)\,, \end{aligned} \tag{7}$$

con $\hat{\eta} = O(\varepsilon + \tilde{\varepsilon})^2$, assieme alle condizioni ai limiti omogenee corrispondenti al primo blocco di (1'). Pertanto, in forza dei risultati ottenuti in [**1**], [**2**], [**3**]$_1$ il sistema (7), (1)' è riducibile alla *seconda forma canonica* (chiamata «forma canonica di Schauder» in [**3**]$_1$, [**3**]$_2$, [**3**]$_3$) soddisfacente alle ipotesi di Cesari, e vale il seguente

Teorema 2. *Se* $|\varepsilon|$, $|\tilde{\varepsilon}|$, a *sono abbastanza piccoli, esiste ed è unica in* $D_a = \{(y, t) \in E^2\colon 0 \leqslant y \leqslant a\}$ *la soluzione di* (1), (1)' (*nel senso del Teorema* 1), *uniformemente Lipschitziana, limitata e periodica in* t (*con lo stesso periodo* T *di* ψ), *dipendente con continuità da* ψ.

Non riportiamo qui la dimostrazione (che è del resto del tutto analoga a quella esposta nei citati lavori), e stime numeriche accurate per ε, $\tilde{\varepsilon}$ ed a (si veda in proposito [**1**], [**2**]). Osserviamo invece che, anche qui, la presenza di una componente longitudinale del vettore spostamento $\underline{D}$ ($e_0 \neq 0$) comporta sostanzialmente, come al n. **3**, se tale campo non è troppo intenso, soltanto una (lieve) modifica della soluzione lineare. Assumiamo perciò d'ora in poi $e_0 = 0$ ($D_y = 0$), e consideriamo le equazioni per il calcolo approssimato (nel senso del n. **3** e di [**9**]) della seconda armonica: si ha allora che E_x^0 e H_z^0 soddisfano al sistema lineare (4) (ove si ponga $e_0 = 0$) ed al primo blocco delle (1)', e sono quindi della forma (3.26) (con le opportune modifiche, e cambiando il segno del campo magnetico), mentre $(\tilde{E}_x, \tilde{H}_z)$ soddisfano al sistema (approssimato)

$$\text{(9)} \qquad \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial y} = \varepsilon^{(0)} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} = \mu^{(0)} \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial t} \qquad (0 \leqslant y \leqslant a),$$

assieme alle condizioni ai limiti *omogenee* corrispondenti al primo blocco di (1)'. In forza del teorema di Cesari [**3**]$_1$, [**1**] si ha che l'unica soluzione è allora data da $\tilde{E}_x = 0 = \tilde{H}_z$, cioè (nell'ordine di approssimazione in cui sono valide le (9)) *non* si ha generazione di seconda armonica. Si ha poi l'equazione

$$\text{(10)} \qquad \varepsilon^{(0)} \tilde{E}_y = -E_x^0[\alpha E_x^0 - \beta E_z^0], \qquad E_y^0 = 0,$$

che permette di ricavare E_y dalla soluzione lineare.

In conclusione, si ha che (all'ordine di approssimazione per cui sono valide le (9)) *non si ha generazione di seconda armonica nel caso della propagazione lungo l'asse* y (asse x nelle notazioni di [**7**], [**6**], [**12**]). Questo risultato è stato verificato sperimentalmente (v. [**6**], [**7**], [**12**]), e costituisce una prima parziale conferma della validità del metodo approssimato proposto in [**9**] (cfr. anche n. **5**), una volta inquadrato nell'ambito della teoria rigorosa proposta da Cesari.

5. - Propagazione lungo l'asse ottico z

Consideriamo ora il problema analogo a quelli trattati nei nn. **3** e **4**, assumendo che la propagazione avvenga lungo l'asse ottico z e che la lamina $(0 \leqslant z \leqslant a)$ sia tagliata ortogonalmente all'asse ottico. Si assume ancora l'onda incidente piana monocromatica armonica polarizzata linearmente nel piano (x, y), e si denota con θ l'angolo formato dall'asse y con la direzione di polarizzazione del campo elettrico dell'onda emessa dal laser (angolo di polarizzazione).

