Riv. Mat. Univ. Parma (4) **5** (1979), 321-335

GIORGIO FERRARESE (*)

Dinamica dei continui sottili bidimensionali: formulazione intrinseca del problema di Cauchy (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

Introduzione

Come per un continuo tridimensionale ordinario [**1**]$_1$ o alla Cosserat [**1**]$_2$, anche per una superficie materiale (*shell*), nello schema di Kirchhoff o anche con generici direttori, la dinamica può essere formulata in *termini intrinseci*. Si vuol dire attraverso variabili direttamente collegate alla configurazione attuale e alla sua evoluzione istantanea (*tensori fondamentali della superficie*, 1ª e 2ª *velocità di deformazione*, *velocità angolare*, ecc.) aventi un preciso significato geometrico-cinematico.

Si tratta di una formulazione che fa capo ad un ben determinato *problema di Cauchy del 1° ordine*, il quale subordina le condizioni di compatibilità del moto, non appena i dati iniziali siano scelti opportunamente. Più precisamente, ai fini della compatibilità del movimento, i dati iniziali non sono tutti liberi, come del resto nel caso di un continuo tridimensionale ordinario (¹). Sono completamente disponibili la *configurazione iniziale* della superficie materiale, la *velocità angolare tangenziale* e la *parte deviatrice della* 1ª *velocità di deformazione.*

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Università, Città Universitaria, 00100 Roma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del M.P.I. (art. 286 T. U.). Da una conferenza al Symposium « Non linear continuum Mechanics », U.S. Nat. Sc. Found. - C.N.R., Venezia, 23-26 Maggio 1978. — Ricevuto: 13-XI-1978.

(¹) La velocità angolare iniziale è determinata (a meno del suo valore in un punto) dalla velocità di deformazione, la quale è subordinata, a sua volta, alle condizioni di congruenza di Saint Venant.

I rimanenti dati iniziali sono subordinati a questi attraverso relazioni in termini finiti o differenziali.

La risoluzione del suddetto problema di Cauchy (assegnata la legge delle forze di massa, nonchè le equazioni costitutive) costituisce il *problema principale* della dinamica, in quanto fornisce le caratteristiche geometrico-cinematiche della superficie mobile e, con esse, la distribuzione degli sforzi.

La determinazione effettiva del moto (*problema secondario*) è invece subordinata al problema precedente e affidata alla risoluzione di due sistemi successivi ai differenziali totali. Naturalmente, se la superficie non è semplicemente connessa, deformazioni regolari possono dar luogo a distorsioni del tipo di Volterra (cfr. [7], nonchè [5]$_3$, pp. 195-199).

L'uso di coordinate lagrangiane arbitrarie assicura infine alla formulazione i caratteri di invarianza propri di una teoria generale.

1. - Compatibilità geometrica di un continuo bidimensionale: condizioni di congruenza

È ben noto che una superficie σ dello spazio ordinario può essere caratterizzata intrinsecamente (a meno di uno spostamento rigido) mediante le sue due *forme* quadratiche *fondamentali* $a_{\mu\nu}$ e $b_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2)$, le quali tuttavia non possono essere assegnate a piacere. È come dire: fissata una superficie di riferimento Σ, e su questa i due campi tensoriali (²)

$$E_{\mu\nu} \equiv \tfrac{1}{2}(a_{\mu\nu} - A_{\mu\nu}) \,, \qquad F_{\mu\nu} \equiv b_{\mu\nu} - B_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2) \,, \tag{1}$$

questi non corrispondono generalmente alle *caratteristiche di deformazione dirette* (³) di uno *spostamento regolare*, diciamo $\mathscr{S} \equiv \Sigma \to \sigma$. Perchè un tale spostamento esista, ovvero esista σ, detti campi devono soddisfare tre condizioni differenziali indipendenti, le quali sono generalmente necessarie e sufficienti. Si tratta in sostanza delle *equazioni di Gauss-Mainardi-Codazzi*, tradotte in termini di deformazione diretta (quindi in Σ), anzichè mediante i tensori fon-

---

(²) Tensori di Σ sono indicati, come d'uso, con lettere maiuscole. Naturalmente nel considerare le differenze $E_{\mu\nu}$ ed $F_{\mu\nu}$, si intende che i tensori di σ di cui alle componenti $a_{\mu\nu}$ e $b_{\mu\nu}$ siano *riportati* nella configurazione di riferimento Σ; ciò che corrisponde, almeno in coordinate lagrangiane, ad interpretare le $a_{\mu\nu}$ e $b_{\mu\nu}$ come componenti naturali non già in σ ma in Σ.

(³) I due campi $E_{\mu\nu}$ e $F_{\mu\nu}$ sono nulli se e solo se le superficie Σ e σ differiscono per uno spostamento rigido.

damentali di σ: $a_{\mu\nu}$ e $b_{\mu\nu}$. Esse hanno la seguente forma esplicita

$$(2)\quad \begin{aligned} &\nabla_{[\alpha}\nabla_{[\mu}E_{\nu]\beta]} + B_{[\alpha}{}^{\varrho}B_{\beta][\mu}E_{\nu]\varrho} + B_{[\mu[\alpha}F_{\beta]\nu]} + \tfrac{1}{2}F_{\mu[\alpha}F_{\beta]\nu} + \tfrac{1}{2}\,a^{\varrho\sigma}H_{[\alpha\mu,\varrho}H_{\beta]\nu,\sigma} = 0\,,\\ &\nabla_{[\alpha}F_{\beta]\mu} + a^{\varrho\sigma}(B_{\varrho[\alpha} + F_{\varrho[\alpha})H_{\beta]\mu,\sigma} = 0\,, \end{aligned}$$

essendo ∇ il simbolo di derivazione covariante sulla superficie di riferimento Σ (costruito mediante i simboli di Christoffel associati alla metrica $A_{\mu\nu}$ di Σ) e $H_{\alpha\mu,\varrho}$ il tensore

$$(3)\qquad H_{\alpha\mu,\varrho} \equiv \nabla_\alpha E_{\mu\varrho} + \nabla_\mu E_{\varrho\alpha} - \nabla_\varrho E_{\alpha\mu}\,,$$

simmetrico rispetto ai primi due indici e *in corrispondenza biunivoca con il gradiente di* $E_{\mu\nu}$

$$(4)\qquad 2\nabla_\alpha E_{\mu\nu} = H_{\alpha\mu,\nu} + H_{\alpha\nu,\mu} \qquad (\alpha, \mu, \nu = 1, 2)\,.$$

