Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 131-139

Gabriele Andreassi (*)

Sui gruppi di funzioni generalizzati a matrice singolare (**)

A Giorgio Sestini per il suo 70° compleanno

1. - Sia $\eta(\omega)$ una matrice antisimmetrica di ordine n, i cui elementi $\eta^{\alpha\beta}(\omega)$ siano funzioni di n variabili $\omega^1 \dots \omega^n$. Per ogni coppia di funzioni $f(\omega)$, $g(\omega)$ di classe C^1 si introduca la parentesi di Poisson generalizzata (PPG: [4], [5])

$$(fg)^* = \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha f\,\partial_\beta g\,. \tag{1}$$

Sia poi $h(\omega t)$ una funzione di classe C^1 delle ω e di un parametro t. L'equazione

$$(hf)^* + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

o, esplicitamente,

$$\eta^{\alpha\beta}(\omega)\,\partial_\alpha h\,\partial_\beta f + \partial_t f = 0 \tag{2$'$}$$

possiede n soluzioni indipendenti $f^1(\omega t) \dots f^n(\omega t)$.

Si supponga ancora che le $\eta^{\alpha\beta}(\omega)$ soddisfino le relazioni

$$\eta^{\alpha\gamma}\partial_\gamma\eta^{\beta\delta} + \eta^{\delta\gamma}\partial_\gamma\eta^{\alpha\beta} + \eta^{\beta\gamma}\partial_\gamma\eta^{\delta\alpha} = 0\,. \tag{3}$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Via Arnesano, Lecce, Italy.

(**) Ricevuto: 31-VII-1978.

In questo caso le soluzioni di (2) hanno la seguente proprietà: la PPG di ogni coppia di soluzioni della (2) è ancora una soluzione di tale equazione. Ma le soluzioni di (2) sono n e quindi risulta

$$(f^i f^k)^* = A^{ik}(f^1 \dots f^n) ,$$

dove le A^{ik} sono funzioni opportune.

In un precedente lavoro [**1**] si è introdotto il concetto di gruppo di funzioni generalizzato e si è esaminato il caso dei gruppi a matrice η non singolare. Tali gruppi posseggono proprietà del tutto analoghe a quelle dei gruppi di funzioni ordinari. In particolare non soltanto, come si è appena visto, assegnata una funzione h si può associare ad essa un gruppo generalizzato, ma, viceversa, ogni gruppo generalizzato a matrice non singolare di ordine n ammette [**1**] una funzione h (hamiltoniano del gruppo) nel senso che ogni base di un tale gruppo costituisce sempre un sistema completo di soluzioni di un'equazione di tipo (2).

Se η è singolare, di rango $n - a$, la discussione precedente mostra ancora che ad ogni h è associato un gruppo di funzioni generalizzato. Inoltre in questo caso in virtù delle (3) il sistema di equazioni

$$\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha \theta = 0 \tag{4}$$

è completo [**5**] e ammette a soluzioni indipendenti $\theta^1 \dots \theta^a$, le funzioni neutre della matrice η.

Se la funzione h nella (2) non è neutra le quantità

$$c^\beta = \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha h \qquad (\beta = 1 \dots n)$$

non sono nulle. In questo caso la (2) ammette come soluzioni un effettivo gruppo di funzioni.

È spontaneo porsi il problema inverso: assegnato un gruppo di funzioni generalizzato a matrice singolare, di ordine n (le cui funzioni dipendano anche da un parametro t) esiste sempre per esso una funzione hamiltoniana h? Nel numero successivo si vedrà che la risposta è affermativa. Per il momento si può osservare che l'esistenza di un hamiltoniano (1) implica l'esistenza di una

---

(1) Al solito, il sistema algebrico (2) nelle incognite $\partial_\alpha h$ ammette infinite soluzioni. Non è detto a priori, però, che una soluzione sia costituita dalle derivate di un'unica funzione.

infinità di tali funzioni, perchè, se h è un hamiltoniano, per la (4) è hamiltoniano anche $h + \varphi(\theta)$ dove φ è una funzione arbitraria delle funzioni neutre. Si vede pure che, viceversa, se esistono due hamiltoniani h e h' di un gruppo generalizzato a matrice singolare, essi differiscono necessariamente per una funzione neutra. Infatti è

$$\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha h\,\partial_\beta f^k + \partial_t f^k = 0\,, \qquad \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha h'\,\partial_\beta f^k + \partial_t f^k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n)\,,$$

da cui

$$\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha(h - h')\,\partial_\beta f^k = 0\,.$$

