Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 415-426

TOMMASO RUGGERI (*)

Sulla integrazione di un sistema iperbolico quasilineare di due equazioni in due variabili indipendenti completamente eccezionale (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

1. - Premesse generali e definizione di completa eccezionalità

Prendiamo in esame il seguente generico sistema iperbolico quasi lineare del primo ordine

$$\boldsymbol{U}_t + A^i \boldsymbol{U}_i = \boldsymbol{f}, \tag{1}$$

dove $\boldsymbol{U}$ è un vettore colonna ad N componenti, A^i sono matrici funzioni di $\boldsymbol{U}$ ed $\boldsymbol{f}$ un vettore anche esso funzione del campo $\boldsymbol{U}$ ($\boldsymbol{U}_t = \partial \boldsymbol{U}/\partial t$, $U_i = \partial \boldsymbol{U}/\partial x_i$).

Si osservi che, a causa dell'ipotesi di iperbolicità del sistema (1), occorre che tutti gli autovalori $\lambda^{(i)}$ di $A_n = A^i n_i$ siano reali e che i corrispondenti autovettori $\boldsymbol{d}_I^{(i)}$ $\sum_i m^{(i)} = N$; $I = 1, 2, ..., m^{(i)}$; $m^{(i)}$ molteplicità di $\lambda^{(i)}$) formano una base di E^N per ogni $\boldsymbol{n}$ di modulo unitario.

È ben noto che le eventuali discontinuità deboli per il problema (1) evolvono lungo le linee bicaratteristiche e che le loro ampiezze soddisfano a un sistema ordinario del tipo Bernoulli [**4**]$_1$, [**4**]$_2$, [**5**]$_1$. Tali ampiezze (tante quanto è $m^{(i)}$) si mantengono limitate lungo la bicaratteristica in esame qualunque siano i dati iniziali se, escludendo il caso caustico, il sistema ha una struttura

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica Applicata, Università, via Vallescura 2, 40136 Bologna, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 12-VII-1978.

tale che sia soddisfatta la cosiddetta condizione di eccezionalità ovvero

$$\nabla\lambda^{(i)}\cdot \boldsymbol{d}_I^{(i)} \equiv 0 \qquad (\nabla = \frac{\partial}{\partial U}) . \tag{2}$$

Pertanto se la (2) è soddisfatta lungo la bicaratteristica $C^{(i)}$ considerata, non vi sarà la formazione di un'onda d'urto [**4**]$_1$, [**9**]$_1$. Se poi la condizione (2) è verificata per ogni possibile autovalore ($\forall i, I$) il sistema iperbolico (1) viene detto completamente eccezionale.

Pertanto questi ultimi sistemi hanno la proprietà che comunque si prendono i dati iniziali C^1 a tratti, tale regolarità si mantiene lungo le bicaratteristiche per tutti i tempi dell'intervallo di esistenza. Proprio per questo motivo molti esempi provenienti dalla fisica hanno tale proprietà (vedi ad esempio [**14**], [**4**]$_3$, [**10**]$_1$, [**5**]$_2$, [**11**]). Inoltre la condizione di eccezionalità garantisce nel caso di soluzioni deboli (per sistemi in forma conservativa) che esista un urto caratteristico nella classe degli urti [**9**]$_2$, [**4**]$_4$, [**5**]$_2$. Lo scopo della presente nota è quello di dimostrare che tale condizione di completa eccezionalità, per sistemi del tipo (1) purchè di due sole equazioni e in una variabile di spazio, permette anche di dare una forma esplicita delle soluzioni regolari relativamente al problema di Cauchy.