Naturalmente nelle (2), che hanno carattere generale, figura esplicitamente la metrica attuale $a^{\varrho\sigma}$ in forma contravariante, riportata su Σ

$$a^{\varrho\sigma} \equiv A^{\varrho\sigma} - \frac{2}{J^2}\,(E^{\varrho\sigma} + 2II_E A^{\varrho\sigma})\,,$$

essendo

$$(5)\qquad J^2 \equiv \frac{a}{A} = 1 + 2I_E + 4II_E\,, \qquad I_E \equiv A^{\varrho\sigma}E_{\varrho\sigma}\,, \qquad II_E \equiv \det\|E^{\varrho}{}_{\sigma}\|\,,$$

ovvero anche

$$(6)\qquad a^{\varrho\sigma} = \frac{1}{J^2}\,[(1 + 2I_E)A^{\varrho\sigma} - 2E^{\varrho\sigma}] \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2)\,.$$

Le (2) traducono, per un continuo bidimensionale, le classiche condizioni di congruenza per deformazioni finite (cfr. [**2**], nonchè [**1**]$_3$, p. 178), e si riassumono in *tre condizioni scalari* per i tensori (1). Invero, per quanto riguarda la $(2)_1$, i singoli termini (e quindi la loro somma) godono di tutte le proprietà di un tensore di curvatura di una varietà V_2, onde il tensore a primo membro equivale ad uno scalare. La $(2)_2$ invece, data l'antisimmetria rispetto agli indici α e β, equivale a due sole condizioni.

Nel caso linearizzato si ritrovano naturalmente le condizioni ordinarie (cfr. [4], p. 465)

$$
(7) \qquad \begin{aligned}
&\mathscr{E}^{\alpha\beta}\mathscr{E}^{\mu\nu}[\nabla_\alpha\nabla_\mu E_{\beta\nu} + B_{\alpha\mu}(F_{\beta\nu} - B_\beta{}^\varrho E_{\varrho\nu})] = 0\,,\\
&\mathscr{E}^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha F_{\beta\mu} + B_\alpha{}^\varrho H_{\beta\mu,\varrho}) = 0\,,
\end{aligned}
$$

essendo $\mathscr{E}^{\alpha\beta}$ il *tensore di Ricci di* Σ

$$
(8) \qquad \mathscr{E}^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{\sqrt{A}}\,\delta^{\alpha\beta}_{12} \sim \mathscr{E}_{\alpha\beta} \equiv \sqrt{A}\,\delta^{12}_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2)\,.
$$

Si noti che le (2) valgono, in particolare, se σ è sovrapposta a Σ (come superficie ma non come luogo di punti), cioè nel caso di un velo teso su di un appoggio rigido.

2. - Cinematica di una superficie materiale: velocità di deformazione locale e velocità angolare

Come per un continuo tridimensionale (classico $[\mathbf{1}]_1$ o alla Cosserat $[\mathbf{1}]_2$), più che l'aspetto geometrico (spostamento), conviene esaminare l'aspetto cinematico (movimento) della superficie materiale, e operare in termini di variabili associate alla configurazione istantanea σ. Invero, solo queste hanno significato diretto, e appaiono le più naturali per la traduzione del problema di evoluzione. A tale scopo, riferita la superficie mobile σ a coordinate lagrangiane arbitrarie y^α $(\alpha = 1, 2)$, indicheremo, come d'uso, con $\{\boldsymbol{a}_i\}$ la base locale nel generico punto $P \in \sigma$, costituita dai vettori tangenti $\boldsymbol{a}_\alpha \equiv P_{,\alpha}$ e dal versore $\boldsymbol{a}_3$ normale a σ (orientato in modo prefissato). Indicheremo anche con a_{ij} i prodotti $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j$, tra i quali la metrica $a_{\alpha\beta}$ di σ, e con $\{\boldsymbol{a}^i\}$ la base duale di $\{\boldsymbol{a}_i\}$ $(\boldsymbol{a}^i \cdot \boldsymbol{a}_k = \delta^i_k)$. Risulta $a_{\alpha 3} \equiv 0$, $a_{33} \equiv 1$ nonchè, per gli elementi reciproci a^{iJ} $(a^{iJ} a_{kJ} = \delta^i_k)$, le condizioni analoghe $a^{\alpha 3} \equiv 0$, $a^{33} \equiv 1$. Ciò premesso, consideriamo i derivati temporali dei vettori di base o cobase. Essi sono del tipo

$$
(9) \qquad \dot{\boldsymbol{a}}_i = \delta_i{}^\alpha \eta_\alpha + \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{a}_i \sim \dot{\boldsymbol{a}}^i = -\,\delta^i{}_\alpha \eta^\alpha + \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{a}^i \qquad (i = 1, 2, 3)\,,
$$

essendo $\eta_\alpha \equiv a_{\alpha\beta}\eta^\beta$ e $\boldsymbol{w}$ funzioni ben determinate del gradiente spaziale della *velocità lagrangiana* $\boldsymbol{v}$:

$$
(10) \qquad \begin{aligned}
&\eta_\alpha \equiv \boldsymbol{a}_{(\alpha} \cdot \partial_{\beta)}\, \boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{a}^\beta,\\
&\boldsymbol{w} \equiv \tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}^i \times \dot{\boldsymbol{a}}_i = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}^\alpha \times \partial_\alpha \boldsymbol{v} + \varepsilon^{\alpha\beta}\boldsymbol{a}_\alpha\ \ \partial_\beta \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}_3)\,,
\end{aligned}
$$

ed $\varepsilon^{\alpha\beta}$ il *tensore* dispari *di Ricci* di σ [1])

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{\sqrt{a}}\,\delta^{\alpha\beta}_{12} \sim \varepsilon_{\alpha\beta} \equiv \sqrt{a}\,\delta^{12}_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2)\,. \tag{11}$$

Il sistema tensoriale $\eta_\alpha = \eta_{\alpha\beta}\,\boldsymbol{a}^\beta$ riassume la 1ª *velocità di deformazione* della superficie σ. Esso equivale ad un tensore doppio simmetrico superficiale

$$\eta_{\alpha\beta} = \boldsymbol{a}_{(\alpha} \cdot \partial_{\beta)}\boldsymbol{v} \equiv \tfrac{1}{2}\,\dot{a}_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2)\,, \tag{12}$$

del tutto analogo (salvo la diversa variabilità degli indici) alla velocità di deformazione del caso tridimensionale.