Le funzioni f^k sono mutuamente indipendenti e quindi la matrice $\|\partial_\beta f^k\|$ è non singolare. Di conseguenza risulta

$$\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha(h - h') = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, n)\,, \tag{5}$$

e pertanto la funzione $h - h'$ è neutra ([**5**], pag. 117). Naturalmente le soluzioni della (2) non dipendono necessariamente tutte da t. Per esempio le funzioni neutre $\theta^1(\omega) \ldots \theta^a(\omega)$ per l'indipendenza di η da t sono indipendenti da tale parametro (²) e sono certo soluzioni della (2); si può quindi scegliere un sistema completo di soluzioni della (2) associando alle funzioni $\theta^1 \ldots \theta^a$, $n - a$ soluzioni indipendenti $\psi^1 \ldots \psi^{n-a}$. In tal modo si ottiene un gruppo di funzioni (a matrice singolare) di ordine massimo contenente nella base un sistema completo di funzioni neutre.

Viceversa è facile riconoscere che un gruppo generalizzato di ordine massimo contiene sempre tutte le funzioni neutre (³).

2. – Per riconoscere l'esistenza di h anche nel caso in cui η è singolare, si può procedere in parte come nel caso in cui η è non singolare. La dimostrazione data in [**1**] si basa però in maniera essenziale sull'esistenza della inversa di η e quindi non può essere utilizzata nel caso presente.

Si scelga una base $\psi^1 \ldots \psi^{n-a}\theta^1 \ldots \theta^a$ contenente un sistema completo di

---

(²) Le funzioni neutre possono contenere t in funzioni moltiplicative inessenziali.

(³) Per una trattazione dei gruppi a matrice singolare e in particolare per l'estensione di un gruppo di ordine r a un gruppo di ordine n vedere [**3**].

funzioni neutre. La matrice ad n righe e $n+1$ colonne

$$
(6) \qquad \begin{bmatrix}
\dfrac{\partial\psi^1}{\partial\omega^1} & \dots & \dfrac{\partial\psi^1}{\partial\omega^n} & \dots & \dfrac{\partial\psi^1}{\partial t} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\dfrac{\partial\psi^{n-a}}{\partial\omega^1} & \dots & \dfrac{\partial\psi^{n-a}}{\partial\omega^n} & \dots & \dfrac{\partial\psi^{n-a}}{\partial t} \\
\dfrac{\partial\theta^1}{\partial\omega^1} & \dots & \dfrac{\partial\theta^1}{\partial\omega^n} & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\dfrac{\partial\theta^a}{\partial\omega^1} & \dots & \dfrac{\partial\theta^a}{\partial\omega^n} & \dots & 0
\end{bmatrix} \equiv \Delta
$$

per l'indipendenza delle ψ, θ ha rango n e quindi esiste un'unica combinazione lineare nulla delle colonne

$$
(7)_1 \qquad X^\alpha \partial_\alpha \psi^i + X^0 \frac{\partial \psi^i}{\partial t} = 0 \qquad (i = 1, \dots, n-a),
$$

$$
(7)_2 \qquad X^\alpha \partial_\alpha \theta^r = 0 \qquad (r = 1, \dots, a).
$$

Riguardando il sistema (7) come un sistema algebrico lineare di n equazioni nelle $n+1$ incognite X^α, X^0 si riconosce che tali incognite sono proporzionali ai minori della matrice (6)

$$
(8) \qquad X^\alpha(\omega t) = K(\omega t)\,\Delta^\alpha(\omega t), \qquad X^0(\omega t) = K(\omega t)\,\Delta^t(\omega t),
$$

dove $K(\omega t) \neq 0$ e Δ^α e Δ^t indicano i minori di Δ ottenuti omettendo rispettivamente la colonna delle derivate rispetto a ω^α e rispetto a t.

Dalle (8) segue che $X^0 \neq 0$ perchè $\Delta^t \neq 0$, stante la mutua indipendenza dalle ψ, θ come funzioni delle ω. Dalle $(7)_1$ segue allora che se le ψ dipendono effettivamente da t, le X^α non sono tutte nulle.