2. - Sistemi di due equazioni in due variabili indipendenti e invarianti di Riemann

Limitiamo adesso la nostra attenzione ad un sistema (1) di due equazioni in due variabili indipendenti omogeneo

$$\boldsymbol{U}_t + A(\boldsymbol{U})\boldsymbol{U}_x = 0 \tag{3}$$

con $\boldsymbol{U} \equiv \binom{u}{v}$. Indichiamo gli autovalori di A con λ e μ che supporremo oltre che reali anche distinti (*sistemi strettamente iperbolici*) e i corrispondenti autovettori destri e sinistri con $\boldsymbol{d}^{(\lambda)}$, $\boldsymbol{d}^{(\mu)}$, $\boldsymbol{l}^{(\lambda)}$, $\boldsymbol{l}^{(\mu)}$.

Tali autovettori si possono pensare, in tutta generalità, soddisfacenti alla seguente condizione di ortonormalità

$$\boldsymbol{l}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{d}^{(\lambda)} = \boldsymbol{l}^{(\mu)}\cdot\boldsymbol{d}^{(\mu)} = 1 , \qquad \boldsymbol{l}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{d}^{(\mu)} = \boldsymbol{l}^{(\mu)}\cdot\boldsymbol{d}^{(\lambda)} = 0 . \tag{4}$$

Definiamo adesso le due caratteristiche e le derivate lungo esse

$$C^{(\lambda)}: \frac{dx}{dt} = \lambda ; \quad C^{(\mu)}: \frac{dx}{dt} = \mu ; \quad \frac{d^{(\lambda)}}{dt} = \partial_t + \lambda\partial_x , \quad \frac{d^{(\mu)}}{dt} = \partial_t + \mu\partial_x . \tag{5}$$

È ben noto che, introducendo gli invarianti di Riemann e facendo una trasformazione odografa il sistema (3) si riconduce ad un sistema lineare. Infatti siano r ed s gli invarianti di Riemann rispettivamente lungo $C^{(\lambda)}$ e $C^{(\mu)}$ ovvero

$$\frac{\mathrm{d}^{(\lambda)} r}{\mathrm{d}t} = r_t + \lambda r_x = 0 \,, \quad \frac{\mathrm{d}^{(\mu)} s}{\mathrm{d}t} = s_t + \mu s_x = 0 \,, \tag{6}$$

se lo Jacobiano $D(u, v)/D(r, s)$ è diverso da zero il sistema (3) è riconducibile al sistema (6), se poi anche $D(r, s)/D(x, t)$ è diverso da zero, è possibile considerare la trasformazione odografa dalle variabili r ed s a x e t ottenendo così il sistema

$$x_s - \lambda t_s = 0 \,, \qquad x_r - \mu t_r = 0 \,, \tag{7}$$

poichè λ e μ si possono pensare come funzioni di r e di s il sistema (7) è lineare.

La difficoltà di integrare (7) consiste nel fatto che i coefficienti sono variabili e inoltre che il problema di Cauchy si presenta nella forma inversa

$$r(x, 0) = \Psi(x) \,, \qquad s(x, 0) = \Phi(x) \,. \tag{8}$$

In questo caso P. D. Lax [**9**]$_3$ ha dimostrato l'esistenza di un tempo critico al di là del quale non è più possibile prolungare la soluzione. Nel caso invece che il sistema (3) sia completamente eccezionale il problema odografo diventa notevolmente semplice e come mostreremo si riesce con facilità a determinare la soluzione del problema di Cauchy.

In tali condizioni si ha

$$\nabla\lambda \cdot \boldsymbol{d}^{(\lambda)} = \nabla\mu \cdot \boldsymbol{d}^{(\mu)} \equiv 0 \,, \tag{9}$$

ed è noto che in questo caso r ed s coincidono rispettivamente con μ e λ ovvero che gli stessi autovalori di A sono invarianti di Riemann.

Questo fatto è stato osservato dapprima nel caso del campo scalare e nel caso dell'elettrodinamica non lineare con Lagrangiana di Born-Infeld da T. Taniuti [**14**] e poi in generale in [**4**]$_3$, [**5**]$_2$. Un uso di tale proprietà nello studio degli urti e dei sistemi strettamente eccezionali è stato fatto in [**5**]$_2$.

