Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 165-198

AIME HUAUX (*)

Sur le problème restreint des trois corps (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

1. - Introduction

Soit un système mécanique à n degrés de liberté, de Lagrangien

$$L(\dot{q}, q, t) = \tfrac{1}{2} g_{ij}(q, t)\dot{q}^i \dot{q}^j + \varphi_i(q, t)\dot{q}^i - \varphi(q, t) , \tag{1.1}$$

avec les hypothèses

$$g_{ij} = g_{ji} , \qquad (\dot{q} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}) , \tag{1.2}$$

$$\det (g_{ij}) \neq 0 , \tag{1.3}$$

toutes les fonctions intervenant dans la relation (1.1) étant au moins de classe $\mathscr{C}^{(2)}$ par rapport à l'ensemble de leurs arguments. Nous suivons les notations de J. Steigenberger ([**19**], pp. 991-992), cet auteur ayant donné l'exposé le plus général et le plus récent de la séparation des variables dans l'équation aux dérivées partielles de Hamilton-Jacobi. Les sommations portent sur les indices latins et jamais sur les indices grecs.

On appelle φ_i le potentiel covariant et φ le potentiel scalaire du système. Les moments du système sont définis par

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = g_{kr}\dot{q}^r + \varphi_k , \tag{1.4}$$

(*) Indirizzo: 22, Kasteellaan, B-1641 Alsemberg, Belgique.
(**) Ricevuto: 3-IX-1978.

d'où

$$\dot{q}^k = g^{kr}(p_r - \varphi_r) . \tag{1.5}$$

On définit l'Hamiltonien par $H = p_r \cdot \dot{q}^r - L$, d'où

$$H = H(p, q, t) = \tfrac{1}{2} g^{rs}(p_r - \varphi_r)(p_s - \varphi_s) + \varphi . \tag{1.6}$$

Un système d'Hamiltonien (1.6) est désigné par la notation $\{H\}$ ou par la notation $\{g^{ij}, \varphi_k, \varphi\}$.

L'équation aux dérivées partielles de Hamilton-Jacobi du système s'écrit

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) = 0 . \tag{1.7}$$

On dit qu'une fonction S est *intégrale complète* de (1.7) si (a) elle est solution de (1.7); (b) elle dépend de q, de t et de n constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_n$ telles que

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial a_j}\right) \neq 0 . \tag{1.8}$$

Conformément au théorème de Jacobi, la détermination d'une intégrale complète de (1.7) est équivalente à la résolution du système d'équations différentielles canoniques

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q^k}, \tag{1.9}$$

du mouvement du système matériel considéré.

On dit que l'équation aux dérivées partielles (1.7) et, par suite, le système $\{H\}$, admettent la séparation des variables s'il existe une intégrale complète de (1.7) ayant la forme

$$S(q, t, a) = S_0(t, a_1, a_2, \ldots, a_n) + \sum_{k=1}^{n} S_k(q^k, a_1, a_2, \ldots, a_n) . \tag{1.10}$$

Au second membre de (1.10), la première fonction S_0 dépend de t et d'une ou plusieurs constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, éventuellement de toutes ces constantes; les fonctions S_k dépendent chacune d'une seule variable q et aussi d'une ou plusieurs constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, éventuellement de toutes ces constantes.

On introduit les quantités

$$(1.11)\qquad \underset{\varrho\sigma}{C} = \underset{\varrho\sigma}{C}\{H\} = \frac{\partial^2 H}{\partial q^\varrho \partial q^\sigma}\frac{\partial H}{\partial p_\varrho}\frac{\partial H}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial^2 H}{\partial q^\varrho \partial p_\sigma}\frac{\partial H}{\partial p_\varrho}\frac{\partial H}{\partial q^\sigma} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_\varrho \partial q^\sigma}\frac{\partial H}{\partial q^\varrho}\frac{\partial H}{\partial p_\sigma} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_\varrho \partial p_\sigma}\frac{\partial H}{\partial q^\varrho}\frac{\partial H}{\partial q^\sigma},$$

$$\underset{\varrho 0}{C} = \underset{\varrho 0}{C}\{H\} = \frac{\partial^2 H}{\partial q^\varrho \partial t}\frac{\partial H}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_\varrho \partial t}\frac{\partial H}{\partial q^\varrho}.$$

Il résulte des travaux de Levi-Civita [**11**] et de Forbat [**3**] que les conditions de séparabilité ont la forme suivante.

Théorème 1.1. *L'équation aux dérivées partielles* (1.7) *admet la séparation des variables si et seulement si*

$$(1.12)\qquad (\mathrm{a})\ \underset{\varrho\sigma}{C} = 0\,,\quad (\varrho \neq \sigma),\ \forall(p, q, t)\,,\qquad (\mathrm{b})\ \underset{\varrho 0}{C} = 0\,,\quad \forall(p, q, t)\,.$$

Avec les conditions (1.12.a) et (1.12.b) on peut:

(a) soit vérifier si un système $\{H\}$ admet la séparation des variables, ce qui ne demande que des dérivations;

(b) soit construire un Hamiltonien H admettant la séparation des variables, mais par intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles.

Une publication antérieure (Huaux [**7**]$_3$) contient un rappel de résultats, avec des démonstrations, des conséquences des formules (1.12.a) ainsi que les démonstrations des formules (1.12.a) et (1.12.b) elles-mêmes.

Steigenberger ([**19**], p. 994) généralise d'abord un raisonnement de Levi-Civita ([**11**], p. 385) en établissant les propriétés suivantes.

Théorème 1.2. *La séparabilité de* $\{g^{ij}, \varphi_k, \varphi\}$ *implique la séparabilité de* $\{g^{ij}, 0, 0\}$.

Théorème 1.3. (Steigenberger [**19**], p. 995). *Si le potentiel scalaire* φ *dépend de toutes les variables de configuration* q^i, *alors, dans le cas de la séparation des variables, l'énergie cinétique a nécessairement la forme orthogonale, c'est-à-dire*

$$(1.13)\qquad g^{\varrho\sigma} = 0 \qquad (\varrho \neq \sigma)\,.$$

Pour cette raison, Steigenberger a limité son étude aux coordonnées orthogonales avec, comme application principale, le mouvement d'un point matériel en relativité restreinte. On constate, dans les applications, qu'il est souvent gênant de se borner à un potentiel scalaire ne dépendant pas de toutes les variables de configuration. Dès lors on posera

$$g^{\alpha\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha} g^{\alpha\alpha} = g^{\alpha} = g^{\alpha}(q) \,, \tag{1.14}$$

δ^{β}_{α} étant le symbole de Kronecker.

Des trois Théorèmes précédents, il résulte que si le système $\{g^i, \varphi_k, \varphi\}$ admet la séparation des variables, le système $\{g^i, 0, 0\}$ admet aussi la séparation des variables. Cette remarque va permettre de construire des coordonnées ponctuelles pour le système $\{g^i, \varphi_k, \varphi\}$: on cherche d'abord les systèmes de coordonnées ponctuelles à l'aide desquelles le problème $\{g^i, 0, 0\}$ admet la séparation des variables; s'il en existe, on écrit ensuite le système $\{g^i, \varphi_k, \varphi\}$ dans ces mêmes coordonnées; on vérifie enfin si les conditions (1.12.a) et (1.12.b) sont remplies.

Il est clair qu'en pratique la recherche de coordonnées vérifiant des conditions particulières est plus commode pour $\{g^i, 0, 0\}$ que pour $\{g^i, \varphi_k, \varphi\}$.

Marche du calcul. La démonstration du résultat annoncé dans le résumé va suivre les étapes que voici:

(1) Expression générale des systèmes de coordonnées ponctuelles et orthogonales du plan, à l'aide d'équations paramétriques (**2**, **3**, **4**, **5**) (Huaux [**7**]$_6$).

(2) Démonstration élémentaire d'un théorème de Weinacht [**23**] et Mayne [**15**]: à deux degrés de liberté, le cas de séparation des variables de Liouville est unique dès que l'énergie cinétique a la forme orthogonale (**6**, **7**, **8**) (Huaux [**7**]$_4$).

(3) Démonstration élémentaire d'un théorème de Liouville: dans le mouvement plan, les seules coordonnées ponctuelles conduisant à la séparation des variables pour les cas de Liouville $\{g^i, 0, 0\}$ et $\{g^i, 0, \varphi\}$ sont les coordonnées elliptiques du plan ou leurs dégénérescences: coordonnées paraboliques, coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes (**9**) (Liouville [**13**]$_1$, 362, 15 et 16, Huaux [**7**]$_5$). Il en résulte immédiatement que le problème des deux centres fixes n'admet la séparation des variables qu'en coordonnées elliptiques, (Huaux [**7**]$_2$).

(4) Démonstration de ce que le problème restreint des trois corps n'admet pas la séparation des variables en coordonnées elliptiques (**10**) (Huaux [**7**]$_1$). Or, si l'on appelle ici problème $\{g^i, \varphi_k, \varphi\}$ le problème restreint des trois corps,

le problème correspondant $\{g^i, 0, 0\}$ est le problème résumé au (3) ci-avant. De plus, il est évident que le problème restreint des trois corps n'admet la séparation des variables ni en coordonnées paraboliques ni en coordonnées polaires ni en coordonnées cartésiennes.

On peut donc conclure que le problème restreint des trois corps n'admet la séparation des variables dans aucun système de coordonnées ponctuelles.

2. - Sur les coordonnées orthogonales du plan (Huaux [7]$_6$)

Pendant plus d'un demi-siècle, G. Darboux a étudié les courbes orthogonales et les systèmes triples orthogonaux. Dans son dernier ouvrage ([**2**], p. 158, formule (66)), il énonce le résultat suivant.