Si cercano soluzioni delle equazioni di Maxwell (3.1) e delle relazioni costitutive (2.2) che dipendono solo da (z, t). Seguendo lo stesso metodo dei nn. precedenti si ottiene il seguente sistema di equazioni per il campo elettromagnetico entro la lamina $(0 \leqslant z \leqslant a)$

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial E_x}{\partial z} + \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial H_y}{\partial z} + \varepsilon^{(0)} \frac{\partial E_x}{\partial t} + 2\alpha E_x \frac{\partial E_y}{\partial t} + 2\alpha E_y \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0; \\ &\frac{\partial E_y}{\partial z} - \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \varepsilon^{(0)} \frac{\partial E_y}{\partial t} - 2\alpha E_x \frac{\partial E_x}{\partial t} + 2\alpha E_y \frac{\partial E_y}{\partial t} = 0; \end{aligned}$$

$$E_z = H_z = 0 \qquad (0 \leqslant z \leqslant a) \qquad (-\infty < t < +\infty);$$

con le seguenti condizioni ai limiti

$$(1)'_1 \qquad \begin{aligned} &(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}} E_x(0, t) + H_y(0, t) = 2\psi(\omega\tilde{t}) \sin\theta\,, \\ &(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}} E_x(a, t) - H_y(a, t) = 0\,; \end{aligned}$$

$$(1)'_2 \qquad \begin{aligned} &(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}} E_y(0, t) - H_x(0, t) = 2\psi(\omega\tilde{t}) \cos\theta\,, \\ &(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}} E_y(a, t) + H_x(a, t) = 0 \qquad (-\infty < t < +\infty)\,. \end{aligned}$$

Le (1), (1)′ costituiscono un problema ai limiti (per il sistema iperbolico quasilineare (1)) per il quale, allo stadio attuale, *non* è immediatamente estendibile il teorema di esistenza ed unicità di Cesari: infatti il sistema (1) è bensì riducibile (come ogni sistema iperbolico in due variabili indipendenti) alla « seconda forma canonica », mediante una estensione del procedimento impiegato in [**1**], [**2**], [**3**]$_1$, ma si trova che l'ipotesi fondamentale di « diagonale principale dominante » (DMD) di Cesari [**3**]$_{1,2,3,4}$, *non* è soddisfatta. Ciò è dovuto essenzialmente al fatto che la quadrica indicatrice di ε_{ij} è di rotazione attorno all'asse ottico lineare z (essendo i cristalli della classe qui considerata tutti uniassici), e quindi le caratteristiche del sistema *linearizzato* corrispondente a (1) (cioè del sistema (1) ove si ponga $\alpha = 0$) sono *multiple* (doppie). Le caratteristiche del sistema non lineare (1) si « biforcano » allora da caratteristiche multiple del sistema linearizzato, e la loro molteplicità non è evidentemente costante nel campo di variabilità di (z, t, E, H) che si considera. Dunque, in questo caso (della propagazione lungo l'asse ottico) manca, allo stadio attuale, un teorema di esistenza ed unicità.

Per quanto concerne il sistema linearizzato, ottenuto ponendo $\alpha = 0$ in (1), si osserva che esso si disaccoppia in due sistemi 2×2 corrispondenti ai due blocchi delle condizioni ai limiti (1)′: per ognuno di essi vale evidentemente il teorema di Cesari, e quindi la soluzione *lineare* esiste ed è unica. Dalla forma delle condizioni al contorno (1)′ segue che essa è necessariamente della forma

$$(2) \qquad \begin{aligned} &E_x^0(z, t) = E_0(z, t) \sin\theta\,, \qquad E_y^0(z, t) = E_0(z, t) \cos\theta\,, \\ &H_y^0(z, t) = -H_0(z, t) \sin\theta\,, \qquad H_x^0(z, t) = H_0(z, t) \cos\theta\,, \end{aligned} \qquad (0 \leqslant z \leqslant a)$$

dove E_0 e H_0 soddisfano al sistema

$$(3) \qquad \frac{\partial E_0}{\partial z} = \mu_0 \frac{\partial H_0}{\partial t}\,, \qquad \frac{\partial H_0}{\partial z} = \varepsilon^{(0)} \frac{\partial E_0}{\partial t} \qquad (0 \leqslant z \leqslant a)\,,$$

con le condizioni ai limiti

$$(3)' \qquad \begin{aligned} &(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}} E_0(0, t) - H_0(0, t) = 2\psi(\omega\tilde{t}) \,, \\ &(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}} E_0(a, t) + H_0(a, t) = 0 \,. \end{aligned}$$

L'onda incidente è data da

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\underline{E} = \underline{E}_L \cos[\beta_0(z - c_0\tilde{t})] \,, \qquad \underline{H} = \underline{H}_L \cos[\beta_0(z - c_0\tilde{t})] \,, \\ &\underline{E}_L = E_L[\sin\theta\underline{i} + \cos\theta\underline{j}] \,, \qquad \underline{H}_L = (\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}} E_L[-\cos\theta\underline{i} + \sin\theta\underline{j}] \,, \end{aligned}$$

$\beta_0 = 2\pi/\lambda$, $\lambda = c_0 T$, $T = 2\pi/\omega$, $\tilde{t} = t - t_0$, e il termine di sfasamento t_0 è definito nella (3.14).