Il vettore $\boldsymbol{w} \in E_3$

$$\boldsymbol{w} = w^i \boldsymbol{a}_i \equiv \tfrac{1}{2} w_{ij}\,\boldsymbol{a}^i \times \boldsymbol{a}^j, \tag{13}$$

rappresenta invece la *velocità angolare* locale di σ. Essa si riassume in un tensore doppio antisimmetrico $w_{ij} = -\,w_{ji}$ (definito su σ), ovvero in un tensore superficiale antisimmetrico $w_{\alpha\beta}$ e in un vettore $w_{\alpha 3}$ di σ. Valgono i legami

$$w_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} w^3, \qquad w_{\alpha 3} = -\,\varepsilon_{\alpha\beta} w^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2)\,, \tag{14}$$

e inversamente

$$w^3 = \tfrac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta} w_{\alpha\beta}\,, \qquad w^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} w_{\beta 3} \qquad (\alpha = 1, 2)\,. \tag{14'}$$

Come per un continuo tridimensionale, i tensori (10) caratterizzano l'atto di moto di σ nell'intorno (superficiale) del suo punto generico P. Più precisamente, in detto intorno vale lo sviluppo seguente

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \times PP' + \eta_\alpha \xi^\alpha + ②\,, \qquad PP' = \xi^\alpha \boldsymbol{a}_\alpha + ②\,, \tag{15}$$

a meno di termini del 2° ordine nelle differenze $\xi^\alpha \equiv y'^\alpha - y^\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$. Tuttavia, se ad un dato istante risulta $\eta_\alpha \equiv 0$ su σ, l'atto di moto corrispondente non è necessariamente rigido, nel senso che la velocità angolare non è indipendente da P. Ciò appare del tutto naturale se si pensa ad un velo inestendibile e al significato delle η_α di cui alla (12), e costituisce una differenza sostanziale rispetto al caso tridimensionale. In termini più precisi, dall'espressione

---

[1]) Riportato su Σ, esso dà luogo ai due tensori $\varepsilon^{\alpha\beta} \equiv (1/J)\,\mathscr{E}^{\alpha\beta}$, ed $\varepsilon_{\alpha\beta} \equiv J\mathscr{E}_{\alpha\beta}$, i quali differiscono per il fattore J^2.

di $\boldsymbol{w}$ di cui alla $(10)_2$ segue direttamente, per derivazione, il seguente legame differenziale

$$\partial_\alpha \boldsymbol{w} = \boldsymbol{a}^\nu \times \delta_\nu \boldsymbol{\eta}_\alpha - \boldsymbol{a}^3 \times (\boldsymbol{\chi}_\alpha - b_\alpha{}^\nu \boldsymbol{\eta}_\nu) \qquad (\alpha = 1, 2)\,, \tag{16}$$

essendo ora δ_ν la derivazione covariante su σ e $\boldsymbol{\chi}_\alpha$ la 2^a *velocità di deformazione* di σ:

$$\boldsymbol{\chi}_\alpha = \chi_{\alpha\beta}\, \boldsymbol{a}^\beta, \qquad \chi_{\alpha\beta} \equiv \dot{b}_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2)\,. \tag{17}$$

Il gradiente della velocità angolare si esprime pertanto mediante le derivate temporali $\dot{a}_{\alpha\beta}$ e $\dot{b}_{\alpha\beta}$ dei coefficienti delle due forme quadratiche fondamentali di σ e si annulla con esse. In altri termini: *Cns perchè l'atto di moto di σ sia rigido è che risulti* $\boldsymbol{\eta}_\alpha = 0$, $\boldsymbol{\chi}_\alpha = 0$ $\forall P \in \sigma$; ciò che pienamente giustifica, per tali tensori (ovvero per $\eta_{\alpha\beta}$ e $\chi_{\alpha\beta}$) il nome di velocità di deformazione locali.

3. - Compatibilità geometrico-cinematica

Operando in termini lagrangiani, la determinazione del moto di σ può essere subordinata alla risoluzione del seguente sistema ai differenziali totali nei tre vettori $\boldsymbol{a}_i(y/t)$

$$\partial_\alpha \boldsymbol{a}_i = \Gamma_{\alpha i}{}^k \boldsymbol{a}_k\,, \qquad \partial_t \boldsymbol{a}_i = h_i{}^k \boldsymbol{a}_k \qquad (\alpha = 1, 2;\; i = 1, 2, 3)\,, \tag{18}$$

ove i coefficienti $\Gamma_{\alpha i}{}^k$ e $h_i{}^k$ sono così definiti:

$$\begin{aligned} &\Gamma_{\alpha\beta}{}^\varrho \equiv a^{\varrho\sigma} \Gamma_{\alpha\beta,\sigma}\,, && \Gamma_{\alpha\beta,\sigma} \equiv \tfrac{1}{2}(\partial_\alpha a_{\beta\sigma} + \partial_\beta a_{\sigma\alpha} - \partial_\sigma a_{\alpha\beta})\,, \\ &\Gamma_{\alpha\beta}{}^3 \equiv b_{\alpha\beta}\,, && \Gamma_{\alpha 3}{}^\varrho \equiv - b_\alpha{}^\varrho, \quad \Gamma_{\alpha 3}{}^3 = 0 \qquad (\alpha, \beta, \varrho = 1, 2)\,, \end{aligned} \tag{19}$$

e rispettivamente

$$h_\alpha{}^\beta \equiv \eta_\alpha{}^\beta + w_\alpha{}^\beta, \quad h_\alpha{}^3 \equiv w_{\alpha 3}\,, \quad h_3{}^\beta \equiv - w_{\alpha 3} a^{\alpha\beta}, \quad h_3{}^3 = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2)\,. \tag{20}$$

