Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 427-445

GIOVANNI CARINI (*)

Sulla teoria dei fronti d'onda nella dinamica relativistica di un fluido ideale conduttore di calore (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

1. – Le recenti ricerche [**1**] sulle onde e sulle discontinuità delle varie grandezze attraverso i fronti d'onda, nella dinamica di un fluido ideale relativistico *conduttore di calore*, sono fondate sostanzialmente su di un sistema differenziale parziale contenente fra l'altro un'equazione di conduzione del calore iperbolizzata.

Per quanto sia a mia conoscenza, fino ad ora non sembra che siano stati fatti dei tentativi tendenti a dimostrare l'esistenza delle onde di discontinuità nella suddetta fluidodinamica relativistica, prescindendo dalla scelta dell'equazione di conduzione del calore.

A tale questione cerca di rispondere positivamente il presente lavoro, utilizzando la concezione fisica suggerita da von Laue [**2**], sostenuta da Landau-Lifschitz [**3**] e sviluppata opportunamente in due miei precedenti lavori [**4**].

Poichè in tale contesto ha un ruolo fondamentale la massa di quiete del generico elemento del mezzo in esame, nel n. **2** si fanno delle precisazioni sul comportamento della suddetta massa nei casi della materia disgregata e di un fluido ideale adiabatico.

Nel n. **3** si esamina la massa di quiete elementare invariante dm_0 nel caso di un fluido mobile conduttore di calore e si pone in evidenza che dm_0 risulta costituita dalla massa elementare dm_1^0 che si ha in assenza della conduzione termica e dalla massa dm_T^0 di origine termica.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 98100 Messina, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 12-XII-1978.

Nel n. **4**, allo scopo di avere qualche suggerimento e di stabilire eventuali confronti col caso classico, si indicano i sistemi differenziali parziali della dinamica classica di un fluido ideale a cui sia possibile applicare la teoria dei fronti d'onda.

Nel n. **5**, si discute la determinazione dei fronti d'onda nei moti di un fluido ideale relativistico, in presenza del processo dissipativo della propagazione del calore per conduzione, e si presentano le espressioni delle velocità normali di avanzamento dei fronti d'onda.

Dopo di aver richiamato, nel n. **6**, il criterio di eccezionalità per le onde di discontinuità introdotto da Lax, si stabilisce che le onde di discontinuità materiali (o di contatto) sono eccezionali.

Nel n. **7**, si continua la discussione per gli altri fronti d'onda e si trova che delle tre onde di discontinuità che si hanno nel caso di un gas perfetto relativistico, ideale e comprimibile, soltanto l'onda materiale è eccezionale.

Il caso limite di un fluido ideale conduttore di calore, relativisticamente incomprimibile, viene esaminato nel n. **8**, dove si mostra che le tre onde suddette sono eccezionali o che il campo U è completamente eccezionale.

Infine nel n. **9**, si considera il criterio di eccezionalità nell'approssimazione newtoniana e, nell'ambito classico, si indicano i casi in cui tutte le onde sono eccezionali.

2. – Come si è annunziato nel n. **1**, esponiamo in questo numero dei richiami e delle precisazioni sul comportamento della massa di quiete del generico elemento del mezzo nella dinamica della materia disgregata e nella dinamica di un fluido ideale adiabatico.

Si indichi con K il riferimento inerziale di osservazione rispetto a cui si muove della materia disgregata (assenza di sforzi) e sia $\mathrm{d}m_0$ la massa di quiete del suo generico elemento M.

Com'è noto, $\mathrm{d}m_0$ è la massa elementare nel riferimento inerziale K' in cui M è istantaneamente in quiete.

Nel caso che la quadriforza, di natura esterna, agente su M non produca variazioni di $\mathrm{d}m_0$, si ha ovviamente

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(\mathrm{d}m_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(\varrho^0\,\mathrm{d}V_0) = 0\,, \tag{1}$$

dove ϱ^0, $\mathrm{d}V_0$ e t' sono rispettivamente la densità di massa di quiete, il volume elementare di M ed il tempo, tutti valutati rispetto a K'.

Se si osserva che in K' si ha

$$\boldsymbol{v}' = 0\,, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{v}' = \frac{\partial v'_i}{\partial x'_i} \neq 0\,, \tag{2}$$

essendo $\boldsymbol{v}'$ la velocità di M rispetto a K', in virtù della nota relazione cinematica

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(\mathrm{d}V_0) = \operatorname{div}\boldsymbol{v}'\,\mathrm{d}V_0\,, \tag{3}$$

dalla (1) si deduce agevolmente la seguente equazione di continuità

$$\frac{\mathrm{d}\varrho^0}{\mathrm{d}t'} + \varrho^0 \operatorname{div}\boldsymbol{v}' \equiv \frac{\partial\varrho^0}{\partial t_s} + \operatorname{div}(\varrho^0\boldsymbol{v}') = 0\,. \tag{4}$$

Dopo questo breve richiamo sulla massa di quiete nel caso della materia disgregata, passiamo a considerare rispetto a K il moto di un fluido ideale in condizioni adiabatiche dove, cioè, gli sforzi specifici si riducano a pressioni normali e ciascun elemento del mezzo non riceva calore dagli elementi circostanti.

Se anche in questo caso indichiamo con $\mathrm{d}m_0 = \varrho^0\,\mathrm{d}V_0$ la massa di quiete, ossia secondo Fock [**5**] la «massa invariante» di M, proveniente dalla distribuzione di materia, nelle medesime ipotesi per la quadriforza un procedimento analogo a quello seguito per la materia disgregata porta al convincimento che le equazioni (1) e (4) continuano a valere.

Ciò posto, consideriamo le masse elementari relativistiche che M viene ad avere durante il moto, in virtù del principio di inerzia dell'energia di Einstein.