Il suit de là que quelles que soient les fonctions $\Phi(x+iy)$ et $\Phi_1(x-iy)$, ses deux familles

$$\Phi(x+iy)+\Phi_1(x-iy)=\text{const}\,,\qquad \Phi(x+iy)-\Phi_1(x-iy)=\text{const} \tag{2.1}$$

lont composées de courbes se coupant mutuellement à angle droit. Les systèmes ainsi obtenus sont dits orthogonaux et isothermes. Ils peuvent être composés de courbes réelles; il suffit de prendre pour Φ et Φ_1 des fonctions imaginaires conjuguées.

D'après le contexte, les fonctions Φ et Φ_1 doivent être holomorphes, condition indispensable dès que l'on fait intervenir les pentes des courbes. Comme exemple, Darboux généralise les ovales de Cassini, puis passe aux propriétés métriques focales des coniques.

Les formules (2.1) ci-dessus suffisaient à Darboux pour une étude géométrique, par exemple obtenir des propriétés des courbes et des surfaces en faisant intervenir des éléments à l'infini et des éléments imaginaires; toutefois, ces mêmes formules (2.1) se prêtent mal à l'étude du mouvement plan d'un point matériel. Nous allons chercher des formules équivalentes à (2.1) mais sous forme d'équations paramétriques et non d'équations implicites.

Rappelons que si l'on a exprimé un problème de Mécanique Analytique en coordonnées cartésiennes, on change fréquemment de coordonnées, surtout pour des raisons de commodité. On prend de nouvelles variables ponctuelles (u, v) définies par

$$x=x(u,v)\,,\qquad y=y(u,v)\,, \tag{2.2}$$

et telles que le jacobien de (x, y) par rapport à (u, v) n'est pas identiquement nul

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0\,; \tag{2.3}$$

l'énergie cinétique s'exprime à l'aide du nouvel élément linéaire

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = {} & [(\frac{\partial x}{\partial u})^2 + (\frac{\partial y}{\partial u})^2]\, du^2 \\ & + [(\frac{\partial x}{\partial v})^2 + (\frac{\partial y}{\partial v})^2]\, \mathrm{d}v^2 + 2\,[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}]\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{2.4}$$

D'ordinaire, outre $J \neq 0$, on impose aux nouvelles coordonnées d'être orthogonales, c'est-à-dire telles que l'on ait

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} = 0. \tag{2.5}$$

C'est une conséquence du Théorème 1.3 rappelé ci-avant et que Steigenberger a établi dans toute sa généralité. Rappelons aussi que dans un système de coordonnées ponctuelles non-orthogonales, le potentiel des forces extérieures ne peut dépendre de toutes les variables de configuration, ce qui est très gênant en Mécanique Analytique.

La condition (2.5) donne lieu aux éventualités suivantes

$$(2.6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{\partial y}{\partial v}\,, \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} = -\,\dfrac{\partial y}{\partial u}\,, \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad (2.7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \mu(u, v)\,\dfrac{\partial y}{\partial v}\,, \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} = -\,\dfrac{1}{\mu(u, v)}\,\dfrac{\partial y}{\partial u}\,, \end{cases}$$

avec $\mu(u, v)$ non identiquement nulle, continue et dérivable jusqu'à un ordre à préciser dans chaque cas. Comme on envisage chaque fois le cas réel et le cas imaginaire, on a bien, en tout, 4 cas distincts. Enfin, si elle est remplie, la condition (2.6) entraîne

$$(\frac{\partial x}{\partial u})^2 + (\frac{\partial y}{\partial u})^2 = (\frac{\partial x}{\partial v})^2 + (\frac{\partial y}{\partial v})^2\,, \tag{2.8}$$

on dit alors que le système de coordonnées correspondant est *isométrique*; d'une façon abrégée, les 4 points correspondant aux valeurs des paramètres (u, v),

$(u + du, v)$, $(u, v + dv)$ et $(u + du, v + dv)$ forment, à des infiniment petits d'ordre supérieur près, les sommets d'un carré.

La résolution de (2.6) ou (2.7) introduira des fonctions arbitraires dont on ne pourra pas disposer comme l'on voudra et qui seront même précisées de façon très restrictive à la moindre condition nouvelle.

Remarque 2.1. En Cartographie et en Mécanique Appliquée, on utilise fréquemment les transformations conformes où, non seulement, (2.5) est satisfaite, mais aussi (2.6) et sa conséquence (2.8); toutefois ces disciplines recourent souvent à la méthode numérique et graphique appelée « méthode des petits carrés », pour tenir compte des conditions aux limites. Autrefois, Gauss ([**4**], pp. 202-211) a montré le premier, par un procédé théorique, qu'on peut établir une représentation conforme d'une demi-quadrique sur au moins certains de ses plans diamétraux. Cette proposition a été généralisée par Liouville ([**13**]$_4$, note V, 601-608) pour deux portions de surface analytique; l'énoncé qu'en donne Goursat ([**5**], tome 2, pp. 346-347, § 374) est une application de la théorie du facteur intégrant: « *... deux portions suffisamment petites de surfaces analytiques peuvent être représentées conformément l'une sur l'autre* ». Valiron ([**21**], tome 2, pp. 469-473) donne également cette proposition, comme propriété relative à la théorie des surfaces.

Enfin, la méthode pratique et utilitaire des « petits carrés » était couramment utilisée dans les bureaux d'études voilà plus d'un demi-siècle, notamment pour établir les plans des aubes des machines centrifuges; citons simplement une monographie de Maison-Neuve et Pfyffer [**14**].

3. - Résolution de (2.6)

3.1. - Solution réelle de (2.6)

Les relations (2.6) sont les conditions d'holomorphie de Cauchy-Riemann exprimant que la fonction complexe

$$z = x(u, v) + i \cdot y(u, v) \qquad (i^2 = -1)\,, \tag{3.1}$$

est de classe $\mathscr{C}^{(2)}$. Donc la théorie classique des fonctions d'une variable complexe est de rigueur. Comme on tire des équations (2.6)

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0 \tag{3.2}$$

et

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = 0\,, \tag{3.3}$$

$x(u, v)$ et $y(u, v)$ sont des fonctions harmoniques conjuguées. Si, par exemple, on se fixe $x(u, v)$ harmonique, la fonction $y(u, v)$ conjuguée est

$$y(u, v) = -\int_{u_0}^{u} \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathrm{d}u + \int_{v_0}^{v} \left[\frac{\partial x}{\partial u}\right]_{u=u0} \mathrm{d}v\,. \tag{3.4}$$

On peut résumer (3.2), (3.3) et (3.4) à l'aide d'une fonction holomorphe F et donner les équations paramétriques cherchées

$$x = \frac{1}{2}\,[F(u + iv) + F(u - iv)]\,, \quad y = \frac{1}{2i}\,[F(u + iv) - F(u - iv)]\,. \tag{3.5}$$

Compte tenu de (2.6), l'élément linéaire s'écrit

$$\mathrm{d}s^2 = [(\frac{\partial x}{\partial u})^2 + (\frac{\partial x}{\partial v})^2]\,(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)\,, \tag{3.6}$$

et, compte tenu de (3.5),

$$\mathrm{d}s^2 = F'(u + iv)\cdot F'(u - iv)\cdot(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)\,; \quad (F'(z) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z})\,. \tag{3.7}$$

Cet élément linéaire est isométrique. Ce premier cas rentre dans les transformations conformes.

3.2. - Solution imaginaire de (2.6)

Soient deux fonctions holomorphes F et G; soient a, b, c et d quatre paramètres réels ou imaginaires, à calculer. On pose

$$x = a\cdot F(u + iv) + b\cdot G(u - iv)\,, \quad y = c\cdot F(u + iv) + d\cdot G(u - iv)\,. \tag{3.8}$$

On porte (3.8) dans (2.5), d'où

$$(a^2 + c^2)F'^2(u + iv) - (b^2 + d^2)G'^2(u - iv) = 0 \tag{3.9}$$

et le jacobien de (x, y) par rapport à (u, v) ne peut être identiquement nul

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -i\cdot(ad - bc)\cdot F' G' \neq 0\,. \tag{3.10}$$

Les conditions (3.9) et (3.10) entraînent

$$c = \pm i \cdot a \quad \text{et} \quad d = \pm i \cdot b \qquad (\text{d'où} \quad ad - bc = \pm 2i \cdot ab)\,, \tag{3.11}$$

et les équations (3.8) deviennent

$$x = a \cdot F(u + iv) + b \cdot G(u - iv)\,, \qquad y = \mp \frac{1}{i}\,[a \cdot F(u+iv) - b \cdot G(u-iv)]. \tag{3.12}$$

En cas général, les équations (3.12) représentent des courbes imaginaires orthogonales, souvent étudiées par Darboux; elles ont un intérêt certain en Géométrie mais très faible en Mécanique Analytique. L'élément linéaire s'écrit

$$ds^2 = 4ab F'(u + iv)\,G'(u - iv)(du^2 + dv^2)\,, \tag{3.13}$$

il est isométrique mais imaginaire. Si dans (3.12) on fait $a = b = \frac{1}{2}$ et si au double signe on choisit le signe $+$, on a une généralisation immédiate de (3.5).