Tali coefficienti sono, a loro volta, condizionati dai seguenti legami

$$\partial_\beta(\partial_\alpha \boldsymbol{a}_i) = \partial_\alpha(\partial_\beta \boldsymbol{a}_i)\,, \quad \partial_t(\partial_\alpha \boldsymbol{a}_i) = \partial_\alpha(\partial_t \boldsymbol{a}_i)\,, \quad \partial_t(\partial_t \boldsymbol{a}_\alpha) = \partial_\alpha \boldsymbol{a}\,,$$

essendo $\boldsymbol{a} \equiv a^i \boldsymbol{a}_i$ l'*accelerazione lagrangiana* dei punti di σ.

Ne conseguono, tenuto conto delle (18), le condizioni scalari

$$(21)_1 \qquad \partial_\beta \Gamma_{\alpha i}{}^k + \Gamma_{\alpha i}{}^j \Gamma_{\beta j}{}^k = \partial_\alpha \Gamma_{\beta i}{}^k + \Gamma_{\beta i}{}^j \Gamma_{\alpha j}{}^k,$$

$$(21)_2 \qquad \partial_t \Gamma_{\alpha i}{}^k + \Gamma_{\alpha i}{}^j h_j{}^k = \partial_\alpha h_i{}^k + h_i{}^j \Gamma_{\alpha j}{}^k,$$

$$(21)_3 \qquad \partial_t h_\alpha{}^i + h_\alpha{}^j h_j{}^i = \partial_\alpha a^i + \Gamma_{\alpha k}{}^i a^k \qquad (\alpha, \beta = 1, 2;\ i, k = 1, 2, 3)\,.$$

Di qui innanzitutto, sviluppando la $(21)_1$ secondo la (19), le *equazioni geometriche di Gauss-Mainardi-Codazzi*

$$(22) \qquad -r_{\alpha\beta\mu}{}^\nu = 2 b_{\mu[\alpha} b_{\beta]}{}^\nu, \qquad \delta_{[\alpha} b_{\beta]\mu} = 0\,,$$

essendo $r_{\alpha\beta\mu}{}^\nu$ il *tensore di curvatura* di σ,

$$(23) \qquad r_{\alpha\beta\mu}{}^\nu \equiv 2(\partial_{[\alpha} \Gamma_{\beta]\mu}{}^\nu + \Gamma_{\mu[\beta}{}^\varrho \Gamma_{\alpha]\varrho}{}^\nu) \qquad (\alpha, \beta, \mu, \nu = 1, 2)\,.$$

Analogamente la $(21)_2$ si riduce ai due soli legami

$$(24) \qquad \begin{aligned} \partial_t \Gamma_{\alpha\beta}{}^\mu &= \delta_\alpha h_\beta{}^\mu + b_{\alpha\beta}\omega^\mu - b_\alpha{}^\mu \omega_\beta\,, \\ \partial_t b_{\alpha\beta} &= \delta_\alpha \omega_\beta + b_{\alpha\mu} h_\beta{}^\mu \qquad (\alpha, \beta, \mu = 1, 2)\,, \end{aligned}$$

ove si è posto, per brevità

$$(25) \qquad \omega_\beta \equiv w_{\beta 3} = -w_{3\beta} \qquad (\beta = 1, 2)\,.$$

Infine, per quanto riguarda la $(21)_3$, si hanno le condizioni

$$(26) \qquad \begin{aligned} \partial_t h_\alpha{}^\beta &= \delta_\alpha a^\beta - h_\alpha{}^\varrho h_\varrho{}^\beta + \omega_\alpha \omega^\beta - b_\alpha{}^\beta a^3, \\ \partial_t \omega_\alpha &= \partial_\alpha a^3 + b_{\alpha\beta} a^\beta - h_\alpha{}^\beta \omega_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2)\,, \end{aligned}$$

ovvero, analogamente al caso tridimensionale (cfr. [**1**]$_1$, p. 245)

$$(26)' \qquad \begin{aligned} \partial_t h_{(\alpha\beta)} &= \delta_{(\alpha} a_{\beta)} + h_\alpha{}^\varrho h_{\beta\varrho} + \omega_\alpha \omega_\beta - b_{\alpha\beta} a^3, \\ \partial_t h_{[\alpha\beta]} &= \delta_{[\alpha} a_{\beta]}\,, \\ \partial_t \omega_\alpha &= \partial_\alpha a^3 + b_{\alpha\beta} a^\beta - h_\alpha{}^\beta \omega_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2)\,. \end{aligned}$$

D'altra parte, per definizione di simboli di Christoffel, vale l'identità

$$(27) \qquad \partial_t \Gamma_{\alpha\beta}{}^\mu = a^{\mu\nu} h_{\alpha\beta,\,\nu}\,,$$

essendo $h_{\alpha\beta,\nu}$ il *tensore triplo* (simmetrico rispetto ai primi due indici) analogo a (3)

$$h_{\alpha\beta,\nu} \equiv \delta_\alpha \eta_{\beta\nu} + \delta_\beta \eta_{\nu\alpha} - \delta_\nu \eta_{\alpha\beta} \sim \delta_\alpha \eta_{\beta\nu} = h_{\alpha(\beta,\nu)} \; ; \tag{28}$$

sì che la $(24)_1$ non differisce da

$$h_{\alpha\beta,\nu} = \delta_\alpha h_{\beta\nu} + b_{\alpha\beta}\omega_\nu - b_{\alpha\nu}\omega_\beta \, .$$