Per procedere a tale valutazione in maniera corretta, è bene osservare che la particella M possiede durante il moto un'energia interna relativistica $\mathrm{d}E_0^{(i)}$ ed è costantemente immersa in un campo di pressione, che si esplica anche se il fluido è sensibilmente incomprimibile cosicchè, nel volume $\mathrm{d}V_0$ della particella, c'è l'energia di pressione $p'\,\mathrm{d}V_0$. Ne segue che la massa *totale* di quiete $\mathrm{d}\overline{m}_0 = \varrho^0\,\mathrm{d}V_0$ di M viene ad essere costituita dalla suddetta massa di quiete $\mathrm{d}m_0$, dalla massa di quiete proveniente dalla energia interna classica di M (masse elementari che sono compendiate in $\mathrm{d}E_0^{(i)}$) e dalla massa originata (sempre in virtù del principio d'inerzia della energia di Einstein) dall'energia di pressione $p'\,\mathrm{d}V_0$.

Pertanto si ha

$$\mathrm{d}\overline{m}_0 = \varrho^0\,\mathrm{d}V_0 = \frac{1}{c^2}(\mathrm{d}E_0^{(i)} + p'\,\mathrm{d}V_0) = \frac{1}{c^2}(U_0 + p')\,\mathrm{d}V_0 = \frac{1}{c^2}H_0\,\mathrm{d}V_0\,, \tag{5}$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto, U_0 ed H_0 sono rispettivamente l'energia interna e l'entalpia relativistiche per unità di volume.

Indicando con $\bar{H}_0$ l'entalpia, per unità di massa di quiete invariante, la (5) può porsi nella forma

$$\mathrm{d}\overline{m}_0 = \frac{1}{c^2}\bar{H}_0\,\mathrm{d}m_0\,, \tag{5$'$}$$

essendo $H_0 = \varrho^0\bar{H}_0$.

In virtù della nota relazione termodinamica

$$\mathrm{d}\bar{H}_0 = T_0\,\mathrm{d}\bar{S}_0 + \frac{1}{\varrho^0}\,\mathrm{d}p'\,, \tag{6}$$

dove T_0 è la temperatura assoluta ed $\bar{S}_0$ l'entropia per unità di massa di quiete (entrambe valutate in K'), essendo nel caso attuale $\mathrm{d}\bar{S}_0 = 0$, dalla (5)$'$ si ricava

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(\mathrm{d}\overline{m}_0) \equiv \frac{\partial}{\partial t'}(\mathrm{d}\overline{m}_0) = \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}t'}\,\mathrm{d}V_0 \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial p'}{\partial t'}\,\mathrm{d}V_0\,, \tag{7}$$

poichè in K' si ha $\partial/\partial t' = \mathrm{d}/\mathrm{d}t'$.

L'utilizzazione della (3) consente di desumere dalla (7) l'equazione

$$\frac{\mathrm{d}\varrho^0}{\mathrm{d}t'} + \varrho_0\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}' \equiv \frac{\partial\varrho_0}{\partial t'} + \mathrm{div}\,(\varrho^0\,\boldsymbol{v}') = \frac{1}{c^2}\frac{\partial p'}{\partial t'}\,, \tag{8}$$

da cui si evince che $(1/c^2)(\partial p'/\partial t')$ è, nel senso relativistico, la densità di sorgente della massa totale di quiete di M.

Nel caso particolare di un fluido ideale barotropico (e quindi in condizioni isentropiche) dove ϱ^0 è connessa a p' da una relazione del tipo $\varrho^0 = \varphi(p')$, sussiste la seguente formula [**6**]

$$\mathrm{d}\overline{m}_0 = \mathrm{d}m_0 + \frac{\mathrm{d}m_0}{c^2}\int_0^{p'}\frac{1}{\varrho^0}\,\mathrm{d}p'\,. \tag{5$''$}$$

Ovviamente, in tale caso, la (7) può essere dedotta direttamente dalla (5)$''$.

3. – Si consideri ora rispetto a K il moto di un fluido ideale relativistico in cui abbia rilevanza fisica la *propagazione del calore per conduzione.*

Indichiamo qui con K_1 e $\mathrm{d}m_1$ rispettivamente il sistema di istantanea quiete e la massa di quiete di M, designati nel n. **2** con K' e $\mathrm{d}m_0$; ossia K_1 è il riferimento inerziale di istantanea quiete dell'elemento M, $\mathrm{d}m_1$ in assenza di conduzione termica.

Poichè ogni flusso di energia (ad es. termica) implica, per il principio di inerzia dell'energia di Einstein, un flusso di massa, nel caso in esame si ha ovviamente una modifica della massa $\mathrm{d}m_1$ ed una variazione dell'impulso di M dovuta proprio alla corrente termica.

Pertanto, come ho mostrato in un mio precedente lavoro [7], lo studio matematico del flusso nelle condizioni attuali, dove si deve tener conto della propagazione del calore per conduzione, va fatta opportunamente introducendo l'elemento *totale* generico N, $\mathrm{d}m_0$, la cui massa di quiete

$$\mathrm{d}m_0 = \mathrm{d}m_1^0 + \mathrm{d}m_T^0\,, \tag{9}$$

risulti costituita da $\mathrm{d}m_1^0$ proveniente da $\mathrm{d}m_1$ e dalla massa $\mathrm{d}m_T^0$ di origine termica.

Inoltre, indicando con K' il sistema di istantanea quiete di N, $\mathrm{d}m_0$, si ha

$$\mathrm{d}m_0\boldsymbol{v}' = \mathrm{d}m_1^0\boldsymbol{v}_1 - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{J}'\,\mathrm{d}V_0 = 0\,, \tag{10}$$

dove $\boldsymbol{v}' = 0$, $\boldsymbol{v}_1$, $\mathrm{d}m_1^0 = \mathrm{d}m_1(1 - v_1^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ sono rispettivamente la velocità di N, la velocità e la massa di M rispetto a K'; $\boldsymbol{J}'$ è la densità di corrente termica valutata in K' mentre $\mathrm{d}V_0$ è il volume di quiete di N.

La (10) pone in evidenza che la velocità di N è connessa ad una quantità di moto costituita dall'impulso $\mathrm{d}m_1^0\boldsymbol{v}_1$ che si ha in assenza di conduzione termica e dall'impulso $-(1/c^2)\boldsymbol{J}'\mathrm{d}V_0$ di origine termica.