4. - Résolution de (2.7)

4.1. - Solution réelle de (2.7)

Tout d'abord, $x(u, v)$ et $y(u, v)$ ne sont pas arbitraires. Comme on doit avoir, par exemple,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 y}{\partial v\, \partial u}\,, \tag{4.1}$$

on tire de (2.7) et (4.1)

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial x}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\mu\,\frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0\,; \tag{4.2}$$

(4.2) généralise (3.2) et (3.3). Donc, si l'on se fixe l'une des fonctions $x(u, v)$ ou $\mu(u, v)$, l'autre doit être solution de l'équation aux dérivées partielles (4.2). Ensuite, ayant fixé ou calculé $x(u, v)$ et $\mu(u, v)$, on obtient $y(u, v)$ par l'équation

$$y(u, v) = -\int_{u_0}^{u} \mu(u, v)\,\frac{\partial x}{\partial v}\,du + \int_{v_0}^{v}\left[\frac{1}{\mu(u, v)}\,\frac{\partial x}{\partial u}\right]_{u=u_0} dv\,. \tag{4.3}$$

L'élément linéaire devient

$$\mathrm{d}s^2 = [(\frac{\partial x}{\partial u})^2 + \mu^2 (\frac{\partial x}{\partial v})^2] (\mathrm{d}u^2 + \frac{1}{\mu^2} \mathrm{d}v^2) \; ; \tag{4.4}$$

si μ dépend à la fois de u et de v, on ne peut rendre l'élément linéaire (4.4) isométrique par un changement de variable immédiat. Enfin, la résolution de (4.2) n'est pas commode.

4.2. - Solution imaginaire de (2.7)

Avec des coordonnées imaginaires, on aura

$$\begin{gathered} x(u, v) = x_1(u, v) + i \cdot x_2(u, v) \, , \quad y(u, v) = y_1(u, v) + i \cdot y_2(u, v) \, , \\ \mu(u, v) = \mu_1(u, v) + i \cdot \mu_2(u, v) \, . \end{gathered} \tag{4.5}$$

Ces 6 fonctions x_1, x_2, y_1, y_2, μ_1, μ_2 ne sont pas arbitraires: elles doivent être harmoniques, conjuguées 2 à 2 et enfin vérifier des conditions que nous allons préciser. Compte tenu de (4.5), les relations (2.7) deviennent

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} + i \frac{\partial x_2}{\partial u} &= (\mu_1 + i\mu_2) (\frac{\partial y_1}{\partial v} + i \frac{\partial y_2}{\partial v}) \, , \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} + i \frac{\partial x_2}{\partial v} &= - \frac{\mu_1 - i\mu_2}{\mu_1^2 + \mu_2^2} (\frac{\partial v_1}{\partial u} + i \frac{\partial y_2}{\partial u}) \, , \end{aligned} \tag{4.6}$$

ou, en séparant les parties réelles et les parties imaginaires,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x_1}{\partial u} = \mu_1 \frac{\partial y_1}{\partial v} - \mu_2 \frac{\partial y_2}{\partial v} \, , \quad \frac{\partial x_2}{\partial u} = \mu_2 \frac{\partial y_1}{\partial v} + \mu_1 \frac{\partial y_2}{\partial v} \, , \\ &\frac{\partial x_1}{\partial v} = - \frac{1}{\mu_1^2 + \mu_2^2} [\mu_1 \frac{\partial y_1}{\partial u} + \mu_2 \frac{\partial y_2}{\partial u}] \, , \\ &\frac{\partial x_2}{\partial v} = \frac{1}{\mu_1^2 + \mu_2^2} [\mu_2 \frac{\partial y_1}{\partial u} - \mu_1 \frac{\partial y_2}{\partial u}] \, . \end{aligned} \tag{4.7}$$

Les dérivées secondes rectangulaires de x_1 et de x_2 doivent être égales, comme d'ailleurs celles de y_1 et y_2

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 x_1}{\partial v\,\partial u}\,, \quad \frac{\partial^2 x_2}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 x_2}{\partial v\,\partial u}\,, \tag{4.8}$$

et

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 y_1}{\partial v\,\partial u}\,, \quad \frac{\partial^2 y_2}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 y_2}{\partial v\,\partial u}\,. \tag{4.9}$$

En portant (4.7) dans (4.8), on élimine x_1 et x_2. Si l'on se fixe y_1 et y_2 harmoniques et conjuguées, on obtient avec (4.7) et (4.8) un système de 2 équations aux dérivées partielles à 2 inconnues, μ_1 et μ_2. Si ce système admet une solution (μ_1, μ_2) formée de 2 fonctions harmoniques et conjuguées, x_1 et x_2 sont données par

$$\begin{aligned} x_1(u, v) &= \int_{u_0}^{u} \frac{\partial x_1}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \int_{v_0}^{v} \Big[\frac{\partial x_1}{\partial v}\Big]_{u=u_0} \mathrm{d}v \\ &= \int_{u_0}^{u} \Big(\mu_1 \frac{\partial y_1}{\partial v} - \mu_2 \frac{\partial y_2}{\partial v}\Big)\,\mathrm{d}u - \int_{v_0}^{v} \Big[\frac{1}{\mu_1^2+\mu_2^2}\Big(\mu_1 \frac{\partial y_1}{\partial u} + \mu_2 \frac{\partial y_2}{\partial u}\Big)\Big]_{u=u_0} \mathrm{d}v\,. \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} x_2(u, v) &= \int_{u_0}^{u} \frac{\partial x_2}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \int_{v_0}^{v} \Big[\frac{\partial x_2}{\partial v}\Big]_{u=u_0} \mathrm{d}v \\ &= \int_{u_0}^{u} \Big(\mu_2 \frac{\partial y_1}{\partial v} + \mu_1 \frac{\partial y_2}{\partial v}\Big)\,\mathrm{d}u + \int_{v_0}^{v} \Big[\frac{1}{\mu_1^2+\mu_2^2}\Big(\mu_2 \frac{\partial y_1}{\partial u} - \mu_1 \frac{\partial y_2}{\partial u}\Big)\Big]_{u=u_0} \mathrm{d}v\,. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Les calculs deviennent rapidement inextricables.

5. - Exemples

Exemple 5.1. Cherchons un système de coordonnées isométriques à variables séparées, donc qui vérifie (2.6) et s'écrit

$$x = c\cdot f_1(u)\cdot g_1(v)\,, \qquad y = c\cdot f_2(u)\cdot g_2(v)\,, \tag{5.1}$$

où c est une constante. Tous calculs faits on trouve

$$(5.2)\qquad x = c\cdot f_1(u)\cdot g_1(v)\,,\qquad y = c\cdot\sqrt{\left(C_1+\frac{f_1^2(u)}{k}\right)\cdot\left(C_2-k\cdot g_1^2(v)\right)}\,,$$

où k, C_1 et C_2 sont des constantes réelles. Aux notations près, on retrouve les coniques homofocales; la notation suivante est plus commode que (5.2)

$$(5.3)\qquad x = c\cdot\operatorname{ch} u\cdot\cos v\,,\qquad y = c\cdot\operatorname{sh} u\cdot\sin v\,.$$

Les relations (5.3) prennent la forme (3.5) si l'on pose

$$(5.4)\qquad F(u+iv) = c\cdot\operatorname{ch}(u+iv)\,,$$

d'où

$$(5.5)\qquad x+iy = c\cdot\operatorname{ch}(u+iv)$$

et

$$(5.6)\qquad x=\frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}(u+iv)+\operatorname{ch}(u-iv)\right],\qquad y=\frac{1}{2i}\left[\operatorname{ch}(u+iv)-\operatorname{ch}(u-iv)\right].$$

Exemple 5.2. Cherchons un système de coordonnées isométriques de la forme

$$(5.7)\qquad x = c\cdot\frac{f(u)}{F(u)+G(v)}\,,\quad y = c\cdot\frac{g(v)}{F(u)+G(v)}\,.$$

(c est une constante réelle). Les relations (2.6) et (5.7) donnent

$$(5.8)\qquad f(u)\cdot G'(v)+g(v)\cdot F'(u)=0\,,$$

$$(5.9)\qquad f'(u)\cdot F(u)+f'(v)\cdot G(v)-f(u)\cdot F'(u)= \\ = g'(v)\cdot F(u)+g'(v)\cdot G(v)-g(v)\cdot G'(v)\,.$$

(5.8) entraîne (λ const.)

$$(5.10)\qquad \frac{f(u)}{F'(u)}=-\frac{g(v)}{G'(v)}=\lambda\leftrightarrow f(u)=\lambda F'(u),\ \ g(v)=-\lambda G'(v)\,.$$

(5.9) et (5.10) donnent

$$\lambda F'''(u)\, F(u) + \lambda F''(u)\cdot G(v) - \lambda F'^2(u) - \lambda G''(v)\cdot F(u) - \lambda G''(u)\cdot G(v) + \lambda G'^2(v) = 0 \tag{5.11}$$

ou

$$\big(F(u) + G(v)\big)\cdot\big(F''(u) + G''(v)\big) = F'^2(u) + G'^2(v)\,. \tag{5.12}$$

Pour résoudre (5.12), en se limitant aux solutions de classe $\mathscr{C}^{(3)}$, on dérive 2 fois les 2 membres de (5.12), une fois par rapport à u et une fois par rapport à v. On trouve alors

$$\frac{F'''(u)}{F'(u)} = -\frac{G'''(v)}{G'(v)} = \nu = \text{const}\,. \tag{5.13}$$

Les équations différentielles (5.13) donnent, en prenant $\lambda = \nu = 1$ et en annulant les constantes d'intégration

$$F(u) = \operatorname{ch} u\,,\quad G(v) = \cos v\,;\qquad f(u) = \operatorname{sh} u\,,\quad g(v) = \sin v\,. \tag{5.14}$$

On trouve finalement

$$x = c\cdot\frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u + \cos v}\,,\quad y = c\cdot\frac{\sin v}{\operatorname{ch} u + \cos v}\,. \tag{5.15}$$

Ce sont les coordonnées axiales, composées de cercles orthogonaux; elles ont été découvertes par Lord Kelvin [**8**] dans l'étude de la propagation de la chaleur.