Ne diamo qui la dimostrazione dato che è semplicissima.

Moltiplichiamo la (3) una volta per $\boldsymbol{l}^{(\lambda)}$ e poi per $\boldsymbol{l}^{(\mu)}$ ottenendo

$$\boldsymbol{l}^{(\lambda)} \cdot \frac{\mathrm{d}^{(\lambda)} U}{\mathrm{d}t} = 0 \,, \quad \boldsymbol{l}^{(\mu)} \cdot \frac{\mathrm{d}^{(\mu)} U}{\mathrm{d}t} = 0 \,. \tag{10}$$

Tenendo conto di (4) segue

$$\mathrm{d}^{(\lambda)}\boldsymbol{U}/\mathrm{d}t \propto \boldsymbol{d}^{(\mu)}\,, \qquad \mathrm{d}^{(\mu)}\boldsymbol{U}/\mathrm{d}t \propto \boldsymbol{d}^{(\lambda)}\,.$$

A causa della supposta invertibilità locale tra u, v e λ, μ si ha subito

$$\frac{\mathrm{d}^{(\mu)}\lambda}{\mathrm{d}t} = \nabla\lambda\cdot\frac{\mathrm{d}^{(\mu)}U}{\mathrm{d}t} \propto \nabla\lambda\cdot\boldsymbol{d}^{(\lambda)}\,, \quad \frac{\mathrm{d}^{(\lambda)}\mu}{\mathrm{d}t} = \nabla\mu\cdot\frac{\mathrm{d}^{(\lambda)}U}{\mathrm{d}t} \propto \nabla\mu\cdot\boldsymbol{d}^{(\mu)}\,,$$

e pertanto poichè si è fatta l'ipotesi di completa eccezionalità (9), segue l'asserto che λ e μ sono invarianti di Riemann

$$\lambda_t + \mu\lambda_x = 0\,, \qquad \mu_t + \lambda\mu_x = 0\,. \tag{11}$$

In conclusione si ha

Ogni sistema strettamente iperbolico di due equazioni in due variabili indipendenti completamente eccezionale tale che $D(u, v)/D(\lambda, \mu) \neq 0$ *è riducibile al sistema* (11).

Se poi $D(\lambda, \mu)/D(x, t) \neq 0$ da (7) e (8) segue nel nostro caso

$$x_\mu - \mu t_\mu = 0\,, \qquad x_\lambda - \lambda t_\lambda = 0\,, \tag{12}$$

$$\lambda(x, 0) = \Phi(x)\,, \qquad \mu(x, 0) = \Psi(x)\,; \tag{13}$$

da (12) segue $(\mu - \lambda)t_{\mu\lambda} = 0$, e poichè $\lambda \neq \mu$ si ottiene $t_{\mu\lambda} = 0$ da cui la soluzione di (12) discende subito

$$t = L'(\lambda) + M'(\mu)\,, \qquad x = \lambda L'(\lambda) + \mu M'(\mu) - L(\lambda) - M(\mu)\,, \tag{14}$$

essendo $L(\lambda)$ e $M(\mu)$ due funzioni arbitrarie da determinarsi mediante le condizioni (13) ($'$indica derivazione rispetto all'argomento).

Le (13) possono interpretarsi come equazioni parametriche della linea $t = 0$ nel piano odografo λ, μ.

Sostituendo in (14) a posto di λ e μ $\Phi(x)$ e $\Psi(x)$ si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= L'\big(\Phi(x)\big) + M'\big(\Psi(x)\big)\,, \\ x &= \Phi(x)L'\big(\Phi(x)\big) + \Psi(x)M'\big(\Psi(x)\big) - L\big(\Phi(x)\big) - M\big(\Psi(x)\big)\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Supponiamo adesso, perchè necessario nel seguito, che le funzioni Φ *e* Ψ *siano di classe* C^1*, strettamente monotone e che i codomini* $C(\Phi)$, $C(\Psi)$ *siano tutta la*