Dopo di ciò, essendo $\boldsymbol{v}' = 0$, in K' risulta nullo il flusso dell'impulso totale attraverso la superficie Σ di N, $\mathrm{d}m_0 = \varrho^0\mathrm{d}V_0$. Si ha cioè

$$\frac{\partial}{\partial t'}(\varrho^0\,\mathrm{d}V_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(\varrho^0\,\mathrm{d}V_0) = \int_\Sigma \varrho^0 v_n'\,\mathrm{d}\sigma = \int_\Sigma \left(\varrho_1^0\boldsymbol{v}_1 - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{J}'\right)_n \mathrm{d}\sigma = 0, \tag{11}$$

dove ϱ_1^0 è definita da: $\mathrm{d}m_1^0 = \varrho_1^0\mathrm{d}V_0$.

Pertanto in K' vale la seguente relazione

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(\mathrm{d}m_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(\varrho^0\,\mathrm{d}V_0) = 0\,. \tag{11$'$}$$

La utilizzazione della (3) consente di dedurre dalla (11)' la seguente equazione di continuità

$$\frac{\mathrm{d}\varrho^0}{\mathrm{d}t'} + \varrho^0\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}' \equiv \frac{\partial\varrho^0}{\partial t'} + \mathrm{div}\,(\varrho^0\boldsymbol{v}') = 0\,, \tag{12}$$

analoga alla (4).

Inoltre se si seguono le considerazioni fatte nel n. **2**, intese a tener conto degli effetti prodotti dalle forze di pressione, ci si convince agevolmente che all'elemento generico N viene associata una massa di quiete totale $\mathrm{d}\overline{m}_0$ espressa da una formula analoga alla (5), ossia

$$\mathrm{d}\overline{m}_0 = \frac{1}{c^2} H_0 \,\mathrm{d}V_0 = \frac{1}{c^2} \bar{H}_0 \,\mathrm{d}m_0 \,. \tag{13}$$

Poichè è nullo il flusso dell'impulso totale attraverso la superficie Σ dell'elemento N, il processo fisico che interessa N, $\mathrm{d}m_0$ viene ad essere *puramente adiabatico*. Pertanto si può scrivere

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(\mathrm{d}S_m) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(\bar{S}_0 \,\mathrm{d}m_0) = \frac{\mathrm{d}\bar{S}_0}{\mathrm{d}t'} \,\mathrm{d}m_0 = 0 \,, \tag{14}$$

essendo $\mathrm{d}S_m$ l'entropia relativistica della generica particella N, rispetto a K'.

Ne segue allora che anche in questo caso sussistono formule analoghe alle (7), (8), valide per i flussi adiabatici.

Se ora si indicano con t e $\boldsymbol{v}$ rispettivamente il tempo e la velocità ordinaria di N, entrambi valutati in K, per l'invarianza relativistica di $\mathrm{d}s' = c\,\mathrm{d}t' = \mathrm{d}s = c(1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$, dalla (14) si desume la seguente relazione

$$\frac{\mathrm{d}\bar{S}_0}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \bar{S}_0}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot \operatorname{grad} \bar{S}_0 = 0 \,, \tag{15}$$

che esprime l'adiabaticità del moto.

Da quanto è stato esposto nelle linee precedenti, segue chiaramente che, in base al principio di inerzia dell'energia di Einstein, ogni moto di un fluido ideale relativistico in cui ha rilevanza la propagazione del calore per conduzione, va studiato come il moto di un fluido ideale in condizioni adiabatiche il cui generico elemento N abbia la massa di quiete invariante $\mathrm{d}m_0$ e l'impulso $\mathrm{d}m_0\boldsymbol{v}'$ (rispetto a K') espressi rispettivamente dalle (9), (10).

In maniera compendiosa ed equivalente può affermarsi che, nell'ambito relativistico, il processo dissipativo della propagazione del calore per conduzione in un fluido ideale, mobile rispetto a K, comporta una variazione nella massa di quiete e nell'impulso del generico elemento M che si suole considerare in assenza di conduzione termica.

4. – Nella schematizzazione e nello studio matematico dei vari fenomeni fisici, le teorie classiche appaiono come una prima approssimazione delle corrispondenti teorie relativistiche.

Pertanto, anche allo scopo di avere qualche suggerimento e di stabilire eventuali confronti, ci sembra opportuno indicare brevemente in questo numero i sistemi differenziali parziali della dinamica di un fluido ideale classico in cui sia possibile applicare la teoria delle onde di discontinuità.

Per far ciò, ricordiamo che, nel riferimento K, le equazioni differenziali di moto di un fluido ideale conduttore di calore, che si deducono da noti principi della dinamica classica, sono le seguenti

$$\varrho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \varrho \boldsymbol{F} - \operatorname{grad} p\,, \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{v}) = 0\,, \tag{16}$$

a cui si deve aggiungere la cosiddetta equazione generale del trasporto del ca--ore, che nel caso in esame può assumere [**8**] la forma

$$\varrho T \frac{\mathrm{d}\bar{S}}{\mathrm{d}t} = \operatorname{div}(\chi \operatorname{grad} T)\,, \tag{17}$$

dove χ è la conducibilità termica del mezzo.

Il sistema differenziale (16), (17) contiene cinque equazioni scalari e sette funzioni incognite, ossia: v_1, v_2, v_3 (componenti della velocità $\boldsymbol{v}$), ϱ, p, $\bar{S}$, T.

Per completare tale sistema occorre innanzitutto stabilire quali siano le grandezze termodinamiche, che si assumono come variabili indipendenti, atte a descrivere lo stato interno del fluido in esame nei vari processi.

Se si caratterizza lo stato interno con la densità di massa ϱ e con l'entropia $\bar{S}$ per unità di massa, l'energia interna $\bar{U}$, per unità di massa, risulterà espressa in termini di ϱ e di $\bar{S}$, ossia

$$\bar{U} = \bar{U}(\varrho, \bar{S})\,. \tag{18}$$

Nota la forma della $\bar{U}$, che viene determinata o sperimentalmente o con le ipotesi teoriche della fisica statistica, in generale il sistema formato dalle equazioni (16), (17) viene completato dalle due seguenti relazioni funzionali

$$T = \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{S}}\right)_{\varrho}\,, \tag{19}$$

$$p = \varrho^2 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \varrho}\right)_{\bar{S}}\,, \tag{20}$$

che si desumono agevolmente dalla (18) e dalla ben nota relazione termodinamica

$$T\,\mathrm{d}\bar{S} = \mathrm{d}\bar{U} + p\,\mathrm{d}\frac{1}{\varrho}\,. \tag{21}$$

In particolare, se il fluido ideale in esame si comporta come un gas perfetto, ossia soddisfa all'equazione di stato

$$T = \frac{1}{R}\frac{p}{\varrho}, \tag{22}$$

dove R è la costante del gas, l'energia interna specifica dipende soltanto dalla temperatura e se tale dipendenza è lineare il gas si suole chiamare *politropico*.