Questa a sua volta, introducendo le differenze $\delta_\alpha h_{\beta\nu} - h_{\alpha\beta,\nu}$, le quali definiscono un tensore antisimmetrico rispetto agli indici β e ν:

$$a_{\alpha\beta\nu} \equiv \delta_\alpha h_{\beta\nu} - h_{\alpha\beta,\nu} = \delta_\alpha w_{\beta\nu} - \delta_\beta \eta_{\alpha\nu} + \delta_\nu \eta_{\alpha\beta} \, , \tag{29}$$

si scrive nella forma

$$a_{\alpha\beta\nu} + 2 b_{\alpha[\beta}\omega_{\nu]} = 0 \qquad (\alpha, \beta, \nu = 1, 2) \, . \tag{30}$$

Si noti che se $b_{\alpha[\beta}\omega_{\nu]} = 0$ (in particolare se σ è piana: $b_{\alpha\beta} = 0$, ovvero la velocità angolare $\boldsymbol{w}$ è normale a σ: $\omega_\sigma = 0$) la (30) si riduce alla forma classica: $a_{\alpha\beta\nu} = 0$ dei continui tridimensionali (cfr. $[\mathbf{1}]_1$, p. 246).

4. - Equazioni intrinseche del moto di una superficie materiale: problema di Cauchy

Le condizioni di compatibilità geometrico-cinematiche del moto di una superficie materiale si riassumono, come si è visto, nel complesso delle condizioni (22)-$(24)_2$-(26′)-(30), alle quali va aggiunta la (12), che precisa il significato del tensore $\eta_{\alpha\beta}$. La $(24)_2$, a sua volta, data la simmetria del tensore $b_{\alpha\beta}$, si spezza in due condizioni, considerando la parte simmetrica e antisimmetrica rispettivamente. Tali condizioni vengono in definitiva a costituire due gruppi di legami differenziali. L'uno è di *tipo esplicito nelle derivate temporali* dei tensori fondamenti $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, $\eta_{\alpha\beta} \equiv h_{(\alpha\beta)}$ e $w_{ij} \equiv (w_{\alpha\beta} \equiv h_{[\alpha\beta]}, \omega_\alpha)$

$$\begin{aligned} &\partial_t a_{\alpha\beta} = 2 h_{(\alpha\beta)} \, , \qquad \partial_t b_{\alpha\beta} = \delta_{(\alpha}\omega_{\beta)} + b_{\mu(\alpha} h_{\beta)}{}^{\mu}, \\ &\partial_t h_{(\alpha\beta)} = \delta_{(\alpha} a_{\beta)} + h_\alpha{}^\mu h_{\beta\mu} + \omega_\alpha \omega_\beta - b_{\alpha\beta} a_3, \\ &\partial_t h_{[\alpha\beta]} = \delta_{[\alpha} a_{\beta]} \, , \qquad \partial_t \omega_\alpha = \partial_\alpha a_3 + b_\alpha{}^\beta a_\beta - h_\alpha{}^\beta \omega_\beta \, . \end{aligned} \tag{31}$$

L'altro implica che siano nulli, su σ, i seguenti campi tensoriali, funzioni dei tensori detti e delle loro derivate spaziali (prime e seconde)

$$
(32)\qquad
\begin{aligned}
&s_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv r_{\alpha\beta\mu\nu} + 2b_{\mu[\alpha}b_{\beta]\nu} = 0\,, &&t_{\alpha\beta\mu} \equiv \delta_{[\alpha}b_{\beta]\mu} = 0\,,\\
&u_{\alpha\beta\mu} \equiv a_{\alpha\beta\mu} + 2b_{\alpha[\beta}\omega_{\mu]} = 0\,, &&z_{\alpha\beta} \equiv \delta_{[\alpha}\omega_{\beta]} + b_{\mu[\alpha}h_{\beta]}{}^{\mu} = 0\,.
\end{aligned}
$$

È notevole la circostanza che le condizioni (31)-(32) non sono indipendenti, nel senso che, *subordinatamente alle* (31), *le* (32) *costituiscono delle equazioni di conservazione*, cioè risultano verificate a ciascun istante, purchè lo siano inizialmente. Infatti, tenendo conto dell'identità di cui al tensore di curvatura di σ

$$
(33)\qquad \partial_t\, r_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu} = 2a^{\nu\varrho}\,\delta_{[\alpha}h_{\beta]\mu,\varrho}\,,
$$

e del teorema di *Ricci* sulla invertibilità di due derivazioni covarianti successive, nonchè delle condizioni (31), è agevole riconoscere che i quattro tensori di cui ai primi membri della (32) soddisfano le seguenti condizioni differenziali

$$
(34)\qquad
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\partial_t\, s_{\alpha\beta\mu\nu} = s_{\alpha\beta\varrho[\nu}h_{\mu]}{}^{\varrho} - \delta_{[\alpha}u_{\beta]\mu\nu} + t_{\alpha\beta[\mu}\omega_{\nu]}\,,\\
&\partial_t t_{\alpha\beta\mu} \;\;= t_{\alpha\beta\nu}h_{\mu}{}^{\nu} - b_{[\alpha}{}^{\nu}u_{\beta]\mu\nu} - \tfrac{1}{2}s_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu}\omega_{\nu}\,,\\
&\tfrac{1}{2}\partial_t u_{\alpha\beta\mu} = h_{[\beta}{}^{\nu}u_{\mu]\alpha\nu} - h_{\alpha}{}^{\nu}u_{[\beta\mu]\nu} + 2a^{3}t_{\beta\mu\alpha} + \tfrac{1}{2}s_{\beta\mu\alpha\nu}a^{\nu},\\
&\partial_t z_{\alpha\beta} \;\;= u_{[\beta\alpha]\nu}\omega^{\nu} - h_{[\beta}{}^{\nu}z_{\alpha]\nu} \qquad\qquad (\alpha,\beta,\mu,\nu = 1,2)\,.
\end{aligned}
$$