retta, inoltre per l'ipotesi di stretta iperbolicità che anche $\Phi(x) \neq \Psi(x)$, $\forall x \in R$.
Derivando le (15) rispetto a x si ha

$$L''(\Phi(x))\,\Phi'(x) + M''(\Psi(x))\,\Psi'(x) = 0\,,$$

$$\Phi(x)\,\Phi'(x)\,L''(\Phi(x)) + \Psi(x)\,\Psi'(x)\,M''(\Psi(x)) = 1\,,$$

eliminando $M''(\Psi(x))$ segue

$$L''(\Phi(x)) = 1/[\Phi'(x)\cdot(\Phi(x) - \Psi(x))] = F(\Phi(x))\,.$$

Per la supposta invertibilità di Φ e poichè il codominio di Φ è tutto l'asse reale si ha

(16)
$$L''(\xi) = \frac{[\Phi^{-1}(\xi)]'}{\xi - \Psi(\Phi^{-1}(\xi))} = F(\xi)\,,$$

e analogamente

(17)
$$M''(\xi) = \frac{[\Psi^{-1}(\xi)]'}{\xi - \Phi(\Psi^{-1}(\xi))} = G(\xi)\,.$$

Pertanto $F(\xi)$ e $G(\xi)$ sono conosciute in termini dei dati iniziali $\Phi(\xi)$ e $\Psi(\xi)$.
Da (16) otteniamo

(18)
$$\begin{aligned} L(\eta) &= \int_{\Phi(x)}^{\eta}\Big\{\int_{\Phi(x)}^{\tau} F(\xi)\,d\xi\Big\}\,d\tau + a(\Phi(x))\cdot\eta + b(\Phi(x)),\\ M(\eta) &= \int_{\Psi(x)}^{\eta}\Big\{\int_{\Psi(x)}^{\tau} G(\xi)\,d\xi\Big\}\,d\tau + c(\Psi(x))\cdot\eta + d(\Psi(x))\,. \end{aligned}$$

Sostituendo in (15) si ottiene

(19)
$$a(\Phi(x)) + c(\Psi(x)) = 0\,, \qquad b(\Phi(x)) + d(\Psi(x)) = -\,x\,.$$

Sostituendo (18) in (14) dopo aver tenuto conto delle (19) si ottiene in definitiva

(20)
$$\begin{aligned} t &= \int_{\Phi(x)}^{\lambda} F(\xi)\,d\xi + \int_{\Psi(x)}^{\mu} G(\xi)\,d\xi\,,\\ 0 &= \lambda\int_{\Phi(x)}^{\lambda} F(\xi)\,d\xi + \mu\int_{\Psi(x)}^{\mu} G(\xi)\,d\xi - \int_{\Phi(x)}^{\lambda} d\tau\int_{\Phi(x)}^{\tau} F(\xi)\,d\xi - \int_{\Psi(x)}^{\mu} d\tau\int_{\Psi(x)}^{\tau} G(\xi)\,d\xi\,. \end{aligned}$$

Pertanto (20) rappresenta la soluzione esplicita del problema di Cauchy (12), (13).

La (20) si può prestare ad un immediato calcolo, anche numerico. Infatti fissato x si determinano $\Phi(x)$ e $\Psi(x)$ e fissato un t (20) diventa un sistema algebrico nelle incognite λ e μ.

3. - Invertibilità locale e globale

Il determinante Jacobiano della trasformazione odografa vale

$$J = D(x,t)/D(\lambda,\mu) = (\lambda-\mu)t_\lambda t_\mu = (\lambda-\mu)L''(\lambda)M''(\mu) = (\lambda-\mu)F(\lambda)G(\mu)\,, \tag{21}$$

per le condizioni assunte per $\Phi(x)$ e $\Psi(x)$ segue subito da (16) e (17) che $F(\lambda)$ e $G(\mu)$ sono sempre diversi da zero. Pertanto sino a quando si mantiene la stretta iperbolicità J risulterà diverso da zero garantendo così l'invertibilità locale relativa alla trasformazione odografa.