Elles peuvent s'écrire, en posant

$$F(u + iv) = c\cdot\operatorname{th}\frac{u + iv}{2}\,, \tag{5.16}$$

$$x + iy = c\cdot\operatorname{th}\frac{u + iv}{2}\,, \tag{5.17}$$

$$x = \frac{c}{2}\,[\operatorname{th}\frac{u + iv}{2} + \operatorname{th}\frac{u - iv}{2}],\quad y = \frac{c}{2i}\,[\operatorname{th}\frac{u + iv}{2} - \operatorname{th}\frac{u - iv}{2}]\,. \tag{5.18}$$

On trouve (5.16) en partant de (5.15) d'où l'on tire

$$(5.19)\qquad x + iy = c \cdot \frac{\operatorname{sh} u + i \sin v}{\operatorname{ch} u + \cos v} = c \cdot \frac{\operatorname{sh} u + \operatorname{sh} iv}{\operatorname{ch} u + \operatorname{ch} iv}$$

$$= c \cdot \frac{2 \operatorname{sh} \dfrac{u+iv}{2} \operatorname{ch} \dfrac{u-iv}{2}}{2 \operatorname{ch} \dfrac{u+iv}{2} \operatorname{ch} \dfrac{u-iv}{2}} = c \cdot \operatorname{th} \frac{u+iv}{2},$$

Exemple 5.3. Les coordonnées paraboliques, qui sont définies par

$$(5.20)\qquad x = u^2 - v^2, \qquad y = 2uv,$$

d'où

$$(5.21)\qquad x + iy = (u + iv)^2 \quad \text{et} \quad F(u + iv) = (u + iv)^2.$$

Il vient

$$(5.22)\qquad x = \frac{1}{2}[(u + iv)^2 + (u - iv)^2], \qquad y = \frac{1}{2i}[(u + iv)^2 - (u - iv)^2].$$

Exemple 5.4. Les coordonnées polaires,

$$(5.23)\qquad x = r \cdot \cos\theta, \qquad y = r \cdot \sin\theta, \qquad \text{d'où} \qquad x + iy = r \cdot e^{i\theta}.$$

Sous cette forme, l'élément linéaire n'est pas isométrique

$$(5.24)\qquad \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 = r^2(\frac{\mathrm{d}r^2}{r^2} + \mathrm{d}\theta^2);$$

on le rend isométrique en posant

$$(5.25)\qquad r = e^u, \qquad \theta = v,$$

d'où (5.23) devient

$$(5.26)\qquad x = e^u \cdot \cos v, \qquad y = e^u \cdot \sin v, \qquad \text{et} \quad x + iy = e^{u+iv},$$

d'où

$$F(u + iv) = e^{u+iv}, \tag{5.27}$$

et

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left(\exp(u + iv) + \exp(u - iv)\right), \\ y &= \frac{1}{2i}\left(\exp(u + iv) - \exp(u - iv)\right). \end{aligned} \tag{5.28}$$

Avec (5.26), l'élément linéaire devient

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = e^{2u}\cdot(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2), \tag{5.29}$$

il est bien devenu isométrique.

Un cas concret où l'on rend l'élément linéaire isométrique en coordonnées polaires est l'emploi de la projection de Mercator (par exemple, cfr. Goursat [5] tome 1, p. 644).

6. - Application aux systèmes mécaniques à deux degrés de liberté (Huaux [7])

Soit un système mécanique à deux degrés de liberté, supposé conservatif, défini par une énergie cinétique T et un potentiel V; soient u et v les variables de configuration.

Soient p_1 et p_2 les momentoïdes conjugués; l'Hamiltonien d'un tel système mécanique peut s'écrire, en cas général,

$$H = T + V = \frac{1}{2}\left[\frac{p_1^2}{\varphi_1^2} + \frac{p_2^2}{\varphi_2^2} + 2\,\frac{p_1 p_2}{\varphi_{12}}\right] + V, \tag{6.1}$$

où φ_1, φ_2, φ_{12} et V sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^{(2)}$ par rapport à l'ensemble de leurs arguments.

La condition de séparation des variables de Levi-Civita, rappelée ci-avant aux formules (1.11) et (1.12.a), s'écrit

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial^2 H}{\partial u\,\partial p_2}\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial v} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_1\partial v}\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_1\partial p_2}\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial v} = 0. \tag{6.2}$$

La condition (6.2) prend ici la forme d'un polynôme en p_1 et p_2 qui doit être identiquement nul. On obtiendra les conditions de séparation des variables que l'on cherche en annulant d'abord le terme indépendant de p_1 et p_2, puis les coefficients respectifs de p_1 et p_2, et ainsi de suite. Dans (6.2), le terme indépendant de p_1 et p_2 s'écrit, compte tenu de (6.1),

$$\frac{1}{\varphi_{12}} \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial v} = 0 , \tag{6.3}$$

ce qui exige, si V dépend à la fois de u et v,

$$\frac{1}{\varphi_{12}} = 0 ; \tag{6.4}$$

donc l'emploi des coordonnées orthogonales dès que V dépend des deux variables de configuration u et v. On a en (6.4) une application du Théorème 1.2 et de la relation (1.13). Compte tenu de (6.4), la relation (6.1) s'écrit

$$H = T + V = \frac{1}{2} [\frac{p_1^2}{\varphi_1} + \frac{p_2^2}{\varphi_2}] + V . \tag{6.5}$$

On vérifie sans peine que (6.2) donne lieu à trois autres conditions, données respectivement par un terme en $p_1 \cdot p_2$, le seul à faire intervenir V, un terme en $p_1^3 \cdot p_2$ et un terme en $p_1 \cdot p_2^3$. Après simplification, ces termes sont, dans l'ordre suivant qui est le plus commode pour la résolution,

(a) coefficient de $p_1^3 \cdot p_2$

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u \partial v} - \frac{1}{\varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{1}{\varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} = 0 ; \tag{6.6}$$

(b) coefficient de $p_1 \cdot p_2^3$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial u \partial v} - \frac{1}{\varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} + \frac{1}{\varphi_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} = 0 ; \tag{6.7}$$

(c) coefficient de $p_1 \cdot p_2$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u \partial v} + \frac{1}{\varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{1}{\varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial v} = 0 . \tag{6.8}$$

Les relations (6.6), (6.7) et (6.8) forment un système de trois équations aux dérivées partielles non linéaires du deuxième ordre en les fonctions inconnues φ_1, φ_2 et V; comme (6.6) et (6.7) ne contiennet pas V, on calculera d'abord φ_1 et φ_2 à l'aide de (6.6) et (6.7); on les porte alors dans (6.8), d'où $V(u, v)$ finalement.

7. - **Résolution du système** (6.6), (6.7), (6.8)

Multiplions les deux membres de (6.6) par $1/\varphi_1$ et les deux membres de (6.7) par $1/\varphi_2$; retranchons les résultats obtenus. Il vient

$$(7.1) \qquad \frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{\varphi_1^2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\frac{\partial\varphi_1}{\partial v} - \frac{1}{\varphi_2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial u\,\partial v} + \frac{1}{\varphi_2^2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\frac{\partial\varphi_2}{\partial v} = 0\;;$$

(7.1) peut s'écrire

$$(7.2) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\right] - \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\varphi_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\right] = 0\,,$$

d'où en intégrant par rapport à u

$$(7.3) \qquad \frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial v} - \frac{1}{\varphi_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\ln P(v)$$

où

$$(7.4) \qquad P = P(v) \in \mathscr{C}^{(2)}\,,$$

En intégrant les 2 membres de (7.3) par rapport à v, il vient

$$(7.5) \qquad \ln\varphi_1 - \ln\varphi_2 = \ln P(v) - \ln Q(u)\,,$$

où

$$(7.6) \qquad Q = Q(u) \in \mathscr{C}^{(2)},$$

d'où

$$(7.7) \qquad \frac{\varphi_1(u, v)}{\varphi_2(u, v)} = \frac{P(v)}{Q(u)}\,.$$

Eliminons $\varphi_2(u, v)$ entre (7.7) et (6.6). On a d'abord

$$\varphi_2(u, v) = \varphi_1(u, v)\,\frac{Q(u)}{P(v)}\,, \tag{7.8}$$

puis (7.8) donne

$$\ln \varphi_2 = \ln \varphi_1 + \ln Q(u) - \ln P(v)\,. \tag{7.9}$$

Dérivons les deux membres de (7.9) par rapport à u

$$\frac{1}{\varphi_2}\,\frac{\partial \varphi_2}{\partial u} = \frac{1}{\varphi_1}\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{1}{Q(u)}\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\,. \tag{7.10}$$

Dès lors, (6.6) et (7.10) donnent

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u\,\partial v} + \frac{1}{Q}\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} = 0\,, \tag{7.11}$$

où

$$\frac{1}{\partial \varphi_1/\partial v}\cdot\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u\,\partial v} = -\frac{1}{Q(u)}\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\,, \tag{7.12}$$

d'où en intégrant les deux membres de (7.12) par rapport à u,

$$\ln \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} = -\ln Q(u) + \ln \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}v} \tag{7.13}$$

avec

$$R = R(v) \in \mathscr{C}^{(2)}\,. \tag{7.14}$$

La relation (7.13) donne ensuite

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} = \frac{1}{Q(u)}\,\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}v}\,. \tag{7.15}$$

Intégrons les deux membres de (7.15) par rapport à v

$$\varphi_1(u, v) = \frac{1}{Q(u)}\,R(v) + \frac{S(u)}{Q(u)}\,, \tag{7.16}$$

avec

$$S = S(u) \in \mathscr{C}^{(2)} . \tag{7.17}$$

Finalement on trouve

$$\varphi_1(u, v) = \frac{R(v) + S(u)}{Q(u)} . \tag{7.18}$$

Dès lors, (7.18) et (7.7) donnent

$$\varphi_2(u, v) = \frac{R(v) + S(u)}{P(v)} . \tag{7.19}$$

C'est bien la forme de Liouville.