Si tratta di condizioni *lineari ed omogenee* per i tensori $s_{\alpha\beta\mu\nu}$, $t_{\alpha\beta\mu}$, $u_{\alpha\beta\mu}$ e $z_{\alpha\beta}$. Pertanto esse implicano che detti tensori siano identicamente nulli se tali sono inizialmente:

$$
\begin{matrix} s_{\alpha\beta\mu\nu} = 0\,, & t_{\alpha\beta\mu} = 0\\ u_{\alpha\beta\mu} = 0\,, & z_{\alpha\beta} = 0\end{matrix}
\quad \text{su } \Sigma \equiv \sigma_0 \Rightarrow \quad
\begin{matrix} s_{\alpha\beta\mu\nu} = 0\,, & t_{\alpha\beta\mu} = 0\\ u_{\alpha\beta\mu} = 0\,, & z_{\alpha\beta} = 0\end{matrix}
\quad \text{su } \sigma\,.
$$

In altri termini, *il complesso dei legami* (31)-(32) *equivale al sistema* (31) *e alle condizioni iniziali* [cfr. (29) e $(20)_1$]

$$
(35)\qquad
\begin{aligned}
&R_{\alpha\beta\mu\nu} + 2B_{\mu[\alpha}B_{\beta]\nu} = 0\,, \qquad \nabla_{[\alpha}B_{\beta]\mu} = 0\,,\\
&\nabla_\alpha W_{\beta\mu} - \nabla_\beta \eta_{\alpha\mu} + \nabla_\mu \eta_{\alpha\beta} + 2B_{\alpha[\beta}\Omega_{\mu]} = 0\,,\\
&\nabla_{[\alpha}\Omega_{\beta]} + B_{\mu[\alpha}(\eta_{\beta]}{}^{\mu} + W_{\beta]}{}^{\mu}) = 0 \qquad\qquad \text{su } \Sigma \equiv \sigma_0;
\end{aligned}
$$

condizioni che riguardano, tanto le due forme quadratiche fondamentali della superficie iniziale Σ: $A_{\alpha\beta}$ e $B_{\alpha\beta}$, quanto la 1ª velocità di deformazione $\eta_{\alpha\beta}$ e la velocità angolare W_{ij} ($W_{\alpha\beta}$, Ω_α).

D'altra parte, *le* (31) *costituiscono un ben determinato problema di Cauchy del 1° ordine per i tensori* $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$; $\eta_{\alpha\beta}$ *e* w_{ij}, *supposta nota l'accelerazione lagrangiana* a_i. Si tratta di completare tale sistema con i *dati iniziali*, cioè di assegnare, almeno direttamente, la superficie iniziale Σ, nonchè le relative velocità di deformazione $\eta_{\alpha\beta}(y)$ e velocità angolare $W_{ij}(y)$, compatibilmente con le (35).

5. - Compatibilità iniziale

Date le limitazioni (35), è chiaro che i dati iniziali: Σ, $\eta_{\alpha\beta}$ e W_{ij}, non sono tutti liberi. Invero, assegnata a piacere Σ (con la dovuta regolarità), i tensori $\eta_{\alpha\beta}$, $W_{\alpha\beta}$ e Ω_α non possono essere fissati (su Σ) in modo arbitrario, in quanto vincolati dalle condizioni differenziali del 1° ordine di cui alle $(35)_{2,3}$ (5)

$$(36)\qquad \begin{aligned} &\nabla_\alpha W_{\beta\mu} = \nabla_\beta \eta_{\alpha\mu} - \nabla_\mu \eta_{\alpha\beta} - 2B_{\alpha[\beta}\Omega_{\mu]}\,, \\ &\nabla_{[\alpha}\Omega_{\beta]} = \tfrac{1}{2}\mathscr{H} W_{\alpha\beta} - B_{[\alpha}{}^{\mu}\eta_{\beta]\mu} \qquad (\alpha, \beta, \mu = 1, 2)\,, \end{aligned}$$

essendo $\mathscr{H}$ la curvatura media di Σ

$$(37)\qquad \mathscr{H} \equiv A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}\,.$$

Le $(36)_1$ costituiscono, d'altra parte, un sistema ai differenziali totali per il vortice $W_{\alpha\beta}$, e comportano le seguenti condizioni di integrabilità

$$(38)\qquad \begin{aligned} &\nabla_\alpha\nabla_{[\mu}\eta_{\nu]\beta} - \nabla_\beta\nabla_{[\mu}\eta_{\nu]\alpha} + \eta_{\varrho[\mu}B_{\nu][\alpha}B_{\beta]}{}^{\varrho} + \\ &- \eta_{\varrho[\alpha}B_{\beta][\mu}B_{\nu]}{}^{\varrho} + B_{[\alpha[\nu}\nabla_{\mu]}\Omega_{\beta]} - B_{[\mu[\alpha}\nabla_{\beta]}\Omega_{\nu]} = 0\,. \end{aligned}$$

Queste, a loro volta, non dipendono da $W_{\alpha\beta}$, onde *il sistema* $(36)_1$ *è illimitatamente integrabile*, come nel caso tridimensionale (cfr. le condizioni di Saint Venant). Si tratta di *una sola condizione differenziale*, in quanto il tensore a primo membro (del 4° ordine) gode di tutte le proprietà algebriche di un tensore di curvatura di una V_2. Essa fa intervenire: (i) per quanto riguarda Σ, i due tensori fondamentali $A_{\alpha\beta}$ e $B_{\alpha\beta}$, nonchè i simboli di Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\varrho}$ (unitamente alle derivate prime); (ii) per quanto concerne l'atto di moto ini-

---

(5) Le $(35)_1$, che non differiscono dalle equazioni di Gauss-Mainardi-Codazzi per la superficie Σ, sono invece identicamente soddisfatte.

ziale, la 1ª velocità di deformazione $\eta_{\alpha\beta}$ (insieme alle derivate prime e seconde) e la parte Ω_α della velocità angolare (insieme alle derivate prime). Inoltre costituisce l'unico legame per i dati iniziali. Più precisamente, *la* $(36)_2$ *vale a determinare* (almeno per $\mathscr{H} \neq 0$) *il tensore* $W_{\alpha\beta}$. Essa si scrive infatti nella forma esplicita

$$\tfrac{1}{2}\mathscr{H} W_{\alpha\beta} = \nabla_{[\alpha}\Omega_{\beta]} + B_{[\alpha}{}^{\varrho}\eta_{\beta]\varrho} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2)\,. \tag{39}$$