5.1. - Casi particolari: soluzioni esatte

(i) Onda incidente polarizzata lungo l'asse y.

Si ha $\sin\theta = 0$ $(\theta = 0, \pi)$, $E_y^0 = \pm E_0$, $H_x^0 = \pm H_0$, $E_x^0 = 0 = H_y^0$. Posto

$$(5) \qquad E_y = \pm E_0 + \tilde{E}_y \,, \qquad H_x = \pm H_0 + \tilde{H}_x \,, \qquad E_x = \tilde{E}_x \,, \qquad H_y = \tilde{H}_y \,,$$

si ha immediatamente da (1), (1)', (3), (3)' che una soluzione esatta è data da $E_x = 0 = H_y$, se (E_y, H_x) soddisfano al sistema 2×2

$$(6) \qquad \frac{\partial H_x}{\partial z} - [\varepsilon^{(0)} - 2\alpha E_y]\frac{\partial E_y}{\partial t} = 0 \,, \qquad \frac{\partial E_y}{\partial z} - \mu_0\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \,;$$

$$(6)' \qquad \begin{aligned} &(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}} E_y(0, t) - H_x(0, t) = \pm 2\psi \,, \\ &(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}} E_y(a, t) + H_x(a, t) = 0 \,. \end{aligned}$$

Il problema ai limiti (6), (6)' è della stessa forma di quello considerato in [**1**], [**2**], [**3**]$_1$ e pertanto vale il teorema di esistenza ed unicità, e stime per a, ivi riportate; ad esso inoltre è immediatamente applicabile il procedimento numerico elaborato in [**3**]$_1$. Si noti però che, per quanto sopra osservato, non è possibile escludere che esistano altre soluzioni (esatte) in corrispondenza alla polarizzazione qui assunta per l'onda incidente.

(ii) Onda incidente con angolo di polarizzazione $\theta = \theta_0$, $\tan\theta_0 = \pm\sqrt{3}$.

Si ha $E_x^0 = \pm\sqrt{3}E_y^0$. Si verifica che una soluzione esatta di (1), (1)′ è data da

$$E_x = \pm\sqrt{3}E_y\,, \qquad H_y = \mp\sqrt{3}H_x\,, \tag{7}$$

se (E_y, H_x) soddisfano al sistema 2×2, con le condizioni ai limiti

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} - \mu_0\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0\,, \qquad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \varepsilon^{(0)}\frac{\partial E_y}{\partial t} - 4\alpha E_y\frac{\partial E_y}{\partial t} = 0\,; \tag{8}$$

$$(8)' \qquad \begin{aligned} &(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}}E_y(0,t) - H_x(0,t) = 2\psi\cos\theta_0\,,\\ &(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}}E_y(a,t) + H_x(a,t) = 0\,. \end{aligned}$$

Il problema ai limiti (8), (8)′ è della stessa forma di quello considerato nei citati lavori, pertanto vale il teorema di esistenza ed unicità, le stime per a, ed il procedimento numerico ivi riportati. Si osservi però che anche qui non è possibile escludere che esistano altre soluzioni in corrispondenza alla polarizzazione qui assunta per l'onda incidente.

5.2. - Caso generale: calcolo approssimato della seconda armonica

Poniamo

$$E_x = E_x^0 + \tilde{E}_x\,, \quad E_y = E_y^0 + \tilde{E}_y\,, \quad H_x = H_x^0 + \tilde{H}_x\,, \quad H_y = H_y^0 + \tilde{H}_y\,, \tag{9}$$

e applichiamo il metodo approssimato seguito in **3.2** [**9**]. Allora, E_x^0, E_y^0, H_x^0, H_y^0 soddisfano alle (2), (3), (3)′ (soluzione lineare), e per le (1), (1)′ si perviene al sistema (approssimato)

$$(10) \qquad \begin{aligned} &-\frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial z} = \varepsilon^{(0)}\frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial t} + 2\alpha E_0\left(\frac{\partial E_0}{\partial t}\right)\sin 2\theta\,, \qquad \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} = -\mu_0\frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial t}\,;\\ &\frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial z} = \varepsilon^{(0)}\frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial t} - 2\alpha E_0\left(\frac{\partial E_0}{\partial t}\right)\cos 2\theta\,, \qquad \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial z} = \mu_0\frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial t} \qquad (0 \leqslant z \leqslant a)\,. \end{aligned}$$