Tuttavia la stetta iperbolicità in generale non si manterrà per tutti i tempi. Per rendersi conto di questo fatto basta osservare che poichè lungo $C^{(\mu)}$ si ha $\lambda = \Phi(x_0)$ e lungo $C^{(\lambda)}$ $\mu = \Psi(x_1)$ (x_0 e x_1 sono rispettivamente i punti in cui le caratteristiche $C^{(\mu)}$ e $C^{(\lambda)}$ incontrano la retta $t = 0$), basta che esistano due punti x_0 e x_1 tali che $\Phi(x_0) = \Psi(x_1)$ perchè si abbia $\lambda = \mu$ nel punto di incontro di $C^{(\lambda)}$ e $C^{(\mu)}$.

Per escludere questa possibilità occorrerebbe

$$\Phi(x) \neq \Psi(y) \qquad \forall x \text{ e } \forall y\,, \tag{22}$$

che è impossibile poichè $C(\Phi)$ e $C(\Psi)$ coincidono con tutto l'asse reale.

Pertanto esisterà in generale un t^*

$$t^* = \inf_x\,[t\colon \lambda(x,t) = \mu(x,t)]$$

tale che $J = 0$ e la soluzione potrebbe non essere prolungata per $t \geqslant t^*$. Per quanto detto posto con λ^* il valore comune di λ e μ segue dalla prima delle (20)

$$t^* = \inf_x \{ \int_{\Phi(x)}^{\lambda^*} F(\xi)\,d\xi + \int_{\Psi(x)}^{\lambda^*} G(\xi)\,d\xi \}\,, \tag{23}$$

dove λ^* è definita implicitamente come funzione della x dalla seconda delle (20)

$$0 = \lambda^*\{ \int_{\Phi(x)}^{\lambda^*} F(\xi)\,d\xi + \int_{\Psi(x)}^{\lambda^*} G(\xi)\,d\xi\} - \int_{\Phi(x)}^{\lambda^*} d\tau \int_{\Phi(x)}^{\tau} F(\xi)\,d\xi - \int_{\Psi(x)}^{\lambda^*} d\tau \int_{\Psi(x)}^{\tau} G(\xi)\,d\xi\,.$$

Riepilogando

Nelle ipotesi fatte per i dati iniziali per $0 \leqslant t < t^*$ *si ha che il determinante Jacobiano è diverso da zero e pertanto si ha la condizione sufficiente per l'invertibilità locale della trasformazione odografa.*

Si osservi ovviamente che $J \neq 0$ garantisce solo l'invertibilità locale e non quella globale. D'altra parte è noto che in R^n esistono delle condizioni sufficienti tali da garantire anche la invertibilità globale, citiamo ad esempio il seguente teorema [**2**].

Condizione sufficiente affinchè vi sia l'invertibilità globale in un dominio aperto e convesso è che la parte simmetrica della matrice jacobiana sia definita (positiva o negativa).

Tali condizioni si traducono nel nostro caso in

$$\lambda F(\lambda) > 0\,, \qquad \lambda F(\lambda)G(\mu) - \tfrac{1}{4}(\mu G(\mu) + F(\lambda))^2 > 0 \qquad (\forall \mu > \lambda \text{ o } \forall \mu < \lambda)\,,$$

oppure

$$\lambda F(\lambda) < 0\,, \qquad \lambda F(\lambda)G(\mu) - \tfrac{1}{4}(\mu G(\mu) + F(\lambda))^2 > 0 \qquad (\forall \mu > \lambda \text{ o } \forall \mu < \lambda)\,. \tag{24}$$

Per comprendere il procedimento dato diamo subito un semplice esempio prima di passare agli esempi fisici.

4. - Un esempio

Siano $\Phi(x) = x + 1$; $\Psi(x) = x - 1$ i dati iniziali che soddisfano a tutte le condizioni richieste.