Il reste à calculer le potentiel $V(u, v)$. Considérons (6.8) qui s'écrira, compte tenu de (7.18) et (7.19),

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u \partial v} + \frac{1}{R(v) + S(u)} \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}v} \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{1}{R(v) + S(u)} \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}u} \frac{\partial V}{\partial v} = 0 . \tag{7.20}$$

La forme même de (7.20) suggère de poser, ce qui ne nuit pas à la généralité,

$$V(u, v) = \frac{\psi(u, v)}{R(v) + S(u)} , \tag{7.21}$$

avec

$$\psi(u, v) \in \mathscr{C}^{(2)} . \tag{7.22}$$

On vérifie sans peine que (7.20) et (7.21) entraînent

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = 0 , \tag{7.23}$$

d'où

$$\psi(u, v) = \psi_1(u) + \psi_2(v) , \tag{7.24}$$

où $\psi_1(u) \in \mathscr{C}^{(2)}$ et $\psi_2(v) \in \mathscr{C}^{(2)}$.

On a alors

$$V(u, v) = \frac{\psi_1(u) + \psi_2(v)}{R(v) + S(u)}. \tag{7.25}$$

Finalement, compte tenu de (7.18), (7.19) et (7.25), (6.1) s'écrit

$$H = \frac{1}{2\big(R(v) + S(u)\big)} [Q(u)\cdot p_1^2 + P(v)\cdot p_2^2] + \frac{\psi_1(u) + \psi_2(v)}{R(v) + S(u)}, \tag{7.26}$$

c'est bien la forme de Liouville.

Conclusion. *Pour un système mécanique (T, V) conservatif, à deux degrés de liberté, où le potentiel dépend des deux variables de configuration et où toutes les fonctions envisagées sont au moins de classe $\mathscr{C}^{(2)}$ par rapport à l'ensemble de leurs arguments, le seul cas de séparation des variables est celui de Liouville.*

Cas particulier. Si en plus de (6.4) on s'impose

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi\,, \tag{7.27}$$

donc si l'on se limite au cas isométrique, les conditions (6.6) et (6.7) se réduisent à la condition unique

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} = 0 \tag{7.28}$$

d'où

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi = R(v) + S(u)\,. \tag{7.29}$$

Enfin, (7.29) et (6.8) donnent, en essayant à nouveau

$$V(u, v) = \frac{\psi(u, v)}{R(v) + S(u)}, \tag{7.30}$$

la condition

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v} = 0\,, \tag{7.31}$$

d'où à nouveau

$$V(u, v) = \frac{\psi_1(u) + \psi_2(v)}{R(v) + S(u)}, \tag{7.32}$$

et (7.26) devient, compte tenu de (7.29) et (7.32),

$$H = \frac{1}{2} \frac{p_1^2 + p_2^2}{R(v) + S(u)} + \frac{\psi_1(u) + \psi_2(v)}{R(v) + S(u)}. \tag{7.33}$$

Remarque 7.1. Liouville ([**13**]$_1$, p. 346, formule (6), [**2**], [**3**]) a établi son cas de séparation des variables sans s'occuper de son unicité; il avait surtout en vue l'étude des géodésiques de l'ellipsoïde. Il a montré successivement que les coordonnées elliptiques ([**13**]$_1$, p. 352) conduisaient à son cas de séparation des variables, puis, plus loin, ([**13**], pp. 360-368), que les seules coordonnées ponctuelles conduisant à son cas de séparation des variables dans le mouvement plan sont les coordonnées elliptiques. Enfin, ([**13**]$_1$, § 10, p. 357), Liouville montre que si les 2 foyers réels des coniques homofocales se rapprochent et tendent vers l'origine, on retrouve simplement les coordonnées polaires. Au même (§ 10, p. 358 [**13**]$_1$), Liouville montre ensuite que si la distance des foyers augmente indéfiniment, à la limite on retrouve les coordonnées cartésiennes. Pour terminer ce (§ 10, p. 358 [**13**]$_1$) Liouville montre qu'en laissant un foyer fixe et en faisant tendre l'autre vers une position à l'infini, suivant une direction qualconque, on retrouve les paraboles orthogonales. Dans ce travail, ces coordonnées sont signalées aux exemples 5.1, 5.4 et 5.3. Liouville ne considère que les foyers réels; des travaux récents ont recouru aux foyers imaginaires pour des applications particulières (cfr. par exemple Huaux [**3**], § 7, les références relatives à Vinti et Marchal).

Remarque 7.2. D'autres auteurs ont traité le problème exposé ci-avant dans les **6** et **7**, soit à l'aide du calcul tensoriel (Levi-Civita [**11**], pp. 406-408; Weinacht [**23**], pp. 279-284), soit à l'aide de la théorie de l'équation aux dérivees partielles de Monge-Ampère (Mayne [**15**], pp. 36-52). Ces auteurs avaient en vue une classification aussi complète que possible des cas de séparation des variables, à 2 et 3 degrés de liberté, ce qui fait quelque peu perdre de vue l'unicité du cas de Liouville.

Remarque 7.3. A notre connaissance, l'unicité des coordonnées elliptiques établie par Liouville n'a guère été signalée dans les traités; sur ce point de vue, nous n'avons lu que deux brèves références de Darboux ([**2**], tome 2, p. 422 et tome 3, p. 52) et d'Appell ([**1**], tome 1, p. 602, exercice 21).

Au **9** nous établirons l'unicité des coordonnées elliptiques dans le cas de séparation des variables, mais par des calculs plus courts que ceux de Liouville.

Remarque 7.4. En s'appuyant sur l'unicité du cas de séparation des variables de Liouville dans le mouvement plan et conservatif, on peut démontrer que le problème des deux centres fixes n'admet la séparation des variables qu'en coordonnées elliptiques, dans le mouvement plan, et obtenir une généralisation à 3 dimensions, à savoir qu'alors ce même problème des deux centres fixes n'admet la séparation des variables qu'en coordonnées ellipsoïdales [**7**]$_2$.

8. - Sur la forme isométrique du cas de séparation des variables de Liouville

Le cas de Liouville ne se présente pas nécessairement sous forme isométrique, c'est-à-dire sous l'une des formes

$$L = \frac{1}{2}[A(u) + B(v)]\left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] - \frac{C(u) + D(v)}{A(u) + B(v)}, \tag{8.2}$$

ou bien

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{p_u^2 + p_v^2}{A(u) + B(v)} + \frac{C(u) + D(v)}{A(u) + B(v)}, \tag{8.2}$$

u et v désignant les variables de configuration, $p_u = p_1$ et $p_v = p_2$ désignant les momentoïdes conjugués. On vérifie sans peine qu'un Lagrangien de la forme

$$L = \frac{1}{2}[A_1(q^1) + A_2(q^2)]\,[F_1(q^1)\cdot(\dot{q}^1)^2 + F_2(q^2)\cdot(\dot{q}^2)^2] - \frac{C_1(q^1) + C_2(q^2)}{A_1(q^1) + A_2(q^2)} \tag{8.3}$$

conduit aussi à la séparation des variables dans l'équation aux dérivées partielles de Hamilton-Jacobi correspondante. Il suffit, conformément à (1.4), de calculer

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \qquad (\text{ici } i = 1, 2), \tag{8.4}$$

d'où, avec (8.3) et (8.4)

$$p_1 = \big(A_1(q^1) + A_2(q^2)\big)\cdot F_1(q^1)\cdot\dot{q}^1, \qquad p_2 = \big(A_1(q^1) + A_2(q^2)\big)\cdot F_2(q^2)\cdot\dot{q}^2. \tag{8.5}$$

(8.3) et (8.5) donnent immédiatement

$$(8.6)\qquad H = \frac{1}{2}\,\frac{1}{A_1(q^1)+A_2(q^2)}\,[\frac{p_1^2}{F_1^2(q^1)}+\frac{p_2^2}{F_2^2(q^2)}]+\frac{C_1(q^1)+C_2(q^2)}{A_1(q^1)+A_2(q^2)}.$$

En pratique on peut conserver (8.6) sans inconvénient, par exemple en utilisant les coordonnées polaires du plan. *Par contre, pour mener à bien certains raisonnements théoriques et pour faire de la Cartographie, il vaut mieux rendre l'élément linéaire, donc la fonction T, isométrique.* Dans ce but, on pose

$$(8.7)\qquad Q^1 = \int \sqrt{F_1(q^1)}\,\mathrm{d}q^1\,, \qquad Q^2 = \int \sqrt{F_2(q^2)}\,\mathrm{d}q^2\,;$$

de (8.7) on tire q^1 en fonction de Q^1 et q^2 en fonction de Q^2; (8.3) devient

$$(8.8)\qquad L = \frac{1}{2}[B_1(Q^1)+B_2(Q^2)][(\dot{Q}^1)^2+(\dot{Q}^2)^2]-\frac{D_1(Q^1)+D_2(Q^2)}{B_1(Q^1)+B_2(Q^2)},$$

avec

$$(8.9)\qquad B_1(Q^1)=A_1(q^1)\,,\quad B_2(Q^2)=A_2(q^2)\,,\quad D_1(Q^1)=C_1(q^1)\,,\quad D_2(Q^2)=C_2(q^2)\,.$$

La relation (8.8) se transforme aisément, si l'on pose

$$(8.10)\qquad P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^i},$$

en

$$(8.11)\qquad H = \frac{1}{2}\,\frac{P_1^2+P_2^2}{B_1(Q^1)+B_2(Q^2)}+\frac{D_1(Q^1)+D_2(Q^2)}{B_1(Q^1)+B_2(Q^2)}.$$

Au **9** suivant, nous supposerons que la réduction à la forme isométrique a été effectuée et nous prendrons l'Hamiltonien sous l'une des formes (8.1) ou (8.2) uniquement. Nous nous limiterons même à la forme de l'énergie cinétique.