Il sistema (10) e le condizioni ai limiti omogenee corrispondenti alle (1)′ sono soddisfatte ponendo

$$\tilde{E}_x = -\tilde{E}(z,t)\sin 2\theta\,,\qquad \tilde{E}_y = \tilde{E}(z,t)\cos 2\theta\,,$$

(11)

$$\tilde{H}_x = \tilde{H}(z,t)\cos 2\theta\,,\qquad \tilde{H}_y = \tilde{H}(z,t)\sin 2\theta\,,$$

se $\tilde{E}(z,t)$ e $\tilde{H}(z,t)$ soddisfano al problema ai limiti

(12) $$\frac{\partial\tilde{H}}{\partial z} = \varepsilon^{(0)}\frac{\partial\tilde{E}}{\partial t} - 2\alpha E_0\frac{\partial E_0}{\partial t}\,,\qquad \frac{\partial\tilde{E}}{\partial z} = \mu_0\frac{\partial\tilde{H}}{\partial t}\,,$$

(12)′ $$(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}}\tilde{E}(0,t) - \tilde{H}(0,t) = 0\,,\qquad (\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}}\tilde{E}(a,t) + \tilde{H}(a,t) = 0\,,$$

ed evidentemente la soluzione di (12), (12)′ è unica e assieme alle (11) fornisce l'unica soluzione del sistema (approssimato) (10), sempre per il teorema di Cesari. Con qualche calcolo (simile a quelli effettuati al n. **3**) si trova che la soluzione nella regione I $(z<0)$ è data da

$$E_y = E_0\cos\theta + \tilde{E}\cos 2\theta\,,\qquad H_x = \cos\theta\, H_0 + \tilde{H}\cos 2\theta\,,$$

(13)

$$E_x = E_0\sin\theta - \tilde{E}\sin 2\theta\,,\qquad H_y = -H_0\sin\theta + \tilde{H}\sin 2\theta\,,$$

con

(14) $$E_0 = E_L\exp[i\omega\bar{t} - i\beta_0 z] - M_0\exp[i\omega t + i\beta_0 z]\,,$$

$$H_0 = -(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}}\{E_L\exp[i\omega\bar{t} - i\beta_0 z] + M_0\exp[i\omega t + i\beta_0 z]\}\,,$$

$$\tilde{E} = C_0\exp(2i\beta_0 z)\exp(2i\omega t)\,,\qquad \tilde{H} = (\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}}\tilde{E}\qquad (z<0)\,.$$

La soluzione nella regione III $(z>a)$ è data dalle (13), con

(15) $$E_0 = M_2\exp[i\omega t + i\beta_0(z-a)]\,,\qquad H_0 = -(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}}E_0$$

$$\tilde{E} = C_2\exp[-2i\beta_0(z-a)]\exp(2i\omega t)\,,\qquad \tilde{H} = -(\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}}\tilde{E}\qquad (z>a)\,.$$

La soluzione nella lamina $(0 \leqslant z \leqslant a)$ è data dalle (13), con

$$
\begin{aligned}
(16)\quad E_0 &= M_1\{r \exp[i\omega t + i\hat{\beta}(z-2a)] + \exp[i\omega t - i\hat{\beta}z]\}\,,\\
H_0 &= (\varepsilon^{(0)}/\mu_0)^{\frac{1}{2}} M_1\{r \exp[i\omega t + i\hat{\beta}(z-2a)] - \exp[i\omega t - i\hat{\beta}z]\}\,,\\
\tilde{E} &= 2^{-1}\gamma E_L[2k_2 \exp(-2i\hat{\beta}z) + 2k_1 \exp(2i\hat{\beta}z) + r \exp(-2i\hat{\beta}a) +\\
&\qquad + 2^{-1} i\hat{\beta}z[\exp(-2i\hat{\beta}z) - r^2 \exp[2i\hat{\beta}(z-2a)]]\} \exp(2i\omega t)\,,\\
\tilde{H} &= 2^{-1}\gamma E_L(\varepsilon^{(0)}/\mu_0)^{\frac{1}{2}}\{2k_1 \exp(2i\hat{\beta}z) - 2k_2 \exp(-2i\hat{\beta}z) -\\
&\quad - 2^{-1} i\hat{\beta}z[\exp(-2i\hat{\beta}z) + r^2 \exp[2i\hat{\beta}(z-2a)]] + 4^{-1}\exp(-2i\hat{\beta}z) -\\
&\qquad - 4^{-1} r^2 \exp[2i\hat{\beta}(z-2a)]\} \exp(2i\omega t) \qquad (0 \leqslant z \leqslant a)\,\cdot
\end{aligned}
$$