Nel piano λ, μ la linea $t = 0$ ha equazione $\mu = \lambda - 2$ ed è immediato da (16) e (17) che $F(\xi) = -G(\xi) = \frac{1}{2}$; pertanto le (20) diventano

$$t = (\lambda - \mu)/2 - 1\,, \qquad 0 = \lambda^2 - \mu^2 - 4x\,,$$

da cui la soluzione di (12) e (13) valida per ogni $t \neq t^* = -1$

$$\lambda(x, t) = \frac{x}{t+1} + (t + 1)\,, \qquad \mu(x, t) = \frac{x}{t+1} - (t + 1)\,.$$

5. - Fluido isentropico con equazione costitutiva di Kármán-Tsien

È conosciuto che nella teoria del moto adiabatico di un fluido perfetto, la relazione costitutiva tra la pressione e la densità è frequentemente approssimata, in regime subsonico, dalla seguente equazione [**16**], [**7**], [**6**], [**12**]

$$p = -\frac{a^2}{\varrho} + b \qquad (a \text{ e } b \text{ costanti}), \tag{25}$$

che, a meno della costante additiva, corrisponde a un gas politropico con rapporto di Poisson tra i calori specifici $\gamma = -1$, che non è accettabile per i fluidi reali [**7**].

Tale approssimazione dovuta a von Kármán [**16**] prende il nome di approssimazione quasi-isentropica ed è possibile provare che la legge (25) approssima in maniera ottima il processo isentropico, tanto che è largamente usata in aerodinamica (vedi ad es. [**6**], [**12**]).

È interessante notare che l'equazione costitutiva (25) *è l'unica possibile che rende il sistema differenziale delle equazioni del fluido completamente eccezionale, eliminando così la possibilità che le eventuali discontinuità deboli evolvono in onde d'urto* [**4**]$_5$.

Pertanto se si considera il caso di una sola dimensione di spazio le equazioni del fluido rientrano nella nostra trattazione ed è possibile dare la soluzione non appena si assegnano i dati iniziali.

Le equazioni sono

$$\varrho(u_t + uu_x) + p_x = 0\,, \qquad \varrho_t + (\varrho u)_x = 0\,. \tag{26}$$

Tenendo conto di (25) ed introducendo la velocità del suono $c = (p')^{\frac{1}{2}} = a/\varrho$, le equazioni (26) diventano

$$u_t + uu_x - cc_x = 0\,, \qquad c_t - cu_x + uc_x = 0\,. \tag{27}$$

Le (27) rientrano nelle (3) con $U \equiv \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix}$, $A \equiv \begin{pmatrix} u & -c \\ -c & u \end{pmatrix}$; pertanto

$$\lambda = u + c\,; \qquad \mu = u - c\,. \tag{28}$$

Si considerino adesso come esempio i seguenti dati iniziali

$$u(x, 0) = u_0(x) = 0\,, \qquad c(x, 0) = c_0(x) = c_1 + x(c_2 - c_1)\,, \tag{29}$$

dove c_1 e c_2 sono delle costanti che hanno il significato delle velocità del suono nei punti $x = 0$ ed $x = 1$.

Limitiano la nostra attenzione all'intervallo $x \in [0, 1]$ pur trattando sempre solamente il problema di Cauchy (l'intervallo $[0, 1]$ si può interpretare come il tratto di una condotta dove viene esaminato il moto in questione), posto