Poichè $X^0 \neq 0$ si può porre

$$
(9) \qquad \chi^\alpha = \frac{X^\alpha}{X^0} \qquad (\alpha = 1, \dots, n),
$$

e le (7) si possono scrivere

$$
(10)_1 \qquad \chi^\alpha \partial_\alpha \psi^k + \partial_t \psi^k = 0,
$$

$$(10)_2 \qquad \chi^\alpha \partial_\alpha \theta^r = 0 .$$

Le (10) sono del tipo (2)′ se esiste una funzione h tale che

$$(11) \qquad \chi^\alpha = \eta^{\beta\alpha} \partial_\beta h .$$

Si osservi che le eventuali soluzioni del sistema (11) non sono neutre, perchè le χ^α non sono tutte nulle.

Sfruttando l'esistenza delle funzioni neutre, si riconosce subito che, nel caso presente, le χ^α (o le X^α) sono combinazioni lineari delle $\eta^{\alpha\beta}$. Infatti le funzioni neutre sono le soluzioni del sistema (4) e poichè tale sistema è completo, ogni equazione lineare omogenea $A^{i\beta}\partial_\beta \theta_r = 0$, di cui le θ sono soluzioni, è combinazione lineare delle (4). Esistono quindi n funzioni $\bar{\lambda}_\beta(\omega t)$ tali che

$$(12) \qquad X^\alpha(\omega t) = \bar{\lambda}_\beta(\omega t)\eta^{\alpha\beta}(\omega) .$$

Naturalmente le n funzioni $\bar{\lambda}_\beta$ sono sovrabbondanti, perchè solo $n-a$ delle equazioni (4) sono fra loro indipendenti.

Le (12) si possono interpretare anche osservando che in virtù dell'indipendenza da t delle θ, le $(7)_2$ sono combinazioni lineari nulle delle X^α riguardate come funzioni di t. L'esistenza di a combinazioni lineari nulle implica che le n funzioni X^α, come funzioni di t, sono fra loro dipendenti e possono essere espresse come combinazioni lineari di $n-a$ funzioni di t indipendenti fra loro. Ciò è espresso dalle (8) quando si usino $n-a$ funzioni $\bar{\lambda}$ anzichè le n funzioni sovrabbondanti menzionate.

3. – Nel citato lavoro [**1**] si è dimostrato che la proprietà di un sistema di funzioni di costituire un gruppo generalizzato di ordine massimo, può essere espressa nella forma seguente

$$(13) \qquad \eta^{\alpha\sigma}\partial_\sigma \chi^\beta - \eta^{\beta\sigma}\partial_\sigma \chi^\alpha = \chi^\sigma \partial_\sigma \eta^{\alpha\beta} .$$

È facile riconoscere, ripetendo la dimostrazione data in [**1**], che le (13) sussistono anche nel caso in cui η sia singolare: anche in quest'ultimo caso le (13) caratterizzano i gruppi generalizzati. Risulta quindi evidente che la dimostrazione di ogni proprietà dei gruppi generalizzati coinvolge le (13): in particolare l'esistenza dell'hamiltoniano h è conseguenza di tali relazioni.

Si consideri infatti il sistema (11). Come è noto [**2**] un sistema di questo tipo è equivalente a un sistema omogeneo perchè se

$$(14) \qquad \varphi(\omega t h) = 0$$

è una sua soluzione in forma implicita, derivando rispetto a ω^s, si ha

$$\partial_s\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial h}\,\partial_s h = 0\,,$$

e moltiplicando per $\eta^{\alpha s}$

$$\eta^{\alpha s}\partial_s\varphi + \eta^{\alpha s}\partial_s h\,\frac{\partial\varphi}{\partial h} = 0\,.$$

Usando le (11) si ha infine

$$\eta^{\alpha s}\partial_s\varphi + \chi^\alpha\,\frac{\partial\varphi}{\partial h} = 0\,. \tag{15}$$

Ciò che interessa qui è che, viceversa, una soluzione $\varphi(\omega t h)$ delle (15), mediante la posizione

$$\varphi(\omega t h) = \mathrm{cost}\,, \tag{16}$$

fornisce una soluzione del sistema (11) nella ipotesi che $\partial\varphi/\partial h \neq 0$. Infatti dalla (16) si ha $\partial_s h = -\,\partial_s\varphi/(\partial\varphi/\partial h)$ e questa espressione, posta nelle (15), fornisce le (11).