Le costanti $\hat{\beta}$, k_1, k_2, C_1, K, r, δ, t_0, M_0, M_1, M_2, C_0 sono definite al n. **3**, la costante C_2 è data dalla (3.38), mentre γ è ora data da

$$\gamma = 8\varepsilon(K+1)^{-2}\delta^{-2}\,, \qquad \varepsilon = \alpha E_L/\varepsilon^{(0)}\,.$$

L'intensità della seconda armonica trasmessa proporzionale a $|C_2|^2$ ed è quindi indipendente da θ. Pertanto, nei limiti dell'approssimazione fatta, si ha che: *l'intensità della seconda armonica risulta indipendente dalla polarizzazione dell'onda incidente (emessa dal laser)*. Anche questo risultato trova piena conferma sperimentale (v. [**6**], [**7**]).

Si verifica poi che la soluzione (16) è valida all'ordine $O(\varepsilon)$ per $\varepsilon \to 0$, cioè soddisfa al sistema (1), (1)' a meno di termini dell'ordine $o(\varepsilon)$ per $\varepsilon \to 0$.

Si noti inoltre che nel caso qui considerato, della propagazione lungo l'asse ottico z, non compare mai nelle equazioni (1) la componente β del tensore suscettività non lineare. Infine, la seconda armonica risulta polarizzata con angolo di polarizzazione (-2θ), che coincide con la polarizzazione della fondamentale nei casi considerati al n. **5.1**.

Bibliografia

[1] P. BASSANINI, *A nonlinear hyperbolic problem arising from a question of nonlinear optics*, J. Appl. Math. Phys. (ZAMP) (4) **27** (1976), 409-422.

[2] P. BASSANINI and G. POLIDORI, *A nonlinear hyperbolic problem arising from a question of nonlinear optics*, Part II, ZAMP (5) **27** (1976), 815-831.

[3] L. CESARI: $[\bullet]_1$ *The duplication of frequency in laser radiation through nonlinear media*, Report, University of Michigan 1978; $[\bullet]_2$ *A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems in the Schauder canonic form*,

Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (1) **4** (1974), 311-358; [•]$_3$ *Sistemi iperbolici ed oscillazioni non lineari,* Rend. Sem. Mat. Fis. Univ. Milano (5) **44** (1974), 139-154; [•]$_4$ *Numerical methods for quasi linear hyperbolic systems and applications to a problem of nonlinear optics* (to appear).

[4] B. D. COLEMAN and E. H. DILL, *Thermodynamic restrictions on the constitutive equations of electromagnetic theory,* ZAMP (4) **22** (1971), 691-701.

[5] R. COURANT and D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics* II, Interscience 1965.

[6] P. A. FRANKEN, A. E. HILL, C. W. PETERS and G. WEINREICH, *Generation of optical harmonics,* Phys. Rev. Letters **7** (1961), 118-119.

[7] P. A. FRANKEN and J. F. WARD, *Optical harmonics and nonlinear phenomena,* Rev. Mod. Physics (1) **35** (1963), 23-39.

[8] D. GRAFFI: [•]$_1$ *Qualche problema di elettromagnetismo,* Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics, Ed. G. Fichera, Univ. Lecce, Pitman (1975), 129-143; [•]$_2$ *Problemi non lineari nella teoria del campo elettromagnetico,* Atti Accad. Naz. Modena (9) **4** (1967), 1-12.

[9] G. PETTINI, *Su una questione di ottica non lineare,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **XVII** (1968), 351-364.

[10] P. PUCCI, *Problemi ai limiti per sistemi di equazioni iperboliche,* Boll. Un. Mat. Ital. (5) **16**-B (1979).

[11] G. N. RAMACHANDRAN and S. RAMASESHAN, *Crystal optics,* Handbuch der Physik, **XXV/1** (1961), 1-217.

[12] S. SINGH, *Nonlinear optical materials,* C. R. C. Handbook of Laser, C. R. C. Press, 1971, 489-523.

Abstract

The duplication of frequency of laser radiation through a thin slab of a piezoelectric crystal of class 32-D_3 is investigated, in the framework of the «problem of Graffi-Cesari», for normal incidence and propagation along the nonlinear optic axes. Theorems of existence and uniqueness are given, as well as approximate evaluations of the transmitted and reflected second harmonic waves, and the dependence upon polarization of the incident laser wave is deduced, in full agreement with available experimental data.

* * *