Si dimostra che p possiede in tali casi la seguente espressione

$$p = A(\bar{S})\,\varrho^{\gamma}, \tag{23}$$

dove A è funzione di $\bar{S}$ e γ è il rapporto dei calori specifici del mezzo a pressione e a volume costante.

Dopo di ciò, le equazioni fondamentali della dinamica di un gas perfetto, conduttore di calore, sono le seguenti

$$\begin{aligned} &\varrho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \varrho\boldsymbol{F} - \operatorname{grad} p, \qquad \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho\boldsymbol{v}) = 0, \\ &\varrho T\frac{\mathrm{d}\bar{S}}{\mathrm{d}t} = \operatorname{div}(\chi \operatorname{grad} T), \quad T = \frac{1}{R}\frac{p}{\varrho}, \quad p = A(\bar{S})\,\varrho^{\gamma}. \end{aligned} \tag{24}$$

Ora è facile verificare che, sia nel caso generale precedentemente considerato sia nel caso dei gas perfetti, l'intervento di div $(\chi \operatorname{grad} T)$ a secondo membro della (17) (o della $(24)_3$) non fa assumere il carattere di iperbolicità al corrispondente sistema differenziale fondamentale.

Com'è noto, in base alla teoria sulle onde di discontinuità, tale carattere è decisivo allo scopo della determinazione dei fronti d'onda con velocità normali di avanzamento reali e finite.

Invece, nei casi in cui si abbia

$$\operatorname{div}(\chi \operatorname{grad} T) = 0, \tag{25}$$

ossia nei casi in cui il flusso è adiabatico o isentropico i sistemi differenziali suddetti sono iperbolici e con essi sono compatibili [**9**] fronti d'onda con velocità normali di avanzamento

$$\begin{matrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{matrix} = v_n \pm a, \qquad \lambda_3 = v_n, \tag{26}$$

dove

$$a = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)^{1/2}, \tag{27}$$

è la cosiddetta « *velocità di propagazione del suono* ».

Dopo le precedenti considerazioni, concludiamo affermando che nella dinamica classica di un fluido ideale conduttore di calore, almeno in base all'attuale teoria generale sulle onde di discontinuità, l'esistenza di fronti d'onda con velocità normali di avanzamento reali e finite, espresse dalla (26), si ha soltanto nei casi in cui il moto del fluido ideale è adiabatico e, in particolare, isentropico.

5. – Discutiamo ora la determinazione dei fronti d'onda nei moti di un fluido ideale relativistico in presenza del processo dissipativo della propagazione del calore per conduzione.

A tale scopo, cominciamo a ricordare che in un mio lavoro [**10**] precedente ho dimostrato che nella dinamica relativistica di un fluido ideale conduttore di calore valgono, in assenza di forze esterne, le seguenti equazioni differenziali di moto, *formalmente analoghe* a quelle che si hanno nei flussi adiabatici reversibili

$$\varrho_0 \frac{\mathrm{d}W^\sigma}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{c^2} g^{\sigma\nu} \frac{\partial p}{\partial x^\nu} - \frac{1}{c^2} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} W^\sigma, \qquad \frac{\partial}{\partial x^\nu}(\varrho^0 W^\nu) = 0 \tag{28}$$

essendo ϱ^0 e ϱ_0 espresse rispettivamente da

$$\varrho^0 = \varrho_1^0 + \varrho_T^0, \tag{29}$$

$$\varrho_0 = \frac{1}{c^2} H_0, \tag{30}$$

deducibili immediatamente dalla (9) e dalla (13).

Precisiamo che la ϱ_1^0 e la ϱ_T^0, che compaiono nella (29), sono definite rispettivamente da

$$\mathrm{d}m_1^0 = \varrho_1^0 \,\mathrm{d}V_0, \tag{31}$$

$$\mathrm{d}m_T^0 = \varrho_T^0 \,\mathrm{d}V_0. \tag{32}$$

Nelle (28) W^σ è la quadrivelocità della generica particella N, $\mathrm{d}m_0$ calcolata con riferimento alla seguente metrica galileana

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}x^1)^2 - (\mathrm{d}x^2)^2 - (\mathrm{d}x^3)^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu, \tag{33}$$

dove (¹) si è posto $x^0 = ct$; x^1, x^2, x^3 sono coordinate cartesiane introdotte in K.

La $(28)_1$, che è poi la $(56)_2$ del l.cit. [4], ci fornisce l'equazione dell'impulso di N rispetto a K; la $(28)_2$, identica con la (23) del l.cit. [4], esprime la conservazione della massa di quiete invariante $\mathrm{d}m_0$ di N.

Le considerazioni fatte nel n. **3**, tendenti a mostrare che ogni flusso di un fluido ideale relativistico con conduzione di calore equivale al moto di un fluido ideale opportuno in condizioni adiabatiche, portano a completare il sistema (28) con l'equazione (15), che esprime l'adiabaticità del flusso.

Poichè sussistono le seguenti identità

$$\frac{\mathrm{d}W^\sigma}{\mathrm{d}s} = W^\nu \frac{\partial W^\sigma}{\partial x^\nu}\,, \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} = W^\nu \frac{\partial p}{\partial x^\nu}\,, \tag{34}$$

la (28_1), in virtù della (30), può porsi nella seguente forma

$$H_0 W^\nu \frac{\partial W^\sigma}{\partial x^\nu} - j^{\sigma\nu} \frac{\partial p}{\partial x^\nu} = 0\,, \tag{35}$$

essendo

$$j^{\sigma\nu} = g^{\sigma\nu} - W^\sigma W^\nu. \tag{36}$$

Le (35) compendiano soltanto tre equazioni scalari indipendenti, poichè la composizione di ambo i membri con W_σ ci dà un'identità.