$\alpha = c_2 - c_1$, $c_2 > c_1$, le condizioni (29) si traducono nelle seguenti condizioni iniziali per λ e μ

$$\Phi(x) = c_0(x)\,, \qquad \Psi(x) = -\,c_0(x)\,.$$

La linea $t = 0$ nel piano λ, μ è la retta di equazione $\mu = -\,\lambda$ ed è facile verificare da (16) e (17) che in questo caso si ha

$$F(\xi) = -\,G(\xi) = 1/(2\alpha\xi)\,;$$

pertanto, sostituendo in (20) dopo aver svolto gli integrali si ottiene la soluzione

$$\lambda(x, t) = \big(\mathrm{tgh}\,(\alpha t) + 1\big)\cdot c_0(x)\,, \qquad \mu(x, t) = \big(\mathrm{tgh}\,(\alpha t) - 1\big)\cdot c_0(x)\,,$$

in questo caso $t^* = +\,\infty$ per $x \in [0, 1]$.
Tenendo conto della (28) segue la soluzione delle equazioni del fluido (27) con i dati iniziali (29)

$$u(x, t) = c_0(x)\cdot \mathrm{tgh}\,(\alpha t)\,, \qquad c(x, t) = c_0(x)\,.$$

La soluzione mette in evidenza che c, p e ϱ hanno gli stessi valori di quelli all'istante iniziale mentre la velocità u fissato x cresce al variare del tempo mantenendosi sempre più piccola della velocità del suono e tendendo a questa per $t \to \infty$.

Si tenga conto di aver preso dei dati iniziali molto semplici per poter presentare in maniera semplice la metodologia di integrazione, naturalmente a secondo del problema fisico in questione per tali fluidi si potranno prendere i dati iniziali più consoni che in generale richiederanno per la determinazione degli integrali che appaiono in (20) l'uso di metodi numerici.

6. - Campo scalare ed elettrodinamica non lineare con lagrangiana di Born-Infeld

Un modello proposto da Heisenberg [**8**], [**14**] per un campo scalare φ è quello che si ottiene considerando una lagrangiana L del tipo

$$L = (1 - u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}\,,$$

dove $u = \varphi_t$, $v = \varphi_x$ se ci si limita al caso unidimensionale.

Le equazioni di Eulero per tale lagrangiana assumono la forma di un sistema del primo ordine quasi lineare

$$(v^2+1)u_t - 2uvu_x + (u^2-1)v_x = 0\,, \qquad v_t - u_x = 0\,, \tag{30}$$

queste equazioni rientrano nelle (3) con λ e μ dati da $\lambda = -(uv+L)/(v^2+1)$; $\mu = -(uv-L)/(v^2+1)$.

Il sistema (30) è completamente eccezionale [**14**], [**4**]$_6$ e pertanto si può dare la soluzione procedendo nella stessa maniera dell'esempio precedente.

Segnaliamo che, nel caso unidimensionale, si riconducono all'equazioni (30) anche le equazioni dell'elettrodinamica non lineare con lagrangiana proposta da Born-Infeld [**14**]

$$L = (1 + B^2 - E^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (\text{supponendo } \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E} = 0)$$

e il modello della corda relativistica proposto in [**10**]$_2$ (vedi anche su questi argomenti [**1**], [**3**]$_{1,2}$ [**4**]$_{2,7}$ [**11**], [**13**], [**15**]).

Osservazione. Per finire osserviamo: (*a*) che i dati iniziali si possono anche prendere C^1 a tratti poichè le soluzioni si ottengono da (20) rispettivamente a destra e a sinistra della caratteristica che trasporta le discontinuità; (*b*) che si può, tenendo conto che l'equazione nel piano odografo è l'equazione lineare delle onde ($t_{\lambda\mu} = 0$), estendere l'integrazione anche al caso del problema misto: dati al contorno e dati iniziali; (*c*) che il sistema (11) ammette infinite forme conservative (vedi [**5**]$_2$).

Bibliografia

[1] B. M. Barbashov and N. A. Chernikov, *Solution and quantitation of a non linear two-dimensional model for a Born-Infeld type theory*, Soviet Physics JETP **23** (1966), 861-868.

[2] M. Berger and M. Berger, *Perspectives in nonlinearity. An introduction to non linear analysis*, W. A. Benjamin, New York 1968.

[3] D. I. Blokinstev: [•]$_1$ *On the propagation of signals in nonlinear field theory*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **82** (1952), 553-556; [•]$_2$ *Non local and nonlinear field theories*, Uspehi Fiz. Nauk **61** (1957), 137-159.