I rimanenti dati iniziali Σ, $\eta_{\alpha\beta}$ e Ω_α sono disponibili a meno della condizione differenziale del 2° ordine (congruenza dinamica) di cui alla (38), cioè

$$\nabla_\alpha\nabla_\beta\eta^{\alpha\beta} - \nabla_\alpha\nabla^\alpha\eta + \mathscr{H}\nabla_\alpha\Omega^\alpha - B^{\alpha\beta}\nabla_{(\alpha}\Omega_{\beta)} = 0\,, \tag{40}$$

essendo η la *velocità di deformazione superficiale*

$$\eta = A^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta} \equiv \nabla_\alpha V^\alpha. \tag{41}$$

Si noti che, con la decomposizione

$$\eta^{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\eta A^{\alpha\beta} + \eta_d{}^{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2), \tag{42}$$

la (40) *si riduce ad una limitazione per la sola velocità di deformazione superficiale*

$$\tfrac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla^\alpha\eta = \nabla_\alpha\nabla_\beta\eta_d{}^{\alpha\beta} + \mathscr{H}\nabla_\alpha\Omega^\alpha - B^{\alpha\beta}\nabla_{(\alpha}\Omega_{\beta)} \tag{40'}$$

e i dati iniziali $\eta_d^{\alpha\beta}$ *e* Ω_α *si possono ritenere completamente liberi.*

6. - Dinamica intrinseca di una superficie di Kirchhoff

Il problema di Cauchy di cui al sistema (31) presuppone assegnato, su σ, il campo delle accelerazioni a^i $(i = 1, 2, 3)$, oltre che le condizioni iniziali compatibilmente con le (39) e (40). È chiaro che, per un dato continuo sottile, l'espressione della accelerazione è condizionata, e dalle equazioni dinamiche, e dalle equazioni costitutive, a seconda dello schema geometrico assunto per il sistema materiale (superficie semplice o con direttori, ovvero munita di una struttura più generale).

Consideriamo, ad esempio [6], lo schema geometrico più semplice, costituito dalla sola superficie σ (teoria di Kirchhoff). Esso corrisponde idealmente ad uno strato sottile che si deformi con la condizione che le fibre normali ad una

[6] Analoghe considerazioni valgono per schemi più generali.

opportuna superficie materiale siano esse stesse materiali e indeformate (si pensi ad una superficie elastica munita di spilli ad essa normali). *Si tratta*, come è noto (cfr. ad es. [**1**]$_4$ p. 38) *di uno schema* il quale *non è determinato*, nel senso che la teoria associata ignora la parte antisimmetrica del tensore dei momenti di sforzo riportati su σ (un grado di indeterminazione ([7])); indeterminazione che si riflette anche sul tensore degli sforzi, il quale è definito dalla teoria a meno del gradiente di una funzione scalare ([8]).

In ogni caso, pur entro i suoi confini, l'assetto della teoria, quale risulta dall'approccio tridimensionale (*metodo indiretto*), è il seguente. Vale innanzitutto su σ l'equazione indefinita e quella di continuità

$$\mu(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a})-\frac{1}{\sqrt{a}}\,\partial_\alpha(\sqrt{a}\boldsymbol{P}^\alpha)=0\,, \tag{43}$$
$$\partial_t\mu+\mu\eta=0\,,\qquad \eta\equiv a^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}\,,$$

essendo $\boldsymbol{p}$ il carico ripartito su σ (comprensivo delle forze e dei momenti) e $\boldsymbol{P}^\alpha\equiv P^{\alpha\beta}\boldsymbol{a}_\beta+P^\alpha\boldsymbol{a}_3$ il «tensore degli sforzi», costruito mediante *due tensori simmetrici* $N^{\alpha\beta}$ *ed* $S^{\alpha\beta}$

$$P^{\alpha\beta}\equiv N^{\alpha\beta}-S^{\alpha\varrho}b_\varrho{}^\beta,\qquad P^\alpha\equiv\delta_\beta S^{\alpha\beta}\qquad(\alpha,\beta=1,2)\,. \tag{44}$$

Inoltre, la potenza virtuale specifica (per unità di superficie σ) delle forze intime, subordinata al vincolo per le fibre normali a σ (che si suppone perfetto), è espresso dalla somma

$$w^{(i)}=N^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}+S^{\alpha\beta}\chi_{\alpha\beta}\,. \tag{45}$$

Di qui, nel caso iperelastico, equazioni costitutive del tipo

$$\frac{1}{2}N^{\alpha\beta}=-\mu\frac{\partial\varepsilon}{\partial a_{\alpha\beta}}\,,\quad S^{\alpha\beta}=-\mu\frac{\partial\varepsilon}{\partial b_{\alpha\beta}}\qquad(\alpha,\beta=1,2)\,, \tag{46}$$

essendo ε l'*energia libera* per unità di massa (superficiale).

Ne consegue che, *assegnato il potenziale* $\varepsilon(a/b)$, ed eliminati gli sforzi nella $(43)_1$ mediante le (44) e (46), *l'accelerazione* a^i *diviene una funzione ben determinata del carico* $\boldsymbol{p}$, *della densità* μ *e delle caratteristiche geometriche di* σ: $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ *e loro derivate spaziali prime.*

([7]) Non si tratta di una reazione vincolare interna, come invece la parte antisimmetrica del tensore degli sforzi.

([8]) L'indeterminazione si può rimuovere considerando uno schema con direttori liberi [**1**]$_5$, anche unitari [**1**]$_6$.