Dopo di ciò, trascrivendo con le notazioni tridimensionali le $(28)_2$, (35) e considerando la (15), si ottiene il seguente sistema differenziale fondamentale

$$\begin{gathered} \frac{\partial(\alpha \boldsymbol{v})}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\,(\alpha\boldsymbol{v}) + \frac{c^2}{\alpha H_0}\,\mathrm{grad}\,p + \frac{1}{H_0}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\,\alpha\boldsymbol{v} = 0\,, \\ \frac{\partial(\alpha\varrho^0)}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,(\alpha\varrho^0) + \alpha\varrho^0\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0\,, \quad \frac{\partial\bar{S}_0}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,\bar{S}_0 = 0, \end{gathered} \tag{37}$$

dove è $\alpha = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Il mezzo in esame è termodinamicamente a due parametri. Si assuma, come nel caso classico considerato nel n. **4**, che il suo stato interno sia definito da ϱ^0 ed $\bar{S}_0$. Ne segue che durante il moto si ha

$$p = p(\varrho^0, \bar{S}_0)\,, \qquad H_0 = H_0(\varrho^0, \bar{S}_0)\,, \tag{38}$$

(¹) Gli indici in basso sono di covarianza, quelli in alto di contravarianza ed è sottintesa ogni sommatoria che satura un indice di covarianza con uno di contravarianza. Gli indici greci assumono i valori 0, 1, 2, 3; quelli latini 1, 2, 3. Si ha inoltre $g_{\mu\nu} = 1$ per $\mu = \nu = 0$; $g_{\mu\nu} = -1$ per $\mu = \nu = 1, 2, 3$; $g_{\mu\nu} = 0$ per $\mu \neq \nu$.

mentre lungo la linea di corrente della generica particella N, dm_0, in conformità alla (37_3), si ha $\bar{S}_0 = \text{cost.}$

Pertanto, dalla $(38)_1$, in virtù delle (27), $(37)_3$, si ricava

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = a^2 \left(\frac{\partial \varrho^0}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} \varrho^0\right). \tag{39}$$

Dopo di ciò, se come funzioni incognite, oltre a ϱ^0 ed $\bar{S}_0$, si assumono le componenti del vettore $\boldsymbol{V} = \alpha \boldsymbol{v}$, avendosi

$$V_i = \alpha v_i\,, \qquad \alpha = \left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{1}{\alpha c^2} \boldsymbol{V} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}\,, \tag{40}$$

le (37) ci forniscono il seguente sistema quasilineare del primo ordine

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \frac{1}{\alpha} (\boldsymbol{V} \cdot \operatorname{grad}) \boldsymbol{V} + \frac{c^2}{\alpha H_0} (a^2 \operatorname{grad} \varrho^0 + \zeta \operatorname{grad} \bar{S}_0) + \\
+ \frac{a^2}{H_0} \left(\frac{\partial \varrho^0}{\partial t} + \frac{1}{\alpha} \boldsymbol{V} \cdot \operatorname{grad} \varrho^0\right) \boldsymbol{V} = 0 \\
\alpha \frac{\partial \varrho^0}{\partial t} + \frac{\varrho^0}{\alpha c^2} \boldsymbol{V} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \varrho^0 \operatorname{div} \boldsymbol{V} + \boldsymbol{V} \cdot \operatorname{grad} \varrho^0 = 0\,, \quad \frac{\partial \bar{S}_0}{\partial t} + \frac{1}{\alpha} \boldsymbol{V} \cdot \operatorname{grad} \bar{S}_0 = 0\,,
\end{gathered} \tag{41}$$

dove si è posto

$$\zeta = \left(\frac{\partial p}{\partial \bar{S}_0}\right)_{\varrho^0}. \tag{42}$$

Le (41) costituiscono un sistema completo contenente cinque equazioni scalari nelle suddette cinque funzioni incognite, ossia V_1, V_2, V_3, ϱ^0, $\bar{S}_0$.

Tali equazioni sono soltanto formalmente analoghe alle equazioni (16) di un mio recente lavoro [**11**], che in seguito designerò con (I).

Ribadiamo la circostanza che l'analogia è soltanto formale perchè, diversamente da quanto avviene nelle (16) del lavoro (I), nelle (41) la $\boldsymbol{v}$ è definita in modo da tener conto del flusso di materia e della corrente termica; ϱ^0 ed H_0 tengono conto della propagazione del calore per conduzione nel modo che viene specificato dalle formule rispettive (29), (30).

Lo studio del sistema (41) dal punto di vista della teoria attuale sulle onde di discontinuità è stato fatto nel lavoro (I), a cui rimandiamo per la deduzione dell'esistenza dei fronti d'onda compatibili col sistema (41), che sta alla base della dinamica relativistica di un fluido ideale in presenza del processo dissipativo della propagazione del calore per conduzione.

Tali fronti d'onda hanno le seguenti velocità normali di avanzamento

$$\begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{matrix} = \frac{\alpha v_n \sigma \pm a\sqrt{\varrho^0(c^2\eta - v_n^2\sigma)}}{\alpha\eta}\,, \qquad \lambda_3 = v_n\,, \tag{43}$$

che, come si può verificare facilmente, nell'approssimazione newtoniana e limitatamente al caso adiabatico, si riducono alle (26) del n. **4**.

Nelle (43) si è posto ($\beta = v/c$)

$$\sigma = H_0 - a^2\varrho^0 = c^2\varrho_0 - a^2\varrho^0\,, \qquad \eta = H_0 - a^2\varrho^0\beta^2 = c^2\varrho_0 - a^2\varrho^0\beta^2\,. \tag{44}$$

Nei numeri seguenti si discuteranno le condizioni di eccezionalità, nel senso di Lax, delle onde considerate precedentemente.

6. – Com'è noto, quando un campo $U = \begin{vmatrix} V \\ \bar{S}_0 \\ \varrho^0 \end{vmatrix}$ non è lineare e, ad es, soddisfa ad un sistema differenziale parziale quasi-lineare, come il sistema (41), le onde di discontinuità compatibili col sistema differenziale, dopo un certo tempo, generalmente evolvono in onde d'urto, nel senso che le discontinuità delle derivate parziali prime delle componenti di U attraverso la superficie d'onda diventano infinite.