[4] G. Boillat: [•]$_1$ *La propagation des ondes*, Gauthier-Villars, Paris 1965; [•]$_2$ *Ondes asymptotiques non linéaires*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **111** (1976), 31-44; [•]$_3$ *Nonlinear electrodynamics: Lagrangians and equations of motion*, J. Mathematical Phys. **11** (1970), 941-950; [•]$_4$ *Chocs caractéristiques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, **274** A (1972), 1018-1021; [•]$_5$ *Covariant distur-*

bances and exceptional waves, J. Mathematical Phys. (7) **14** (1973), 973-976; [•]$_6$ *Le cône critique et le champ scalaire*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér A-B **260** A (1965), 2427-2429; [•]$_7$ *Shock relations in nonlinear electrodynamics*, Phys. Lett. **40** A (1972), 9-10.

[5] G. BOILLAT and T. RUGGERI: [•]$_1$ *On the evolution law of the weak discontinuities for hyperbolic quasi-linear systems*, (Wave Motion **1** (1979), 149-152); [•]$_2$ *Characteristic shocks: Completely and Strictly Exceptional Systems*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **15** A (1978), 197-204.

[6] E. CARAFOLI, *High-speed Aerodynamics*, Pergamon Press, 1956.

[7] R. COURANT and K. O. FRIEDRICHS, *Supersonic flow and shock waves*, Springer-Verlag, New York 1976 (vedi nota pag. 10).

[8] W. HEISENBERG, *Mesonenerzeugung als Stosswellenproblem*, Z. Phys. A. **133** (1952), 65-79.

[9] P. D. LAX: [•]$_1$ *Contributions to the theory of partial differential equations*, Princeton University Press 1954; [•]$_2$ *Hyperbolic systems of conservation law* (II), Comm. Pure Appl. Math. **10** (1957), 537-566; [•]$_3$ *Development of singularities of solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations*, J. Mathematical Phys. **5** (1964), 611-613.

[10] T. RUGGERI: [•]$_1$ *Onde di discontinuità ed equazioni costitutive dei corpi elastici isotropi sottoposti a deformazioni finite*, Ann. Mat. Pura Appl. **112** (1977), 315-332; [•]$_2$ *Euler-Lagrange hyperbolic systems of the second order and relativistic strings*, Lett. Nuovo Cimento (2) **22** (1978), 69-75.

[11] T. RUGGERI and A. STRUMIA, *Exceptional waves and characteristic shocks on nonlinear relativistic strings*, Progr. Theoret. Phys. (6) **59** (1978), 2121-2132.

[12] W. R. SEARS, *High speed aerodynamics and jet propulsion*, **6**, Princeton University Press 1954.

[13] T. TAKABAYASI, *Theory of relativistic string and super-wave equations* (I), (II) Progr. Theoret. Phys. **51** (1974), 262-283, 571-591.

[14] T. TANIUTI, *On wave propagation in nonlinear fields*, Progr. Theoret. Phys., suppl. **9** (1958), 69-128.

[15] H. C. TZE, *Born duality and strings in hydrodynamics and electrodynamics*, Nuovo Cimento **22** A (1974), 507-526.

[16] TH. VON KÁRMÁN, *Compressibility effects in aerodynamics*, J. of the Aeronautical Science (9) **8** (1941), 337-356.

Abstract

We consider a quasi-linear strictly hyperbolic homogeneous system of two equations in two independent variables. Exploiting the fact that in the completely exceptional case *the eigenvalues of the field matrix are Riemann invariants, we write down the solutions of the Cauchy problem by means of an odograph transformation.*

Sufficient conditions for the existence of a local and global inverse of this transformation are also stated.

An application is given to the physical example of an isentropic fluid with approximate state equation of Kármán-Tsien relative to subsonic flow and to the case of a scalar field and non-linear electrodynamics with Born-Infeld Lagrangian.

* * *