9. - Théorème de Liouville ([**13**], p. 362; [**15**] et [**16**]; Huaux [**7**]$_5$)

Dans le cas du point matériel lié à un plan, les coordonnées ponctuelles les plus générales conduisant à une énergie cinétique de la forme

$$(9.1)\qquad T = \frac{1}{2}[A(u)+B(v)]\,[(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t})^2+(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t})^2]\,.$$

où

$$T = \frac{1}{2}\,\frac{p_u^2 + p_v^2}{A(u) + B(v)} \tag{9.2}$$

sont les coordonnées elliptiques.

Habituellement, la mise en équation du mouvement plan d'un point matériel s'effectue en coordonnées cartésiennes rectangulaires, d'où l'énergie cinétique spécifique (si la masse du point matériel est prise comme unité) s'écrit

$$T = \frac{1}{2}\,[(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2]\,. \tag{9.3}$$

Pour des raisons de commodité, on passe à de nouvelles variables u et v mais en veillant à ce que (9.3) prenne la forme (9.1). Or,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{dv}{dt}\,, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial u}\,\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\frac{dv}{dt}\,, \tag{9.4}$$

d'où

$$(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 = [(\frac{\partial x}{\partial u})^2 + (\frac{\partial y}{\partial u})^2]\,(\frac{du}{dt})^2 \tag{9.5}$$

$$+ [(\frac{\partial x}{\partial v})^2 + (\frac{\partial y}{\partial v})^2]\,(\frac{dv}{dt})^2 + 2\,(\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\frac{\partial y}{\partial v})\,\frac{du}{dt}\,\frac{dv}{dt}\,.$$

Conformément au Théorème 1.3, on s'impose une énergie cinétique orthogonale, d'où une première condition

$$\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\frac{\partial y}{\partial v} = 0\,, \tag{9.6}$$

ensuite, pour rendre l'énergie cinétique isométrique, conformément aux considérations du **8**, on doit avoir

$$(\frac{\partial x}{\partial u})^2 + (\frac{\partial y}{\partial u})^2 = (\frac{\partial x}{\partial v})^2 + (\frac{\partial y}{\partial v})^2\,. \tag{9.7}$$

(9.6) et (9.7) forment un système de deux équations aux dérivées partielles à deux fonctions inconnues $x(u, v)$ et $y(u, v)$, dont la résolution fournira le résultat de Liouville. On tire d'abord de (9.6), si λ est une fonction inconnue de u et v,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \lambda \cdot \frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = -\lambda \frac{\partial x}{\partial v}. \tag{9.8}$$

(9.7) et (9.8) entraînent, quels que soient u et v,

$$(\frac{\partial x}{\partial u})^2 + \lambda^2 (\frac{\partial x^2}{\partial v})^2 = (\frac{\partial x}{\partial v}) + \frac{1}{\lambda^2} (\frac{\partial x}{\partial u})^2, \tag{9.9}$$

ou

$$[(\frac{\partial x}{\partial u})^2 + \lambda^2 (\frac{\partial x}{\partial v})^2](1 - \frac{1}{\lambda^2}) = 0, \tag{9.10}$$

d'où λ est une constante

$$\lambda = \pm 1. \tag{9.11}$$

Dans (9.11), le signe de λ est indifférent. Prenons le signe $+$, il vient

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}. \tag{9.12}$$

On retrouve évidemment les conditions (2.6) ci-avant et d'où l'on avait tiré certaines conclusions. Rappelons aussi que pour appliquer la méthode de séparation des variables de Levi-Civita, il est nécessaire que dans (9.1) et (9.2) les fonctions $A(u)$ et $B(v)$ soient de classe $\mathscr{C}^{(2)}$. Les relations (9.1), (9.5), (9.7) et (9.12) entraînent

$$(\frac{\partial x}{\partial u})^2 + (\frac{\partial y}{\partial u})^2 = A(u) + B(v), \tag{9.13}$$

quantité aussi égale à $(\partial x/\partial v)^2 + (\partial y/\partial v)^2$. Dérivons les 2 membres de (9.13) une fois par rapport à u et une fois par rapport à v; tenons compte de (9.12); il vient

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \cdot (\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}) + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^3 x}{\partial v^2 \partial u} = 0. \tag{9.14}$$

Or, compte tenu de (9.12), il vient

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0\,, \tag{9.15}$$

d'où (9.14) peut s'écrire

$$\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial^3 x}{\partial u^3} = 0\,, \tag{9.16}$$

ou bien

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^3 x}{\partial u^3} & \dfrac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v} \end{vmatrix} = 0\,, \tag{9.17}$$

ou encore

$$\frac{\partial(x,\, \partial^2 x/\partial u^2)}{\partial(u,\, v)} = 0\,. \tag{9.18}$$

Il résulte de (9.18) que $\partial^2 x/\partial u^2$ est fonction explicite de x seule. Soit $F(x)$ cette fonction, supposée de classe $\mathscr{C}^{(1)}$. On aura, compte tenu de (9.18) et (9.15),

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = F(x)\,, \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -\,F(x)\,. \tag{9.19}$$

Par des calculs analogues, on démontre qu'existe une certaine fonction $G(y)$, supposée de classe $\mathscr{C}^{(1)}$, telle que

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = -\,G(y)\,, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = +\,G(y)\,. \tag{9.20}$$

Nous allons montrer que $F(x)$ et $G(y)$ sont des fonctions du premier degré. En effet, dérivons les deux membres de (9.12.a) une fois par rapport à v, puis une fois par rapport à u. Il vient

$$\frac{\partial^3 x}{\partial u\, \partial v^2} = -\,\frac{\partial^3 y}{\partial u^2 \partial v}\,, \tag{9.21}$$

ou, compte tenu de (9.19) et (9.20),

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u} = -\frac{\mathrm{d}G}{\partial v} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y}\frac{\partial y}{\partial v}, \tag{9.22}$$

ou, compte tenu de la première relation (9.12),

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y} \tag{9.23}$$

d'où $\mathrm{d}F/\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}G/\mathrm{d}y$ sont des constantes opposées; si $\pm k^2$ désigne ces constantes, on peut écrire, l'ordre des signes étant arbitraire,

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = +k^2, \quad \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y} = -k^2. \tag{9.24}$$

On peut prendre, suite à (9.19) et (9.20),

$$F(x) = k^2 x, \quad G(y) = -k^2 y, \tag{9.25}$$

ce qui est commode pour la suite; les nouvelles constantes d'intégration peuvent être supposées nulles, en changeant éventuellement l'origine. Les relations (9.19) et (9.20) donnent successivement

$$x = L(v)\cdot \mathrm{ch}\,(ku + C_1) \quad \text{et} \quad x = M(u)\cdot \cos\,(kv + C_2). \tag{9.26}$$

On peut supposer C_1 et C_2 nulles; les relations (9.26) sont réunies en la suivante

$$x = c\cdot \mathrm{ch}\,ku\cdot \cos kv \tag{9.27}$$

où c est une constante réelle. Les relations (9.12) et (9.27) donnent ensuite

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\partial x}{\partial v} = +c\cdot \mathrm{ch}\,ku\cdot k\cdot \sin kv, \tag{9.28}$$

d'où

$$y = c\cdot \sin ku\cdot \sin kv, \tag{9.29}$$

car, compte tenu de la première relation (9.12), y donnée par (9.29) ne comporte pas de fonction de v additionnelle. Finalement, en prenant $k = +1$, on retrouve les coordonnées elliptiques sous la forme habituelle

$$x = c \cdot \operatorname{ch} u \cdot \cos v\,, \quad y = c \cdot \operatorname{sh} u \cdot \sin v\,, \tag{9.30}$$

ce sont les équations paramétriques d'un réseau de coniques homofocales, de foyers $(c, 0)$ et $(-c, 0)$, donc orthogonales, et le théorème de Liouville est ainsi démontré.

Remarque 9.1. Dans sa démonstration rappelée au début de ce paragraphe, Liouville recourt à la théorie des variables complexes et s'appuie sur l'hypothèse que les fonctions qu'il envisage sont de classe $\mathscr{C}^{(4)}$. *Dans la démonstration précédente, on reste en variables réelles et on admet que les fonctions considérées sont au plus de classe* $\mathscr{C}^{(3)}$.

Remarque 9.2. Il est bien connu, depuis Euler (cfr. Huaux $[7]_3$, § 7), que le problème des deux centres fixes admet la séparation des variables en coordonnées elliptiques. Il résulte du théorème de Liouville que le problème des deux centres fixes n'admet la séparation des variables qu'en coordonnées elliptiques, ce qui confirme une conjecture de Weinacht ([**23**], p. 299) et un résultat récent (Huaux $[\mathbf{7}]_2$).