Tuttavia, nel 1954 Lax, [**12**] osservò per primo che nei campi non lineari possono esistere onde di discontinuità che non evolvono in onde d'urto; sono quelle le cui velocità normali di avanzamento λ soddisfano alla seguente condizione

$$\delta\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial U}\cdot\delta U = 0\,. \tag{45}$$

Tali onde vennero chiamate da Lax eccezionali.

Se tutte le onde sono eccezionali, il campo stesso U viene detto completamente eccezionale.

Incidentalmente osserviamo che successivamente G. Boillat [**13**] ha posto il criterio di eccezionalità sotto forma covariante.

Poichè dal punto di vista fisico è importante stabilire l'eventuale carattere di eccezionalità di un'onda di discontinuità, in ciò che segue discuteremo le condizioni di eccezionalità per le onde considerate nei numeri precedenti sia nell'ambito relativistico sia in quello classico.

Per procedere speditamente nel calcolo delle condizioni di eccezionalità è opportuno richiamare (cfr. lavoro (I)) che attraverso il fronte d'onda relativistico con velocità normale $\lambda_3 = v_n$ si ha il seguente quadro delle discontinuità

$$(46)\qquad \delta V_n = \frac{V_n}{\alpha^2 c^2} \boldsymbol{V}\cdot\delta\boldsymbol{V}\,, \qquad \delta\varrho^0 = -\frac{\zeta}{a^2}\,\delta\bar{S}_0\,, \qquad \delta\bar{S}_0 \text{ arbitrario}\,,$$

indicando con $\delta = [\partial/\partial\varphi]$ l'operatore discontinuità infinitesimale attraverso il fronte d'onda.

Invece, attraverso il fronte d'onda con velocità normale λ_1, espressa dalla $(43)_1$, si hanno le seguenti discontinuità

$$(47)\qquad \delta V_i = -\frac{a^2}{H_0}\left(V_i + \frac{c^2 n_i}{\alpha(v_n - \lambda_1)}\right)\delta\varrho^0\,, \qquad \delta\varrho^0 \text{ arbitraria} \neq 0\,, \qquad \delta\bar{S}_0 = 0\,.$$

Formule analoghe valgono per le discontinuità attraverso il fronte d'onda avente velocità normale di avanzamento λ_2.

La condizione (45) nel caso in esame si esplicita nel modo seguente

$$(48)\qquad \delta\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial\boldsymbol{V}}\cdot\delta\boldsymbol{V} + \frac{\partial\lambda}{\partial\varrho^0}\,\delta\varrho^0 + \frac{\partial\lambda}{\partial\bar{S}^0}\,\delta\bar{S}_0 = 0\,.$$

Cominciamo a considerare la condizione (48) per l'onda materiale ($\lambda_3 = v_n$). Poichè si ha ovviamente $\partial\lambda_3/\partial\varrho^0 = \partial\lambda_3/\partial\bar{S}_0 = 0$, la variazione di λ_3 si riduce soltanto a $\delta\lambda_3 = \partial\lambda_3/\partial\boldsymbol{V}\cdot\delta\boldsymbol{V}$.
Per calcolare $\partial\lambda_3/\partial\boldsymbol{V}$ teniamo presenti le $(40)_{1,2}$ e la seguente formula $v_n = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}(1 + V^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$. Dopo di ciò, si ottiene facilmente

$$\delta\lambda_3 = \frac{\partial\lambda_3}{\partial\boldsymbol{V}}\cdot\delta\boldsymbol{V} = \left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}\left\{\delta V_n - \frac{V_n}{\alpha^2 c^2}\,\boldsymbol{V}\cdot\delta\boldsymbol{V}\right\}.$$

Poichè la (46_1) esprime l'annullarsi dell'espressione entro $\{\,\}$, la condizione (48) risulta soddisfatta.

Pertanto le onde materiali relativistiche sono eccezionali, ossia non evolvono in onde d'urto.

Si può verificare agevolmente che ciò vale anche per i fronti d'onda materiali con velocità normale di avanzamento espressa dalla $(26)_3$, cioè per le onde di discontinuità di contatto nell'ambito classico.

7. – Discutiamo in questo numero la condizione di eccezionalità per i fronti d'onda con velocità normale di avanzamento λ_1 espressa dalla $(43)_1$.

In virtù delle (47), (48), la (45) nel caso attuale fornisce

$$(49)\qquad \delta\lambda_1 = \left\{\frac{\partial\lambda_1}{\partial\varrho^0} - \frac{a^2}{H_0}\left(\boldsymbol{V} + \frac{c^2\boldsymbol{n}}{\alpha(v_n - \lambda_1)}\right)\cdot\frac{\partial\lambda_1}{\partial\boldsymbol{V}}\right\}\delta\varrho^0 = 0\,.$$

Poichè $\delta\varrho^0$ è arbitrario non nullo, dalla (49) si desume che l'onda di discontinuità risulterà eccezionale se λ_1 soddisfa alla seguente condizione

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial\varrho^0} - \frac{a^2}{H_0}\left(\boldsymbol{V} + \frac{c^2\boldsymbol{n}}{\alpha(v_n-\lambda_1)}\right)\cdot\frac{\partial\lambda_1}{\partial\boldsymbol{V}} = 0\,, \tag{50}$$

che, essendo $H_0 = c^2\varrho_0$, può porsi anche nella forma

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial\varrho^0} - a^2\left(\frac{\boldsymbol{V}}{c^2\varrho_0} + \frac{\boldsymbol{n}}{\alpha\varrho_0(v_n-\lambda_1)}\right)\cdot\frac{\partial\lambda_1}{\partial\boldsymbol{V}} = 0\,. \tag{50$'$}$$

Lo sviluppo formale delle (50) si presenta nel caso relativistico abbastanza complicato.

Per poterle applicare ai vari tipi di mezzi ideali relativistici che possono essere concepiti, caratterizzati (nel caso che ci si limiti ai mezzi a due parametri termodinamici) ad es., da opportune espressioni dell'energia interna specifica U_0 e della pressione p, conviene esprimere λ_1 in termini di U_0 e di p.