Ciò premesso, si introducano gli operatori lineari

$$T^\alpha = \eta^{\alpha s}\partial_s + \chi^\alpha\,\frac{\partial}{\partial h}\,;$$

con semplici calcoli si ha

$$[T^\alpha, T^\beta] = T^\alpha T^\beta - T^\beta T^\alpha = \eta^{\alpha k}\partial_k\eta^{\beta s}\partial_s + \eta^{\alpha k}\partial_k\chi^\beta\,\frac{\partial}{\partial h} - \eta^{\beta s}\partial_s\eta^{\alpha k}\partial_k - \eta^{\beta s}\partial_s\chi^\beta\,\frac{\partial}{\partial h}$$

$$= (\eta^{\alpha k}\partial_k\eta^{\beta s} - \eta^{\beta k}\partial_k\eta^{\alpha s})\,\partial_s + (\eta^{\alpha k}\partial_k\chi^\beta - \eta^{\beta s}\partial_s\,\chi^\alpha)\,\frac{\partial}{\partial h}\,.$$

Utilizzando le (3) per la prima parentesi e le (13) per la seconda, si ha

$$[T^\alpha, T^\beta] = -\,\eta^{sk}\partial_k\eta^{\alpha\beta}\partial_s + \chi^k\partial_k\eta^{\alpha\beta}\,\frac{\partial}{\partial h} = \partial_k\eta^{\alpha\beta}\,(\eta^{ks}\partial_s + \chi^\beta\,\frac{\partial}{\partial h}) = \partial_k\eta^{\alpha\beta}\,T^k\,,$$

e quindi il sistema (15) è completo. Le equazioni indipendenti di tale sistema sono $n-a$ (in forza delle (12) e del fatto che il rango di $\eta^{\alpha\beta}$ è $n-a$); le variabili indipendenti sono $n+1$. Di conseguenza il sistema (15) possiede $n+1-(n-a)=a+1$ soluzioni indipendenti $\varphi_1 \dots \varphi_{a+1}$.

Si può osservare che di queste soluzioni una almeno deve contenere h: infatti se così non fosse si avrebbero $a+1$ funzioni $\varphi_1(\omega) \dots \varphi_{a+1}(\omega)$ soddisfacenti al sistema (15) che in questo caso si ridurrebbe a $\eta^{\alpha s}\partial_s\varphi = 0$ e quindi le $\varphi_1 \dots \varphi_{a+1}$ sarebbero $a+1$ funzioni neutre indipendenti: ciò è impossibile, perchè il rango di η è $n-a$.

Come si vede l'esistenza di h è basata in maniera essenziale sui due complessi di relazioni (3) e (13): il primo complesso rappresenta la proprietà di η che assicura la validità dell'identità di Jacobi per le PPG; il secondo complesso assicura che le funzioni assegnate costituiscono un gruppo generalizzato.

È evidente che la dimostrazione della esistenza di h data in questo numero è valida anche nel caso dei gruppi generalizzati a matrice non singolare: in questo caso il sistema (15) è costituito da n equazioni e si ottiene (a meno di una funzione additiva costante rispetto alle ω) una unica funzione hamiltoniana.

Si può concludere:

Teorema. *Condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema di n funzioni nelle $n+1$ variabili ωt costituiscano un gruppo generalizzato di ordine n (a matrice singolare o no) è che esista una funzione $h(\omega t)$ tale che le dette funzioni costituiscano un sistema completo di soluzioni della* (2).

È ovvio che se $\bar{\varphi}(\omega t h)$ è una soluzione del sistema (15), $\bar{\varphi}+\Phi$ (Φ funzione neutra) è una soluzione di tale sistema indipendente da $\bar{\varphi}$. Perciò un sistema completo di soluzioni di (15) è $\bar{\varphi}$, $\bar{\varphi}+\theta^1 \dots \bar{\varphi}+\theta^a$. Un risultato analogo si ha per h, come del resto si è accennato al n. **1**.

Appendice. Dalle relazioni

$$\chi^\alpha = \frac{X^\alpha}{X^0} = \eta^{\beta\alpha}\,\partial_\beta h\,,$$

in virtù della (12) si ha

$$\eta^{\beta\alpha}\partial_\beta h = \frac{\bar{\lambda}_\beta}{X^0}\,\eta^{\alpha\beta} = -\,\lambda_\beta\eta^{\beta\alpha}\,,$$

ossia

$$\eta^{\alpha\beta}(\partial_\beta h - \lambda_\beta) = 0\,. \tag{16}$$

Ma ([**5**] pag. 117) dalle relazioni $\eta^{\alpha\beta}A_\beta = 0$, si ha necessariamente $A_\beta = \partial\varphi/\partial\omega^\beta$, dove φ è una opportuna funzione neutra.