Più precisamente si ha

$$
(47) \qquad
\begin{aligned}
a^\beta &= p^\beta - \frac{1}{\mu}\,(\delta_\alpha N^{\alpha\beta} - 2\delta_\alpha S^{\alpha\varrho} b_\varrho{}^\beta - S^{\alpha\varrho}\,\delta_\alpha b_\varrho{}^\beta)\\
a^3 &= p^3 - \frac{1}{\mu}\,(\delta_\alpha\,\delta_\beta S^{\alpha\beta} + N^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} - hS + kS^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta})\,,
\end{aligned}
$$

essendo h e k rispettivamente le *curvature media e totale* di σ, ed S l'invariante primo di $S^{\alpha\beta}$

$$
(48) \qquad h \equiv a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}\,, \qquad k \equiv \det \| b_\alpha{}^\beta \|\,, \qquad S \equiv a_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta}\,.
$$

Pertanto, aggiungendo al quadro (31), completato con le (46)-(47), l'equazione di continuità

$$
(49) \qquad \partial_t \mu = -\mu a^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}\,,
$$

si ottiene un ben determinato problema di Cauchy che richiede la sola specificazione dei dati iniziali (su Σ)

$$
(50) \qquad a_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}\,, \qquad b_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}\,, \qquad \eta_{\alpha\beta} = \boldsymbol{\eta}_{\alpha\beta}\,, \qquad \omega_\alpha = \Omega_\alpha\,, \qquad \mu = \boldsymbol{\mu} \qquad \text{su } \Sigma
$$

nonchè, in conformità della (39)

$$
(51) \qquad w_{\alpha\beta} = \frac{2}{\mathscr{H}}\,(\nabla_{[\alpha}\Omega_{\beta]} + B_{[\alpha}{}^\varrho\,\boldsymbol{\eta}_{\beta]\varrho}) \qquad \text{su } \Sigma \qquad (\alpha, \beta = 1, 2)\,.
$$

Si hanno così tutti gli elementi per costruire, in modo intrinseco, teorie non lineari dei sistemi sottili, a partire da assegnate espressioni del potenziale ε, postulate direttamente (ad esempio attraverso proprietà di isotropia), ovvero dedotte da potenziali tridimensionali. Da questo punto di vista, ci proponiamo di sviluppare prossimamente una teoria concreta nell'ambito dell'elasticità di 2° grado di Signorini (cfr. [**5**]$_1$, nonchè [**6**]), la quale fa capo a due diversi tipi di potenziale (energia libera per unità di volume della configurazione di riferimento)

$$
(52) \qquad W = \begin{cases} D\,[\,\nu(I_E - 1) + \frac{1}{2}\,(\lambda + 2\mu - 3\nu)\,I_E^2 + 2(\nu - \mu)\,II_E] + \nu\,,\\[4pt] \frac{1}{D}\,[(\mu + k)(I_e + 1) + \frac{1}{2}\,(\lambda + \mu - k)\,I_e^2 + 2kII_e] - (\mu + k)\,,\end{cases}
$$

essendo

$$(53)\qquad D \equiv \sqrt{1+2I_E+4II_E+8III_E}\,, \qquad \bar{D} \equiv \sqrt{1+2I_e+4II_e+8III_e} = \frac{1}{D}\,.$$

Dei due potenziali il primo, presentato a Stoccolma da Signorini nel 1930 [**5**]$_2$ (e ritrovato recentemente da Grioli [**3**] in una classe di potenziali di tipo polinomiale), è definito positivo per

$$(54)\qquad 3\lambda + 2\mu > 5\nu\,, \qquad \mu > \nu\,, \qquad \nu \geqslant 0$$

e, per $\nu = 0$, si riduce alla forma classica; ciò che ne accentua l'interesse. Esso è tradotto in termini di *deformazione diretta* E (a differenza del secondo [**5**]$_1$, p. 34, che fa capo alla *deformazione inversa* e, ed è generalmente considerato per $k = 0$) e consente di sviluppare una teoria isotropa con legami stress-strain non lineari (o quasi lineari).

Riferimenti bibliografici

[**1**] G. Ferrarese: [•]$_1$ *Sulla formulazione intrinseca della dinamica dei continui iperelastici*, Rend. Mat. **8** (1975), 235-249; [•]$_2$ *Sulla formulazione intrinseca della dinamica dei continui alla Cosserat*, Ann. Mat. Pura Appl. **108** (1976), 109-24; *Intrinsic formulation of Cosserat continua dynamics*, Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics, Pitmann Publ. Lim. London **2** (1978), 97-112; [•]$_3$ *Lezioni di Meccanica superiore*, Veschi, Roma 1967-68; [•]$_4$ *Sulla relazione simbolica della Meccanica delle volte*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. **42** (1967), 35-40; [•]$_5$ *Sulla Meccanica delle volte generalizzate*, Conf. al IV Cong. Mat. Espres. Latina, Bucarest 14-17 settembre 1969; *Contributi italiani alle teorie non lineari dei continui bidimensionali*, Elasticità finita, Quaderno C.N.R. 1974, 1-18; [•]$_6$ *La volta sottile, semplice esempio di continuo polare bidimensionale*, Symposia Mathematica **1** (1968), 1327-1355.

[**2**] F. Graiff, *Sulle condizioni di congruenza per deformazioni anche finite*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. **24** (1958), 415-422.

[**3**] G. Grioli, *On the thermodynamic potential for continua with reversible transformations, some possible types*, Meccanica (I) **1** (1966), 15-20.

[**4**] P. M. Naghdi, *The theory of shells and plates*, Handbuch der Physik VI a/2, Springer-Verlag, Berlin 1972.

[**5**] A. Signorini: [•]$_1$ *Trasformazioni termoelastiche finite*, Memoria II, Ann. Mat. Pura Appl. **30** (1949), 1-72; [•]$_2$ *Sulle deformazioni termoelastiche finite*, Inter. Kongr. Tekn. Mek. Stocholm 1930, 80-89; [•]$_3$ *Lezioni di Fisica Matematica*, Veschi, Roma 1952-53.

[**6**] L. STAZI, *Sulle deformazioni finite dei continui isotropi*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **33** (1974-75), 1-27.

[7] V. VOLTERRA, *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes*, Gauthier-Villars, Paris 1907.

Summary

This paper concerns with the intrinsic shells dynamics. A first order Cauchy problem is posed assuming variables of geometric-kinematic nature (such as the « metric » tensors, first and second deformation rate, spin, ecc.) connected solely to the instantaneous characteristics of the motion. Some restrictions on the initial data (initial shell, tangential spin, and deviator of the first deformation rate are all free) lead to the compatibility of the motion (secondary problem).

* * *