Per fare ciò, teniamo presente che dopo quanto è stato richiamato nel n. **5**, la dinamica relativistica di un fluido ideale conduttore di calore, in virtù del principio di inerzia dell'energia di Einstein e la conseguente definizione di velocità della generica particella N in termini di flusso di massa e di corrente termica, si riduce alla dinamica relativistica di un conveniente fluido ideale in presenza di processi adiabatici reversibili.

Pertanto, valgono le seguenti formule [**14**]

$$\mathrm{d}\overline{U}_0 + p\,\mathrm{d}\frac{1}{\varrho^0} = 0\,, \quad \mathrm{d}\overline{S}_0 = 0\,, \tag{51}$$

dove $\overline{U}_0$ è l'energia interna relativistica per unità di massa di quiete invariante.

Dalla (51) segue ovviamente

$$\left(\frac{\partial\overline{U}_0}{\partial\varrho^0}\right) = \frac{p}{\varrho^{0^2}}\,, \qquad \mathrm{d}\overline{S}_0 = 0\,. \tag{52}$$

Se ora si osserva che si ha

$$U_0 = \varrho^0\,\overline{U}_0\,, \tag{53}$$

dalla $(52)_1$ segue

$$\varrho^0\frac{\partial U_0}{\partial\varrho^0} = p + U_0 = H_0 = c^2\varrho_0\,. \tag{54}$$

Dopo di ciò, poichè sussistono le seguenti formule

$$(55)\qquad \begin{aligned} &\sigma = H_0 - a^2\varrho^0 = \varrho^0\left(\frac{\partial U_0}{\partial \varrho^0} - \frac{\partial p}{\partial \varrho^0}\right), \quad \eta = H_0 - a^2\varrho^0\beta^2 = \varrho^0\left(\frac{\partial U_0}{\partial \varrho^0} - \frac{\partial p}{\partial \varrho^0}\beta^2\right), \\ &\Delta = \varrho^0(c^2\eta - v_n^2\sigma) = \varrho^{0^2}\left\{(c^2 - v_n^2)\frac{\partial U_0}{\partial \varrho^0} - (v^2 - v_n^2)\frac{\partial p}{\partial \varrho^0}\right\}, \end{aligned}$$

l'espressione di λ_1, data dalla $(43)_1$, può porsi nella forma

$$(56)\qquad \lambda_1 = \frac{\alpha v_n(\partial U_0/\partial \varrho^0 - \partial p/\partial \varrho^0) + \sqrt{\Delta_1}}{\alpha(\partial U_0/\partial \varrho^0 - (\partial p/\partial \varrho^0)\beta^2)} \qquad \left(\Delta_1 = \frac{a^2 \Delta}{\varrho^{0^2}}\right).$$

La (56) è più adatta per lo sviluppo formale delle (50), a cui abbiamo accennato nelle linee precedenti.

Ad es., nel caso che il fluido ideale relativistico sia un gas perfetto, in cui i calori specifici a pressione e a volume costante (ossia C_p, C_v) siano costanti, si ha

$$(57)\qquad p = \varrho^{0\gamma}\exp(\bar{S}_0/C_v), \qquad \bar{U}_0 = \frac{C_v}{R}\varrho^{0(\gamma-1)}\exp(\bar{S}_0/C_v), \qquad C_p - C_v = R,$$

dove R è la costante del gas e si è posto $\gamma = C_p/C_v$.

Come si può verificare agevolmente, la (56) in tal caso diventa

$$(58)\qquad \lambda_1 = \frac{(1 - R/C_v))V_n + \sqrt{\Delta_2}}{\alpha(1 - (R/C_v)\beta^2)},$$

essendo $\Delta_2 = (R/C_v)\{(c^2 - v_n^2) - (R/C_v)(v^2 - v_n^2)\}$.

Se ora si osserva che si ha

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \varrho^0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{V}}(c^2 - v_n^2) = -\frac{2}{\alpha}\left(v_n\boldsymbol{n} - \frac{v_n^2}{c^2}\boldsymbol{v}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{V}}(v^2 - v_n^2) = -\frac{2}{\alpha}\left\{v_n\boldsymbol{n} - \left(1 - \frac{v^2 - v_n^2}{c^2}\right)\right\}; \quad \frac{\partial \Delta_2}{\partial \boldsymbol{V}} = \mu_1\boldsymbol{n} + \mu_2\boldsymbol{v},$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{V}}\left\{\alpha\left(1 - \frac{R}{C_v}\beta^2\right)\right\} = \mu_3\boldsymbol{v},$$

con valori opportuni delle tre costanti μ_1, μ_2, μ_3, si può verificare facilmente che λ_1 non soddisfa alla condizione (50).

Formule analoghe alle precedenti valgono per l'onda di discontinuità con velocità normale di avanzamento λ_2, data dalla $(43)_2$.

Pertanto si può concludere affermando che nel caso di un gas perfetto relativistico, ideale e comprimibile, soltanto l'onda materiale (o di contatto) con velocità normale di avanzamento $\lambda_3 = v_n$ è eccezionale; le altre due onde di discontinuità con velocità normali di avanzamento λ_1, λ_2, dopo un certo tempo, evolvono in onde d'urto.

8. – Esaminiamo ora il caso limite che si ha quando il fluido considerato nel numero precedente sia incomprimibile, nel senso del teorema riportato da Lichnerowicz [**15**], esprimente che « un fluido relativistico termodinamico è incomprimibile se e solo se la differenza $U_0 - p$ dipende soltanto da $\bar{S}_0$ ».

Segue allora

$$\frac{\partial U_0}{\partial \varrho^0} - \frac{\partial p}{\partial \varrho^0} = 0\,, \tag{59}$$

da cui, per integrazione rispetto a ϱ^0, si trae

$$p = U_0 + \Phi(\bar{S}_0)\,, \tag{60}$$

essendo $\Phi(\bar{S}_0)$ una funzione arbitraria di $\bar{S}_0$. In tal caso, essendo per la (59)

$$\Delta_1 = \frac{a^2}{\varrho^{0^2}}\Delta = \frac{c^2}{\alpha^2}\left(\frac{\partial U_0}{\partial \varrho^0}\right)^2 = \frac{c^2}{\alpha^2}\left(\frac{\partial p}{\partial \varrho^0}\right)^2,$$

dalla (56) si desume

$$\lambda_1 = c\,, \tag{61}$$

che ovviamente soddisfa al criterio di eccezionalità (48).