Remarque 9.3. Les coniques homofocales jouissent d'autres propriétés qui méritent d'être rappelées.

(1) *Les coniques homofocales forment un réseau auto-orthogonal.* En effet, si l'on part de l'équation implicite des coniques homofocales

$$\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} = 1\,, \tag{9.31}$$

leur équation différentielle s'écrit $(y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x)$

$$y'^2 + \frac{x^2 - y^2 + a - b}{xy} \cdot y' - 1 = 0 \tag{9.32}$$

et (9.32) se reproduit par le changement de y' en $-1/y'$ (de la Vallee Poussin [**1**], tome 2, pp. 175-176).

(2) Théorème de Richelot [**18**]. *Dans toute transformation homographique, il existe un système orthogonal et un seul, qui demeure orthogonal après la transformation, et ce système est formé d'un réseau de coniques homofocales.*

Darboux ([**2**], tome 3, pp. 52-53) donne une démonstration géométrique de cette propriété, avec extension à l'espace à trois dimensions; Laurent ([**10**], tome 5, pp. 91-92) a donné une démonstration élémentaire de cette propriété, par le calcul.

10. - Mouvement relatif et problème restreint des trois corps

Parmi les exposés actuels du problème restreint des trois corps, citons simplement un court article de Levy [**12**], élémentaire et avec des applications immédiates, ainsi qu'une introduction détaillée dans un traité de Thiry ([**21**], pp. 1-43). Il est immédiat que le problème restreint des trois corps n'admet la séparation des variables ni en coordonnées cartésiennes, ni en coordonnées polaires, ni en coordonnées paraboliques. De plus, en vertu du Théorème 1.2 ci-avant et des conclusions du **9** précédent, il est inutile de s'adresser à des coordonnées autres que les coordonnées elliptiques, par exemples les coordonnées bipolaires ou les coordonnées axiales car le **9** montre que les seules coordonnées ponctuelles où l'on a quelque espoir d'obtenir la séparation des variables sont les coordonnées elliptiques.

Pour traiter le problème restreint des trois corps en coordonnées elliptiques, nous suivons la marche indiquée par Plummer ([**17**], pp. 129-141 et 236-253), à l'exception d'une permutation des lettres u et v.

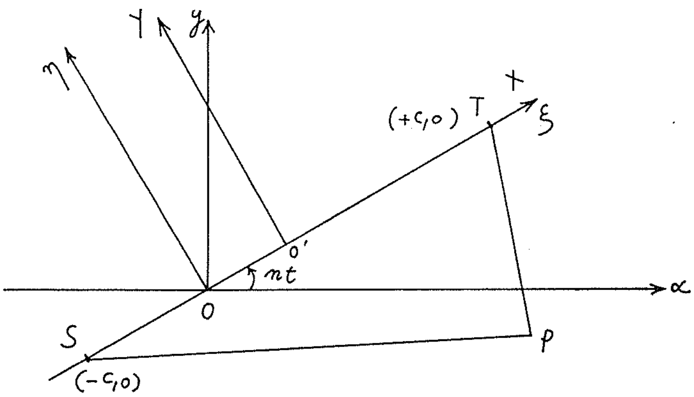

Figura 10.1

Soit un système d'axes tournant autour de l'origine O, $(O\xi, O\eta)$, soit un système d'axes (Ox, Oy) de même origine considéré comme fixe. Dans l'hypothèse où les axes $(O\xi, O\eta)$ ont une vitesse de rotation constante n autour de O, on passe de (Ox, Oy) à $(O\xi, O\eta)$ par les relations

$$x = \xi\cdot\cos nt - \eta\cdot\sin nt\,, \qquad y = \xi\cdot\sin nt + \eta\cdot\cos nt\,. \tag{10.1}$$

L'énergie cinétique d'un point matériel P de masse unité s'écrit

$$T = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\right], \tag{10.2}$$

ou, compte tenu de (10.1),

$$T = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] + n\cdot\left(\xi\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} - \eta\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{n^2}{2}\cdot(\xi^2+\eta^2). \tag{10.3}$$

Dans le plan $O\xi\eta$, définissons un système d'axes comme suit: $O'X$ a même sens et même support que $O\xi$, $O'Y$ est équipollent à $O\eta$. L'origine O' est définie comme suit. Dans $O'XY$, soient les points matériels $S(-c, 0)$ et $T(+c, 0)$, affectés des masses respectives μ et ν. Soit

$$b = +c\cdot\frac{\mu-\nu}{\mu+\nu}, \tag{10.4}$$

O' est le milieu de ST et O est tel que

$$O'O = -b = -c\cdot\frac{\mu-\nu}{\mu+\nu}. \tag{10.5}$$

L'origine O autour de laquelle s'effectue la rotation des axes mobiles $(O\xi, O\eta)$ à vitesse constante n est donc le barycentre des points S et T affectés des masses respectives μ et ν.

Pour fixer les idées, on a supposé $\mu > \nu$ mais ce n'est pas obligatoire. On a immédiatement

$$\xi = X + OO' = X + b, \quad \eta = Y. \tag{10.6}$$

Dans le plan $O'XY$, on définit les coordonnées elliptiques de foyers $S(-c, 0)$ et $T(+c, 0)$ par les équations

$$X = c\cdot\operatorname{ch} u\cdot\cos v, \quad Y = c\cdot\operatorname{sh} u\cdot\sin v. \tag{10.7}$$

Dès lors, compte tenu de (10.6) et (10.7), (10.3) devient, tous calculs terminés,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}c^2(\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v)\left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] \\ &+ nc(c\cdot\sin v\cdot\cos v + b\cdot\operatorname{ch} u\cdot\sin v)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + nc(c\cdot\operatorname{sh} u\cdot\operatorname{ch} u + b\cdot\operatorname{sh} u\cdot\cos v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ &+ \frac{n^2}{2}c^2(\operatorname{ch}^2 u - \sin^2 v) + \frac{n^2}{2}b(2c\cdot\operatorname{ch} u\cdot\cos v + b). \end{aligned} \tag{10.8}$$

Pour passer à la forme canonique d'Hamilton, on pose

$$p_u = \frac{\partial T}{\partial \dot{u}}, \quad p_v = \frac{\partial T}{\partial \dot{v}} \qquad (\dot{u} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{v} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}), \tag{10.9}$$

et on exprime que

$$H = p_u \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + p_v \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - L = p_u \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + p_v \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - T + V; \tag{10.10}$$

dans (10.10) on exprime $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ en fonction de u, v, p_u et p_v grâce aux relations (10.9). Tous calculs faits, on trouve

$$\begin{aligned} H = {} & \frac{1}{2c^2(\mathrm{ch}^2 u - \cos^2 v)} \{[p_u - n \cdot c \cdot \sin v \cdot (c \cdot \cos v + b \cdot \mathrm{ch}\, u)]^2 \\ & + [p_v - n \cdot c \cdot \mathrm{sh}\ u \cdot (c \cdot \mathrm{ch}\, u + b \cdot \cos\ v)]^2\} - \frac{1}{2} n^2 \cdot c^2 \cdot (\mathrm{ch}^2\ u - \sin^2 v) \\ & - \frac{1}{2} n^2 \cdot b \cdot (2\ \mathrm{ch}\, u \cdot \cos v + b) + V(u, v), \end{aligned} \tag{10.11}$$

avec

$$V(u, v) = - k^2 (\frac{\mu}{SP} + \frac{\nu}{TP}) = - \frac{k^2}{c} \frac{(\mu + \nu) \cdot \mathrm{ch}\, u - (\mu - \nu) \cdot \cos v}{\mathrm{ch}^2 u - \cos^2 v}; \tag{10.12}$$

remarquons qu'en posant $n = 0$, on retrouve l'Hamiltonien du problème des deux centres fixes, qui s'écrit

$$H_E = \frac{p_u^2 + p_v^2}{2c^2(\mathrm{ch}^2 u - \cos^2 v)} - \frac{k^2}{c} \frac{(\mu + \nu) \cdot \mathrm{ch}\, u - (\mu - \nu) \cdot \cos v}{\mathrm{ch}^2 u - \cos^2 v}. \tag{10.13}$$

En appliquant la condition (1.12.a) à (10.11), on trouve un polynôme du 4e degré en p_u et p_v où l'on peut opérer un premier groupement de cinq polynômes homogènes en p_u et p_v, l'indice indiquant le degré du polynôme partiel considéré

$$F_4(p_u, p_v) + F_3(p_u, p_v) + F_2(p_u, p_v) + F_1(p_u, p_v) + F_0(p_u, p_v) = 0. \tag{10.14}$$

On vérifie sans peine que $F_4\ (p_u, p_v)$ est identiquement nul; d'ailleurs, c'est le seul polynôme partiel et homogène qu'il soit aisé de calculer. Ensuite, on voit que $V(u, v)$ donné par (10.12) devrait satisfaire à un système d'équations partielles obtenues en annulant les divers coefficients des puissances de p_u et p_v qui apparaissent dans (10.14). On voit que la condition la plus simple, à savoir l'annulation de $F_0(p_u, p_v)$, n'est pas satisfaite par $V(u, v)$ donné par (10.12). Dès lors, on conclut que *le problème restreint des trois corps n'admet pas la séparation des variables en coordonnées elliptiques* (Huaux [7]₁).

Par contre, il est clair que l'Hamiltonien du problème des deux centres fixes, soit H_E donné par (10.13), vérifie la condition (1.12.a) puisque H_E a la forme de Liouville.