Dalle (16) si ha quindi $\partial_\beta h - \lambda_\beta = - \partial_\beta \varphi$, e quindi (4) $\partial_\beta(h + \varphi) = \lambda_\beta$. Introducendo nelle (13) le espressioni $\chi^\alpha = \lambda_\beta \eta^{\alpha\beta}$, e ricordando che $\chi^\alpha = X^\alpha / X^0$, si ha dopo qualche manipolazione

$$X^0 X^\alpha \partial_\alpha \eta^{\varrho\sigma} - \eta^{\varrho\alpha}(X^0 \partial_\alpha X^\sigma - X^\sigma \partial_\alpha X^0) + \eta^{\sigma\alpha}(X^0 \partial_\alpha X^\varrho - X^\varrho \partial_\alpha X^0) = 0 .$$

Sostituendo $X^\alpha = \bar{\lambda}_\beta \eta^{\alpha\beta}$ eseguendo le derivazioni e utilizzando le (3) si ha

$$X^0(\eta^{\varrho\alpha}\eta^{\sigma\beta} - \eta^{\sigma\alpha}\eta^{\varrho\beta})\, \partial_\alpha \bar{\lambda}_\beta - (\eta^{\varrho\alpha}\lambda_\beta \eta^{\sigma\beta} - \eta^{\sigma\alpha}\lambda_\beta\eta^{\varrho\beta})\, \partial_\alpha X^0 = 0 ,$$

e infine

$$(\eta^{\varrho\alpha}\eta^{\sigma\beta} - \eta^{\sigma\alpha}\eta^{\varrho\beta})(\bar{\lambda}_\beta \partial_\alpha X^0 - X^0 \partial_\alpha \bar{\lambda}_\beta) = 0 .$$

Scambiando gli indici α e β nel secondo termine della prima parentesi si ha

$$\eta^{\varrho\alpha}\eta^{\sigma\beta}(\bar{\lambda}_\beta \partial_\alpha X^0 - X^0 \partial_\alpha \bar{\lambda}_\beta - \bar{\lambda}_\alpha \partial_\beta X^0 + X^0 \partial_\beta \bar{\lambda}_\alpha) = 0 ,$$

e dividendo per $(X^0)^2$

$$\eta^{\varrho\alpha}\eta^{\sigma\beta}\left(\frac{X^0 \partial_\beta \bar{\lambda}_\alpha - \bar{\lambda}_\alpha \partial_\beta X^0}{(X^0)^2} - \frac{X^0 \partial_\alpha \bar{\lambda}_\beta - \bar{\lambda}_\beta \partial_\alpha X^0}{(X^0)^2}\right) = 0$$

e infine (poichè $\lambda_\alpha = \bar{\lambda}_\alpha / X^0$ ecc.)

$$\eta^{\varrho\alpha}\eta^{\sigma\beta}(\partial_\beta \lambda_\alpha - \partial_\alpha \lambda_\beta) = 0 .$$

Partendo da queste relazioni si può dimostrare che le parentesi quadre sono nulle e quindi che esiste una funzione h tale che $\lambda_\alpha = \partial_\alpha h$.

Nel caso in cui η sia non singolare ciò è banale poichè, moltiplicando le (17) per $\eta_{\gamma\varrho}\eta_{\varrho\sigma}$ si ottiene subito $\partial_\gamma \lambda_\varrho - \partial_\varrho \lambda_\gamma = 0$. Risulta ancora evidente il ruolo essenziale delle (3) e delle (13).

---

(4) Se si pone $\eta^{\alpha\beta}\partial_\beta \theta^k = C^{\alpha i}$, $\eta^{\alpha\beta}\partial_\beta \theta^r = D^{\alpha i}$ ($= 0$ per le (4)), le (7) diventano equazioni nella λ_β, una volta che X^0 sia stata scelta (per es. ponendo $K = 1$ nelle (8)).

Bibliografia

[1] G. ANDREASSI, *Gruppi di funzioni generalizzati*, Rend. Mat. (4) **11** (1978).

[2] COURANT - HILBERT, *Methods of mathematical physics*, vol. II, Interscience, New York 1962.

[3] A. Maniglia, *Gruppi di funzioni generalizzati singolari,* Riv. Mat. Univ. Parma (4) **5** (1979), 115-123.

[4] N. Mukunda and E. C. G. Sudarshan, *Structure of the Dirac bracket in classical Mechanics,* J. Mathematical Physics **9** (1968), 411-417.

[5] E. C. G. Sudarshan and N. Mukunda, *Classical Mechanics,* Wiley, New York 1974.

Summary

The existence is proved of a « Hamiltonian » function for a generalized function group of maximum rank.

* * *