Poichè un procedimento analogo vale per λ_2, ricordando inoltre che l'onda materiale è eccezionale, possiamo affermare che nel caso di un fluido ideale, conduttore di calore e relativisticamente *incomprimibile*, tutte le onde di discontinuità sono eccezionali o il campo U è completamente eccezionale.

Se, in particolare, il fluido ideale suddetto è un gas perfetto, d'accordo con quanto ha stabilito Giambò [**16**], dalle (57), (60) si desume facilmente che la funzione arbitraria $\Phi(\bar{S}_0)$, che compare nella (60), dev'essere necessariamente nulla ed inoltre deve valere

$$R = C_v\,. \tag{62}$$

Dalla $(57)_3$ segue allora che il gas perfetto relativisticamente incomprimibile corrisponde a

$$\gamma = 2 . \tag{63}$$

9. – La condizione di eccezionalità $(50)'$, il cui sviluppo formale è complicato nell'ambito relativistico, si semplifica notevolmente nella dinamica classica, dove consente di indicare termodinamicamente tutti i mezzi in cui sussistono campi fisici completamente eccezionali.

Infatti, nell'approssimazione newtoniana si ha

$$\lambda_1 = v_n + a , \qquad \varrho_0 \to \varrho^0 \to \varrho , \qquad \alpha \to 1 , \tag{64}$$

dove ϱ è la densità di massa nell'ambito classico.

Dopo di ciò, dalla $(50)'$, trascurando i termini di ordine superiore a β, si desume facilmente

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \varrho} - \frac{a^2 \boldsymbol{n}}{\varrho(v_n - \lambda_1)} \cdot \frac{\partial \lambda_1}{\partial \boldsymbol{v}} = 0 . \tag{65}$$

Poichè si ha

$$v_n - \lambda_1 = -a , \qquad \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varrho} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 p}{\partial \varrho^2} , \quad \frac{\partial \lambda_1}{\partial \boldsymbol{v}} = \boldsymbol{n} ,$$

dalla (65) si trae

$$\frac{1}{2} \varrho \frac{\partial^2 p}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial p}{\partial \varrho} = 0 . \tag{66}$$

Tutte le soluzioni della (66), confacenti anche con la (27), si ottengono integrando la (66) rispetto a ϱ. Esse sono

$$p(\varrho, \bar{S}) = A(\bar{S}) - \frac{B(\bar{S})}{\varrho} \qquad \text{con} \quad B(\bar{S}) > 0 , \tag{67}$$

dove A e B sono costanti rispetto a ϱ, ma in generale sono funzioni di $\bar{S}$, che è l'entropia del mezzo per unità di massa.

Un procedimento analogo vale per λ_2.

Pertanto possiamo affermare che le equazioni di campo (16), (17), (19) e (20), nei casi *adiabatici o isentropici*, da sole non bastano a determinare il carattere di eccezionalità delle onde di discontinuità.

Tali onde saranno eccezionali o il campo U è completamente eccezionale se al posto della (20) si utilizza un'equazione di stato del tipo (67).

Nel caso che il sistema dinamico viene completato con un'equazione di stato diversa dalla (67), ad es. come quella che si ha per un gas perfetto, soltanto l'onda materiale è eccezionale; le onde soniche con velocità normali di avanzamento $(26)_{1,2}$ dopo un certo tempo evolvono in onde d'urto.

Nei moti isentropici A e B (con $B > 0$) sono costanti e la corrispondente equazione di stato che si desume dalla (67) è stata utilizzata da vari Autori [**17**] nella discussione di alcuni interessanti problemi.

Bibliografia

[**1**] S. Giambò, C. R. Acad. Sci. Paris (A) **280** (1975), 599; C. R. Acad. Sci. Paris (A) **284** (1977), 93; G. Boillat, Lett. Nuovo Cimento **10** (1974), 295; A. Greco e S. Giambò, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (8) **60** (1976), 815.

[**2**] M. von Laue, *La théorie de la Relativité,* (I), Gauthier-Villars et C.ie Editerus, Paris 1922, p. 285.

[**3**] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Fluid Mechanics,* Pergamon Press, 1959, p. 505.

[**4**] G. Carini, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **97** (1973), 189; (4) **104** (1975), 337.

[**5**] V. Fock, *The Theory of Space Time and Gravitation,* Pergamon Press, 1964.

[**6**] G. Carini, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **34** (1970).

[**7**] Cfr. l. cit. [**4**] 1973.

[**8**] Cfr. l. cit. [**3**], p. 185.

[**9**] Cfr., ad es., A. Jeffrey and T. Taniuti, *Nonlinear Wave Propagation,* Accademic Press, New York 1964, p. 58.

[**10**] Cfr. l. cit. [**4**] 1973.

[**11**] G. Carini, *Sulla determinazione dei fronti d'onda nella dinamica di un fluido ideale relativistico in condizioni adiabatiche,* Rend. Circ. Mat. Palermo (in corso di stampa).

[**12**] P. D. Lax, Ann. Math. Studies **33** (1954), 211; Comm. Pure Appl. Math. **10** (1957), 537.

[**13**] G. Boillat, J. Mathematical Phys. **10** (1969), 452; **14** (1973), 973.

[**14**] Cfr. l. cit. [**4**] 1973.

[15] A. Lichnerowicz, *Relativistic Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics*, Benjamin Inc., New York 1967, p. 52.

[16] Cfr. l. cit. [1] 1977.

[17] Cfr., ad es., R. v. Mises, *Mathematical theory of compressible fluid*, Acc. Press. Inc. Publishers, New York 1958, pp. 7-278.

Sunto

Si mostra come nella dinamica relativistica di un fluido ideale, in presenza del processo dissipativo della propagazione del calore per conduzione, il principio d'inerzia dell'energia di Einstein e la conseguente definizione di velocità della generica particella in termini di flusso di massa e di corrente termica, conducano ad evidenziare l'esistenza di fronti d'onda con velocità normali di avanzamento reali e finite, prescindendo dalla scelta dell'equazione di conduzione del calore. Successivamente si discutono le condizioni di eccezionalità di tali onde secondo Lax sia nell'ambito relativistico sia in quello classico.

* * *