11. - Conclusions finales

Il a été établi que dans le cas du mouvement plan et avec des coordonnées ponctuelles, la séparation des variables dans l'équation aux dérivées partielles de Hamilton-Jacobi ne peut se produire qu'avec des coordonnées elliptiques, polaires, paraboliques ou cartésiennes; or, dans aucun de ces systèmes, la séparation des variables n'a lieu pour le problème restreint des trois corps. On peut donc conclure que *le problème restreint des trois corps n'admet la séparation des variables dans aucun système de coordonnées ponctuelles.*

Ce résultat confirme un théorème antérieur de Grebenikov et Kiosa [**6**], établi dans un cas particulier et en résolvant un système d'équations aux dérivées partielles non-linéaires par la méthode de Lagrange et Charpit.

Le résultat établi dans ce travail ne concerne que l'emploi des coordonnées ponctuelles en séparation des variables; il n'affirme rien sur la valeur ou les possibilités d'autres méthodes, parfois utilisées depuis longtemps, et parmi lesquelles nous citons

(a) la recherche des quadratures, par une méthode plus générale que la séparation des variables dans l'équation aux dérivées partielles de Hamilton-Jacobi;

(b) l'emploi de coordonnées généralisées autres que des variables ponctuelles et obtenues par des transformations de contact;

(c) l'emploi de procédés approchés, par exemple les séries et les méthodes numériques.

Bibliographie

Au sujet de la séparation des variables et du problème des deux centres fixes, nous renvoyons à un article récent qui résume ces sujets (Huaux [**7**]$_3$) avec des références. Sur le problème restreint des trois corps, nous renvoyons à un ouvrage de Thiry [**20**], pp. 1-43).

[1] P. Appell, *Traité de Mécanique Rationnelle*, Ed. Gauthier Villars, Paris 1919.

[2] G. Darboux: [•]$_1$ *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Ed. Gauthier Villars, Paris 1887-1889-1894-1896; [•]$_2$ *Principes de Géométrie Analytique*, Ed. Gauthier Villars, Paris 1917.

[3] N. Forbat, *Sur la séparation des variables dans l'équation de Hamilton-Jacobi d'un système non conservatif*, Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci (5) **31** (1944), 462-473.

[4] C. F. Gauss, *Allgemeine auflosung der aufgabe « Die Theile einer gegebenen Flache auf einer andern gegebenen Flache so abzubilden dass die Abbildung dem abgebildeten in den kleinsten Theilen ahnlich wird »*, Copenhagen 1822, Altona 1825. Réimprimé dans « Werke », Gottingen **4** (1880), 193-216.

[5] E. GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique*, 3 vol., Ed. Gauthier Villars, Paris; le 2e volume a été remanié par J. Favard 1949.

[6] E. A. GREBENIKOV et M. N. KIOSA, *On the irreducibility of the restricted three-body problem to the Stäckel type equations*, PMM **38** (1974), 364-366.

[7] A. HUAUX: [•]$_1$ *Über die relative Bewegung*, ZAMM Sonderheft **52** (1976), T_{53}-T_{55}; [•]$_2$ *Sur le problème des deux centres fixes*, Congrès du Centenaire de l'A.F.A.S., Orléans-La Source, juillet 1977, Science **4** (1973), 42-45; [•]$_3$ *Sur la séparation des variables dans l'équation aux dérivées partielles de Hamilton-Jacobi*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **108** (1976), 251-282; [•]$_4$ *Sur l'unicité du cas de séparation des variables de Liouville*, 95e Congrès annuel de l'A.F.A.S., Marseille-Luminy, juillet 1976; [•]$_5$ *Sur le cas de séparation des variables de Liouville*, 96e Congrès annuel de l'A.F.A.S., Rennes, juillet 1977; [•]$_6$ *Sur les coordonnées orthogonales du plan*, 97e Congrès annuel de l'A.F.A.S., Mulhouse, juillet 1978.

[8] Lord KELVIN, *Extraits de deux lettres adressées à M. Liouville par M. William Thomson*, J. Mathématiques Pures Appl. **12** (1847), 255-264, Ed. Gauthier Villars, Paris, ou bien « *Reprint of paper on Electrostatics and Magnetism* » Ed. Mac Millan and Co. Londres (1884), 146-154.

[9] M. N. KIOSA cfr. E. A. GREBENIKOV.

[10] H. LAURENT, *Traité d'Analyse*, Ed. Gauthier Villars, Paris 1885 à 1891.

[11] T. LEVI CIVITA, *Sulla integrazione della equazione di Hamilton-Jacobi per separazione di variabili*, Math. Ann. **59** (1904), 383; ou « Opere Matematiche » **2** (1901-1907), 395-410.

[12] J. LEVY, *Sur le rôle de la dynamique dans l'étude des trajectoires des engins spatiaux*, Bull. Soc. Française des Mécaniciens **9** (1959), 23-28.

[13] J. LIOUVILLE: [•]$_1$ *Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer*, J. Math. Pures Appl. **11** (1846), 345-378; [•]$_2$ *Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer*, J. Math. Pures Appl. **12** (1847), 410-444; [•]$_3$ *L'intégration des équations différentielles du mouvement d'un nombre quelconque de point matériels*, J. Math. Pures Appl. **14** (1849), 257-299; [•]$_4$ *Du tracé géographique des surfaces les unes sur les autres*, Note V, 601-608 ajoutée à la 5e édition de l'ouvrage *Application de l'Analyse à la Géometrie* de G. Monge, Ed. Bachelier, Paris 1850.

[14] J. MAISONNEUVE et R. PFYFFER, *Tracé et construction des aubages tournants*, Ed. Dunod, Paris 1925, 24.

[15] G. MAYNE, *Le problème de la séparation des variables pour les systèmes dynamiques à deux et trois degrés de liberté*, Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mém. Coll. in-8° **34** (1964).

[16] R. PFYFFER cfr. J. MAISONNEUVE.

[17] H. P. PLUMMER, *An introductory treatise on dynamical astronomy*, Dover Publication, Inc., New York 1918 et 1960, 343.

[18] F. J. RICHELOT, *Über die einfachste correlation in zwei raumlichen Gebieten*, J. de Crelle **70** (1868), 137.

[19] J. STEINGENBERGER, *On separation of variables in Mechanical systems*, Acad. Roy Belg. Cl. Sci. (4) **49** (1963), 990-1014.

[20] Y. THIRY *Les fondements de la Mécanique Céleste*, Ed. Gordon and Breach, Paris ,1969, 202.

[21] G. VALIRON, *Cours d'Analyse Mathématique*, Ed. Masson, Paris 1945 et 1947.

[22] CH. J. DE LA VALLEE POUSSIN, *Cours d'Analyse Infinitésimale*, Ed. Uystpruyst-Louvain et Gauthier Villars, Paris 1946 et 1947.

[23] J. WEINACHT, *Über die bedingt periodische Bewegung eines Massenpunktes*, Math. Ann. **91** (1924), 279-299.

Addendum à la Bibliographie

Il est commode d'avoir présents les systèmes de coordonnées elliptiques, polaires et paraboliques, car ils sont cités ou utilisés dans cet article, ainsi que l'élément linéaire correspondant et l'énergie cinétique d'un point materiel de masse unité sous les formes usitées $T(u, v, \mathrm{d}u/\mathrm{d}t, \mathrm{d}v/\mathrm{d}t)$ et $T^*(u, v, p_u, p_v)$.

Une simple lecture de ce tableau montre que ces trois systèmes de coordonnées confèrent à l'énergie cinétique la forme de Liouville, comme d'ailleurs les coordonnées cartésiennes.

(a) *Coordonnés elliptiques.*

(A.1) $$x = c\cdot \mathrm{ch}\, u \cdot \cos v\,, \qquad y = c\cdot \mathrm{sh}\, u\cdot \sin v;$$

(A.2) $$\mathrm{d}s^2 = c^2\cdot(\mathrm{ch}^2 u - \cos^2 v)\cdot(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2);$$

(A.3) $$T = \frac{1}{2}c^2\cdot(\mathrm{ch}^2 u - \cos^2 v^2)\cdot\left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2\right];$$

(A.4) $$T^* = \frac{1}{2}\,\frac{c^2}{\mathrm{ch}^2 u - \cos^2 v}\cdot(p_u^2 + p_v^2)\,.$$

(b) *Coordonnées polaires.*

(A.5) $$x = r\cdot\cos\theta\,, \qquad y = r\cdot\sin\theta;$$

(A.6) $$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2;$$

(A.7) $$T = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}{}^2\right);$$

(A.8) $$T^* = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2\right) = \frac{1}{2r^2}\left(r^2\cdot p_r^2 + p_\theta^2\right).$$

(c) *Coordonnées paraboliques.*

(A.9) $$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)\,, \qquad y = uv;$$

(A.10) $$\mathrm{d}s^2 = (u^2 + v^2)\cdot(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2);$$

(A.11) $$T = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)\cdot(\dot{u}^2 + \dot{v}^2)\,, \qquad T^* = \frac{1}{2}\,\frac{p_u^2 + p_v^2}{u^2 + v^2}.$$

Résumé

En s'appuyant sur divers résultats antérieurs, on démontre que, dans le cas du problème restreint des trois corps, l'équation aux dérivées partielle des Hamilton-Jacobi n'admet la séparation des variables dans aucun système de coordonnées ponctuelles. Ce résultat négatif suffit à expliquer les difficultés du problème restreint des trois corps et, a fortiori, les difficultés du problème des trois corps. La présente comunication expose les étapes successives des calculs qui ont amené cette conclusion.

* * *